

Diffusion de Brox : les origines

B m.b, W^1, W^2 m.b indép dim 1 standard

$$\begin{cases} dX_t = dB_t - \frac{1}{2} W'(X_t) dt \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{cases} \sigma W^1(x), & x \geq 0 \\ \sigma W^2(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$

m.b sur \mathbb{R} (two-sided BM)

W' bruit blanc

sens ?

étude en tps long : recurrence ?

$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$?

grandes déviations

V une fonction régulière : cadre classique
= (potentiel) à la place de W
Brox '86 étude de cette diffusion

Schumacher '85 même chose

Cette diffusion est l'analogie en temps et espace continu de la marche de Sinai '82

1. MAMA :
2. Comment apparaît la diff de Brox
3. Comment "plonger" MAMA dans la diff de Brox
4. Un potentiel brownien avec dérivée
- (5. Idées de preuve du thm de Brox)

1. Nombreux phénomènes aléatoires de la physique ou biologie sont modélisés par MAMA

Bouchaud et al 1990 Annals Physics

Chernov '67 modélise la réplication de l'ADN

Temkin '72 métallurgie : cinétique des transitions de phase des alliages

Soit $\omega = (\omega_i : i \in \mathbb{Z})$ famille de v.a. iid

à val de $(0,1)$ t.q. le support de la loi η de ω_0 sont contenu de $(0,1)$

$$(Ell) \exists \kappa \in (0, \frac{1}{2}) : \eta(\kappa \leq \omega_0 \leq 1 - \kappa) = 1$$

(hypo d'ellipticité)

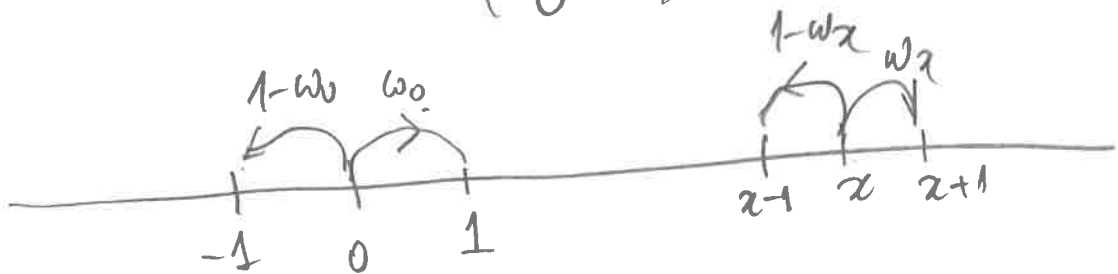
Sur chaque réalisation de $\omega = (\omega_i : i \in \mathbb{Z})$ indépendamment (m.l.v.c.) aléa on peut définir une chaîne de Mark

$$(S_m : m \geq 0), S_0 = 0$$

$$P^\omega(S_{m+1} = y \mid S_m = x, S_{m-1}, \dots, S_0)$$

$$= P^\omega(S_{m+1} = y \mid S_m = x)$$

$$= \begin{cases} \omega_x & \text{si } y = x+1 \\ 1 - \omega_x & \text{si } y = x-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$(S_m : m \geq 0)$ est la MAMA (RWRE)

Si la loi de ω_0 est la masse de Dirac : (S_m) est la ma usuelle

Deux lois différentes

• loi conditionnellement au milieu P^ω
"quenched" ("trempé") markovienne pas
invariante par translation

• loi "annealed" ("recuit") qui est la moyenne
de la loi quenched sur tous les environnements

$$P(\cdot) = \int P^\omega(\cdot) \eta(d\omega)$$

← loi de l'environnement

inva par
transl par markovienne

Reversz

1er pas : la Nature (Reversz "dieu") crée le milieu
la suite ω : $\eta(\omega_0 \leq x) = F(x)$

$$F(0) = 0, F(1) = 1$$

2ème pas : ayant figé le milieu aléa on fait une
marche au plus proche voisin droite
 ω_x et gauche $1 - \omega_x$

• $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ ω_x n'a sur cet espace

• $(\Omega, \mathcal{F}_2) \leftarrow P^\omega$ avec la définition donnée
sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ on a P_4

Deux type de point de vue

- celui de la Nature : on connaît ω et donc P et on veut connaître le comportement de la marche S_n (sachant)
- celui du physicien : ne connaît pas ω (mais peut être connaît F ou η) et on veut connaître le comportement de S_n

Hypothèses classiques

$$p_x = \frac{1-\omega x}{\omega x}, \quad \xi_x = \ln p_x, \quad x \in \mathbb{Z}$$

Solomon '74 (Revers p. 311) : lorsque

$$(Rec) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \ln \left(\frac{1-\omega}{\omega} \right) \eta(d\omega) = \int_x \log \left(\frac{1-x}{x} \right) dF(x) = 0 \\ (= \mathbb{E}(\xi_0) = 0) \text{ alors la chaîne } (S_n) \end{array} \right.$$

est récurrente

$$Si \mathbb{E}(\xi_0) = a < 0 \text{ alors } S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \text{ P-ps.}$$

De plus on veut éviter le cas dégénéré

$$(Var) \quad \infty > \sigma^2 = Var(\xi_{30}) > 0 \iff 0 < \int_x^{1-x} \log\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dF(x) < \infty$$

($< +\infty$)

Simai '82 analyse le comportement en tps

long de la MAMA
 $\frac{\sigma^2}{(\log n)^2} S_n \xrightarrow{\text{loi}} b_\infty$ (sous P)
 non-dégénéré
 non-gaussienne

Kesten et Golosov trouvent la densité de b_∞

$$P(b_\infty \in du) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8} |u|\right) du$$

$(\log n)^2 \ll \sqrt{n}$: la MAMA est plus lente que la MA usuelle

Dans la demo de Simai il y a une fonction qui joue un rôle important le potentiel V .

Le ralentissement de S_n est dû à la présence de pièges, des puits de potentiel

$$V(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^x \xi_i & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\sum_{i=-x+1}^0 \xi_i & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

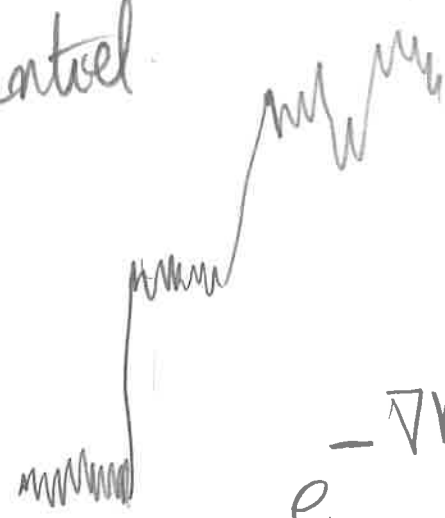
$$= -\left(\xi_{-n+1} + \xi_{-n} + \dots + \xi_0 \right)$$

$$\xi_i = \ln \left(\frac{1-w_i}{w_i} \right)$$

potentiel (joue le rôle de l'énergie)

Si reste piégée dans les "fonds de" vallées de V avant de s'échapper

ensuite elle est piégée par un autre puits de potentiel.



$$w_x = \frac{1}{1 + e^{\xi_2}} = \frac{e^{-\nabla V(x)/2}}{Z}, \quad 1 - w_x = \frac{e^{\nabla V(x)/2}}{Z}$$

$$\nabla V(x) = V(x) - V(x-1)$$

Z est constante de normalisation

Remarque : Les MAMA sont très étudiées

- cours Zeitouni St. Flour

- résumé Zeitouni

$$\mu = E(\xi_0) < 0$$

$$\nu = \begin{cases} \frac{1 - E(p_0)}{1 + E(p_0)} & \text{si } E(p_0) < 1 \\ -\frac{1 - E(p_0^{-1})}{1 + E(p_0^{-1})}, & \text{si } E(p_0^{-1}) < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}\text{-ps.}} \nu$

Sous l'hypothèse $\mu < 0$, $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ transient

$$\text{Notons } \Delta = \sup \left\{ r : E(p_0^r) = E(e^{r\xi_0}) < 1 \right\} \\ \in (0, +\infty]$$

ad $\Delta > 2$: comportement similaire à la ma usuelle
 $\frac{S_n - n\nu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} G$

gd $s < 2$ (par ex. $s \in (0, 1)$) - a cause des pièges on a des limites stables

$$\frac{S_m}{n^s} \xrightarrow{\text{loi}} \text{v.a. stable} \quad \square$$

Sous P^ω le processus S_n est une ch. Markov

$$Tf(x) = \omega_x f(x+1) + (1-\omega_x) f(x-1)$$

matrice de transition de generateur

$$L = T - I$$

$$\begin{aligned} Lf(x) &= \omega_x f(x+1) + (1-\omega_x) f(x-1) - f(x) \\ &= \frac{1}{2} (f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)) \\ &\quad + (\omega_x - \frac{1}{2}) (f(x+1) - f(x-1)) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \Delta f(x) + 2 \dot{U}(x) \hat{\nabla} f(x)$$

$$\text{où } \Delta f(x) = \frac{1}{2} (f(x+1) + f(x-1) - 2f(x))$$

$$\dot{U}(x) = \omega_x - \frac{1}{2}$$

$$\hat{\nabla} f(x) = \frac{1}{2} (f(x+1) - f(x-1))$$

2) Comment apparait la diffusion de Brox

$$V(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^x \xi_i, & m, x \geq 0 \\ 0, & m, x = 0 \\ -\sum_{i=x+1}^0 \xi_i, & m, x \leq -1 \end{cases}$$

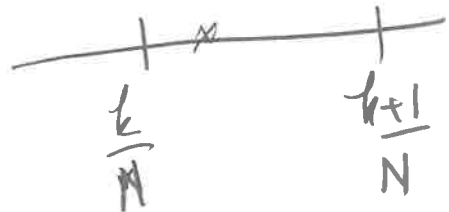
Changement d'échelle pour $V: V^N \in C(\mathbb{R})$

$$V^N(t) = \frac{\Delta}{\sqrt{N}} V(k) + \frac{1-\Delta}{\sqrt{N}} V(k+1)$$

$$m, t = \Delta \frac{k}{N} + (1-\Delta) \frac{k+1}{N}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta \in [0, 1]$$



$(w_i: i \in \mathbb{Z})$ i.i.d \Rightarrow indep et \bar{m} loi pour les ξ_i

$(V^N(t): t \in \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{loi}} (W(t): t \in \mathbb{R})$
 Donsker
 m.b. sur \mathbb{R}
 $W(0) = 0$
 variance σ^2

On va regarder une diffusion dans un potentiel aléa
 $V = (V(x): x \in \mathbb{R})$: V proc stoch indexé par \mathbb{R}
 $V(0) = 0$

$X_V = (X_V(t) : t \geq 0)$ solution formelle de

$$dX_V(t) = dB_t - \frac{1}{2} V'(X_t) dt$$

$$\begin{cases} X_V(0) = 0 \\ \uparrow \\ \text{MB standard indep de } V \end{cases}$$

Si V est régulier : sens facile à trouver pour X_V et son étude en tps long est classique

Donner un sens quand V est càdlàg, local + borné

Idee : Utiliser la construction d'Ito-McKean pour les diffusions de Feller : utiliser la fonction d'échelle et la même vitesse associées

livre de Ito-McKean '67

Soit $\Delta_V(x) = \int_0^x e^{\int_0^y V(z) dz} dy$. "scale function"

On fixe $V \Rightarrow (\Delta_V(X_V(t)))_{t \geq 0}$ est une

martingale locale continue $\Rightarrow \exists$ un m.b.

$(\beta(t) : t \geq 0)$ born de 0, indep de V t.g

$$\Delta_V(X_t(t)) = \beta(E(t)) \text{ où } E(t) = \langle \Delta_V \circ X_V \rangle(t)$$

est le processus croissant associé à la
martingale locale $\Delta_V \circ X_V$

lorsque $E(\infty) < \infty$: $\{ \beta(u) : u < E(\infty) \}$

le premier tps d'atteinte par β du niveau

$$r > 0 : \tau(r) = \inf \{ t > 0 : \beta(t) > r \}$$

$$E(\infty) = \tau(\Delta_V(\infty)) \text{ (fini ou infini)}$$

On note l'inverse de E

$$T_V(r) = E^{-1}(r) = \int_0^r \exp(-2(V \circ \Delta_V^{-1}(\beta(s)))) ds$$

$0 \leq r < E(\infty)$

Alors

$$X_V(t) = \Delta_V^{-1}(\beta(T_V^{-1}(t)))$$

ou $X_V(t) = (\Delta_V^{-1} \circ \beta \circ T_V^{-1})(t)$ la repes de
Itô-McKean de
la diff de Feller 12

$$\frac{d}{dm_V} \frac{d}{ds_V} f$$

opé: géomé infini de la
diff de Felle
de l'eds

$$\Delta_V(x) = \int_0^x e^{V(y)} dy \quad \text{fet d'échelle}$$

$$m_V(A) = \int_A 2 e^{V(y)} dy \quad \text{mesure vitesse}$$

↑
eB(R)

$$L_V f(x) = \frac{1}{2} e^{V(x)} \frac{d}{dx} \left(e^{-V(x)} \frac{df(x)}{dx} \right) \quad \text{le géomé infini de } X_V$$

Boyer - Fagionato (formes de Dirichlet associée)

Si V est un environnement g ge $D(L_V)$ est contenu

dans $C^1(\mathbb{R})$ et si $f \in D(L_V)$ alors

$$f'(x) = e^{V(x)} g(x), \quad g \in C^1(\mathbb{R})$$

Mandel '68 : p.22 si $h(x) = L_V f(x)$, $f \in D(L_V)$

alors on a

$$f(x) = \int_0^x \int_a^y h(z) dm_V(z) ds_V(y)$$

$$+ f(a) + (\Delta_V(x) - \Delta_V(a)) \frac{df}{ds_V}(a)$$

$$\frac{df}{ds_V}(a) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{s(a+h) - s(a)} = \frac{f'(a)}{e^{V(a)}}$$

$$f(x) = 2 \int_0^x \int_a^y h(z) e^{-V(z)} e^{V(y)} dz dy$$

$$+ f(a) + \frac{f'(a)}{e^{V(a)}} \int_a^x e^{V(z)} dz$$

$$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R})$$

$$f'(x) = e^{V(x)} \left[2 \int_a^x h(z) e^{-V(z)} dz + \frac{f'(a)}{e^{V(a)}} \right]$$

$g(x) \in C^1$

Thm Brox

($\nabla = 1$) Si $V = W$ m b sur \mathbb{R}

$\frac{X_W(t)}{(\log t)^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{loi}} b_\infty$ m loique ds le thm de Simenai

3) "Plonger" la MAMA dans la diffusion de Brox
 (idée de Schumacher '85)

Utiliser le potentiel discret V :

$$V(x) = \sum_{i=1}^x \xi_i, \quad x \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$V(0) = 0$, plate sur $[n, n+1)$ et
 saute $V(x) - V(x-) = \xi_n, n \in \mathbb{Z}$

et on définit X_V à l'aide de la EDS

ou encore

$$X_V(t) = (\Delta_V^{-1} \circ \beta_0 \circ T_V^{-1})(t)$$

Pour ce V on peut m.g $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_V(t) = +\infty$

$\liminf_{t \rightarrow \infty} X_V(t) = -\infty$, \mathbb{P} -p.s

On pose $(\mu_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence

$$\mu_0 = 0, \mu_{n+1} = \inf \left\{ t > \mu_n : |X_V(t) - X_V(\mu_n)| = 1 \right\}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbb{P}^V (X_V(\mu_{m+1}) = x+1 \mid X_V(\mu_n) = x) = \frac{\Delta_V(x) - \Delta_V(x-1)}{\Delta_V(x+1) - \Delta_V(x-1)} \stackrel{=}{=} \omega_x$$

Donc $(X_V(\mu_n) : n \geq 0)$ a la même loi que $(S_n : n \geq 0)$

Comprendre (μ_n) ? Schurmacher

Seuls \mathbb{P} la suite $(\mu_{n+1} - \mu_n : n \geq 0)$ est une suite de v.a. i.i.d. chacune

de loi $\inf \{x > 0 : |\beta(x)| = 1\}$

β m.b. standard

$E(\mu_1) = 1$, μ_n a des moments expo

lgm : $\mu_n \sim n$
 $n \rightarrow \infty$

loi log itère

$$\mu_n = n + O(\sqrt{n \log \log n})$$

Proven $\frac{X_V(n)}{(\log n)^2} \xrightarrow{\text{loi}} b_\infty$ analogie obtenue le thm de Salmán \mathbb{P} -ps.

$$W_k(x) = W(x) - \frac{k}{2}x, \quad k \in \mathbb{R}$$

$k=0$: cas diff de Brown

$$k \neq 0 (> 0) : X_{\sqrt{t}}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$$

$X_{\sqrt{t}}(t)$ et $\sup_{0 \leq s \leq t} X_{\sqrt{s}}(s)$ sont alors semblables

$$\sup_{0 \leq s \leq t} X_{\sqrt{s}}(s) > r \iff H(r) \leq t \text{ où}$$

$$H(r) = \inf_{r > 0} \{ t > 0 : X_{\sqrt{t}}(t) > r \}$$

\swarrow lemme de Kotani
 \searrow repues de l'emperta pour des ^{emp} proc Levy

... à suivre ...