Meilleures constantes de Sobolev

par Michel Crouzeix (*)

1. Introduction.

1.1. Les constantes.

Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbf{R}^d$, on considère l'espace des fonctions (à valeurs réelles)

$$W^{1,1}(\Omega) = \{v \in L^1(\Omega);\ \partial_i v \in L^1(\Omega), i = 1, \ldots, d\},$$

chaque dérivée partielle (par rapport à x_i) $\partial_i v$ étant prise au sens des distributions. Cet espace sera muni de la norme

$$\| v \|_{1,1,\Omega} = \| v \|_{L^1(\Omega)} + \|Dv\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega (|v(x)| + |Dv(x)|)\, dx,$$

(l'opérateur $Dv(x) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ désigne l'opérateur dérivée de v au point x, sa norme est égale à $|Dv(x)| = (\sum_i\ |\partial_i v|^2)^{1/2}$). Remarquons que ces normes sont invariantes par changement de base orthonormée.

Soit $d' = d/(d–1)$ l'exposant conjugué de d, on s'intéresse aux constantes de Sobolev suivantes :

$$S(\Omega) = \inf\{\sigma\ ; \forall v \in W^{1,1}(\Omega), \quad \| v \|_{L^{d'}(\Omega)} \leq \sigma\, \|Dv\|_{L^1(\Omega)}\},$$

$$s_p(\Omega) = \inf\{\sigma\ ; \forall v \in W^{1,1}(\Omega), \quad \| v - \underline{v} \|_{L^p(\Omega)} \leq \sigma\, \|Dv\|_{L^1(\Omega)}\},$$

$\underline{v}$ désignant la valeur moyenne de v sur l'ouvert Ω,

$$\tilde{s}_p(\Omega) = \inf\{\sigma\ ; \forall v \in W^{1,1}(\Omega), \quad \inf_{c \in \mathbf{R}} \| v - c \|_{L^p(\Omega)} \leq \sigma\, \|Dv\|_{L^1(\Omega)}\},$$

et

$$\sigma(\Omega) = \inf\{\sigma\ ; \exists A \text{ tel que, } \forall v \in W^{1,1}(\Omega), \quad \| v \|_{L^{d'}(\Omega)} \leq A\, \| v \|_{L^1(\Omega)} + \sigma\, \| Dv \|_{L^1(\Omega)}\}.$$

Remarques 1.

1) La condition $\sigma(\Omega) < +\infty$ équivaut à $W^{1,1}(\Omega) \subset L^{d'}(\Omega)$ avec injection continue.

2) On a les majorations $\sigma(\Omega) \leq S(\Omega)$, $\sigma(\Omega) \leq s_{d'}(\Omega)$ et $\tilde{s}_p(\Omega) \leq s_p(\Omega)$ (il résultera de la remarque 2.2 que $\sigma(\Omega) \leq \tilde{s}_{d'}(\Omega) \leq s_{d'}(\Omega) \leq 2^{1/d'-1/d}\tilde{s}_{d'}(\Omega)$).

3) On a $S(\Omega) = +\infty$ dès que $|\Omega|_d < +\infty$ (la notation $|\Lambda|_\ell$ désignant la mesure de Hausdorff ℓ-dimensionnelle de l'ensemble Λ) ; en effet il suffit de prendre $v = 1$ dans la définition de $S(\Omega)$. Si $|\Omega|_d = +\infty$, les constantes suivantes sont égales : $s_{d'}(\Omega) = \tilde{s}_{d'}(\Omega) = S(\Omega)$, car alors $\underline{v} = 0$ et $\| v - c \|_{L^{d'}(\Omega)} = +\infty$ dès que $c \neq 0$, puisque $v \in L^1(\Omega)$.

4) On peut avoir $\sigma(\Omega) < +\infty$ et $S(\Omega) = +\infty$ (nous verrons par exemple que c'est le cas pour la bande $\Omega =]0, 1[\times\mathbf{R}$ où $\sigma(\Omega) = 1/\sqrt{2\pi}$). Mais, si Ω est borné, la propriété $\sigma(\Omega) < +\infty$ entraîne $s_{d'}(\Omega) < +\infty$ et donc a fortiori $\tilde{s}_{d'}(\Omega) < +\infty$.

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe C_1 tel que

(*) IRMAR, UMR CNRS n° 6625, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex

$$\forall v \in W^{1,1}(\Omega), \quad \| v - \underline{v} \|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \| Dv \|_{L^1(\Omega)}.$$

On raisonne par l'absurde. Sinon il existerait une suite de fonctions $v_n \in W^{1,1}(\Omega)$ avec $\underline{v}_n = 0$, $\| v_n \|_{L^1(\Omega)} = 1$ et $\| Dv_n \|_{L^1(\Omega)} \to 0$. Puisque $\sigma(\Omega) < +\infty$, la suite v_n est bornée dans $L^{d'}(\Omega)$; si v est une valeur d'adhérence faible de cette suite, on a $\underline{v} = 0$ et $Dv = 0$, donc $v = 0$ puisque Ω est connexe. On a donc $v_n \rightharpoonup 0$ dans $L^{d'}(\Omega)$ faible. Soit maintenant K un compact, $K \subset \Omega$; l'espace $W^{1,1}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^1(K)$, on a donc $v_n \to 0$ dans $L^1(K)$; par ailleurs $\|v_n\|_{L^1(\Omega \setminus K)} \leq |\Omega \setminus K|_d^{1/d} \|v_n\|_{L^{d'}(\Omega)} \leq C_2 \, |\Omega \setminus K|_d^{1/d}$. Par passage à la limite dans $1 = \|v_n\|_{L^1(\Omega)} = \|v_n\|_{L^1(K)} + \|v_n\|_{L^1(\Omega \setminus K)}$, on obtient $1 \leq C_2 \, |\Omega \setminus K|_d^{1/d}$; cette inégalité ne pouvant être vraie $\forall K \subset \Omega$, on aboutit ainsi à une contradiction.

1.2. Les caractérisations géométriques.

On considère une famille d'ouverts dits admissibles :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \{\Lambda ; \Lambda \text{ ouvert}, \Lambda \subset \Omega, \emptyset \neq \Lambda \neq \Omega, \ &\text{la frontière intérieure } \partial_i \Lambda = \partial \Lambda \cap \Omega \\ &\text{est localement une variété } C^\infty \text{ de dimension } n-1, \\ &\Lambda \text{ est situé d'un seul côté de } \partial_i \Lambda\}.\end{aligned}$$

On pose alors

$$R(\Omega) = \sup\{ |\Lambda|_d^{1/d'} / |\partial_i \Lambda|_{d-1} \ ; \ \Lambda \in \mathcal{A} \},$$

$$r_p(\Omega) = \sup \Big\{ \frac{|\Omega|_d^{1/p}}{|\partial_i \Lambda|_{d-1}} \varphi_p\Big(\frac{|\Lambda|_d}{|\Omega|_d}\Big) \ ; \ \Lambda \in \mathcal{A} \Big\}, \ \text{où } \varphi_p(t) := \big(t(1-t)^p + (1-t)t^p\big)^{1/p},$$

$$\tilde{r}_p(\Omega) = \sup \Big\{ \tfrac{|\Omega|_d^{1/p}}{|\partial_i \Lambda|_{d-1}} \tilde{\varphi}_p\big(\tfrac{|\Lambda|_d}{|\Omega|_d}\big) \ ; \ \Lambda \in \mathcal{A} \Big\},$$

$$\text{où } \tilde{\varphi}_1(t) := \min\{t, 1-t\} \text{ et } \tilde{\varphi}_p(t) := \frac{\big(t(1-t)\big)^{1/p}}{\big(t^{\frac{1}{p-1}} + (1-t)^{\frac{1}{p-1}}\big)^{1-1/p}}, \text{ si } p \neq 1,$$

$$\rho(\Omega) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} r(\varepsilon), \qquad \text{avec } r(\varepsilon) = \sup\{ |\Lambda|_d^{1/d'} / |\partial_i \Lambda|_{d-1} \ ; \ \Lambda \in \mathcal{A} \text{ et } |\Lambda|_d \leq \varepsilon \}.$$

Le résultat suivant, dont la démonstration sera l'objet des deux prochains paragraphes, fournit une caractérisation géométrique des constantes de Sobolev

Théorème 1. *On a les égalités*

$$S(\Omega) = R(\Omega), \quad \sigma(\Omega) = \rho(\Omega) \quad \text{ et, si } \Omega \text{ est borné, } s_p(\Omega) = r_p(\Omega) \quad \text{et } \tilde{s}_p(\Omega) = \tilde{r}_p(\Omega).$$

Remarques 2.

1) La première égalité est démontrée dans le livre de Maz'ja [2], on y trouve aussi l'encadrement

$$\tilde{s}_p(\Omega) \leq \sup\{ |\Lambda|_d^{1/d'} / |\partial_i \Lambda|_{d-1} \ ; \ \Lambda \in \mathcal{A} \text{ et } |\Lambda|_d \leq \frac{1}{2} |\Omega|_d \} \leq 2^{1/p} \ \tilde{s}_p(\Omega).$$

2) On a $\varphi_p(t) = \| \chi_t - \underline{\chi}_t \|_{L^p(0,1)}$ et $\tilde{\varphi}_p(t) = \inf_{c \in \mathbf{R}} \| \chi_t - c \|_{L^p(0,1)}$, où χ_t désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $(0, t)$ et $\underline{\chi}_t = t$. On a $\varphi_2(t) = \tilde{\varphi}_2(t) = \sqrt{t(1-t)}$, $\varphi_1(t) = 2\,t(1-t)$, $\tilde{\varphi}_1(t) = \min\{t, 1-t\}$, $\varphi_p(1/2) = \tilde{\varphi}_2(1/2) = 1/2$ et $\tilde{\varphi}_p(t) \leq \varphi_p(t) \leq 2^{1/p - 1/p'} \tilde{\varphi}_p(t)$ pour $p \leq 2$. On a de plus $\tilde{\varphi}_p(t) \sim t^{1/p}$ au voisinage de 0. On en déduit les inégalités de la remarque 1.2.

3) Les fonctions $\tilde{\varphi}_p$ et φ_p sont concaves sur $(0,1)$ (en effet on vérifie aisément que $\tilde{\varphi}_p$ est un infimum de fonctions concaves et que $\varphi_p'' < 0$). On en déduit en particulier que ces deux fonctions sont sous-additives, i.e. $t_i > 0$ et $\sum_i t_i < 1$ entraînent $\tilde{\varphi}_p(\Sigma_i t_i) \leq \sum_i \tilde{\varphi}_p(t_i)$.

2. Majoration des constantes géométriques par les constantes de Sobolev.

L'outil de base de ces majorations est donné par le lemme suivant

Lemme 2. *Soit $\Lambda \in \mathcal{A}$; il existe une suite de fonctions $w_n \in C^0(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ vérifiant :*

$$0 \leq w_n \leq 1, \quad w_n(x) = 1 \text{ sur } \bar{\Lambda}, \quad w_n(x) \to 0, \ \forall x \in \Omega \setminus \bar{\Lambda},$$
$$\text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|Dw_n\|_{L^1(\Omega)} = |\partial_i \Lambda|_{d-1}.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon_0 > 0$. On pose

$\omega_0 = \{x \in \Omega;\ d(x,\partial\Omega) > \varepsilon_0/2\}$ et, pour $k > 1$, $\omega_k = \{x \in \Omega; 2^{-k-1}\varepsilon_0 < \ d(x,\partial\Omega) < 2^{-k+1}\varepsilon_0\}$. Cette famille d'ouverts $\{\omega_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ forme un recouvrement localement fini de Ω (chaque point appartient au plus à deux ω_k). On peut lui associer une famille de fonctions θ_k vérifiant $\theta_k \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \theta_k \leq 1$, support$(\theta_k) \subset \omega_k$ et $\Sigma_{k\in\mathbf{N}}\ \theta_k = 1$ dans Ω.

Étant donné un point $\sigma \in \partial_i\Lambda$, on note $\vec{n}(\sigma)$ la normale unitaire orientée vers l'extérieur de Λ. On définit une application

$$F(\sigma,\xi) := \sigma + \xi\,\vec{n}(\sigma) \qquad \text{de } \partial_i\Lambda \times \mathbf{R} \quad \text{dans } \mathbf{R}^d.$$

Puisque $\partial_i\Lambda$ est de classe C^∞, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\partial_i\Lambda$ dans $\partial_i\Lambda \times \mathbf{R}$ et un voisinage V de $\partial_i\Lambda$ dans Ω tel que F soit un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur V. Quitte à restreindre ces voisinages, on peut supposer de plus que, si $x = \sigma + \xi\,\vec{n}(\sigma) \in V$, alors $\xi \leq 0$ équivaut à $x \in \Lambda$, et si ξ est positif on a $\xi = d(x,\Lambda)$.

On choisit maintenant une suite de réels strictement positifs α_k tels que

$$\mathcal{V}_k := \partial_i\Lambda \cap \omega_k \times [0, \tfrac{1}{\alpha_k}[\ \subset \ \mathcal{V}, \qquad \|D\theta_k\|_{L^\infty(\omega_k \cap F(\mathcal{V}_k))} \leq \alpha_k,$$

$$\forall x = \sigma + \xi\,\vec{n}(\sigma) \in F(\mathcal{V}_k), \qquad dx = (1+\beta(x))\,d\sigma \wedge d\xi \qquad \text{avec } |\beta(x)| \leq \alpha_k\xi.$$

On définit la suite de fonctions w_n par

$$w_n(x) = 1 \text{ si } x \in \Lambda, \quad w_n(x) = 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus (\Lambda \cup V),$$

$$w_n(x) = \textstyle\sum_{k=0}^\infty \ \theta_k(x)\,(1 - n\alpha_k\xi)_+, \qquad \text{si } x = \sigma + \xi\,\vec{n}(\sigma) \in V.$$

il est clair que $w_n \in C^0(\Omega)$, $w_n = 1$ sur $\bar{\Lambda}$ et $\lim w_n(x) = 0$ si $x \notin \bar{\Lambda}$, de plus w_n est localement lipschitzienne, presque partout C^∞.

Il reste à montrer que $\lim_{n\to\infty} \|Dw_n\|_{L^1(\Omega)} = |\partial_i\Lambda|_{d-1}$. Pour cela on remarque que le support de Dw_n est contenu dans V. En notant χ_1 la fonction caractéristique de l'intervalle (0,1), on écrit si $x = \sigma + \xi\,\vec{n}(\sigma) \in V$, $\vec{\nabla} w_n = \vec{\mu}_n + \vec{\nu}_n$ où

$$\vec{\mu}_n(x) = \sum_{k=0}^\infty \ \theta_k(\sigma)\,n\alpha_k\,\chi_1(n\alpha_k\xi)\vec{n}(\sigma),$$

$$\vec{\nu}_n(x) = \sum_{k=0}^\infty \ \big((1 - n\alpha_k\xi)_+ \vec{\nabla}\theta_k(x) + (\theta_k(x) - \theta_k(\sigma))n\alpha_k\,\chi_1(n\alpha_k\xi)\vec{n}(\sigma)\big).$$

On a donc $|\vec{\nu}_n(x)| \leq \sum_k \|D\theta_k\|_{L^\infty}\chi_1(n\alpha_k\xi) \leq \sum_k \alpha_k\chi_1(n\alpha_k\xi)$, d'où $\|\vec{\nu}_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{4}{n}\ |\partial_i\Lambda|_{d-1}$.

De plus

$$| \, \|\vec{\mu}_n\|_{L^1(\Omega)} - \int_{\partial_i \Lambda} d\sigma | = | \int_V \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k(\sigma) \, n\alpha_k \, \chi_1(n\alpha_k \xi) \, \beta(x) \, dx \, | \leq \frac{1}{n} \, |\partial_i \Lambda|_{d-1},$$

d'où le résultat. ■

On a alors

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|_{L^p(\Omega)} = |\Lambda|_d^{1/p}, \quad \forall 1 \leq p < \infty,$$

et, si Ω est borné,

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n - \underline{w}_n\|_{L^p(\Omega)} = |\Omega|_d^{1/p} \varphi_p(\frac{|\Lambda|_d}{|\Omega|_d}), \quad \lim_{n\to\infty} \inf_{c\in\mathbf{R}} \|w_n - c\|_{L^p(\Omega)} = |\Omega|_d^{1/p} \tilde{\varphi}_p(\frac{|\Lambda|_d}{|\Omega|_d}).$$

On en déduit aisément les majorations

$$R(\Omega) \leq S(\Omega), \quad r_p(\Omega) \leq s_p(\Omega), \quad \tilde{r}_p(\Omega) \leq \tilde{s}_p(\Omega) \ \text{ et } \ \rho(\Omega) \leq \sigma(\Omega).$$

En effet montrons par exemple la dernière inégalité $\rho(\Omega) \leq \sigma(\Omega)$. Pour cela soit $\sigma > \sigma(\Omega)$, et A tel que $\forall v \in W^{1,1}(\Omega)$, $\|v\|_{L^{d'}(\Omega)} \leq A\|v\|_{L^1(\Omega)} + \sigma\|Dv\|_{L^1(\Omega)}$; soit $\Lambda \in \mathcal{A}$ vérifiant $|\Lambda|_d \leq \varepsilon$, en utilisant l'inégalité précédente avec $v = w_n$ correspondant à la suite du lemme 2, et en passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$|\Lambda|_d^{1/d'} \leq A \, |\Lambda|_d + \sigma \, |\partial_i \Lambda|_{d-1} \leq A \, \varepsilon^{1/d} |\Lambda|_d^{1/d'} + \sigma \, |\partial_i \Lambda|_{d-1}.$$

On en déduit $r(\varepsilon) \leq A \, \varepsilon^{1/d} \, r(\varepsilon) + \sigma$, d'où en faisant tendre ε vers 0, $\rho(\Omega) \leq \sigma$. Cette inégalité étant vraie $\forall \sigma > \sigma(\Omega)$, on en déduit $\rho(\Omega) \leq \sigma(\Omega)$.

3. Majoration des constantes de Sobolev par les constantes géométriques.

Le résultat suivant, dû à Meyers et Serrin, joue un rôle important pour obtenir ces estimations

Lemme 3. *L'espace*

$$W = \{ v \in W^{1,1}(\Omega); \ v \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \ \textit{et } v \textit{ est à support borné dans } \Omega \}$$

est dense dans $W^{1,1}(\Omega)$.

Démonstration. Les conditions $v \in L^\infty(\Omega)$ et v est à support borné s'obtiennent par les troncatures habituelles. Soit donc $v \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ à support borné ; on écrit $v = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k v$, où θ_k est la partition de l'unité utilisée lors de la preuve du lemme 2. Pour chaque k la fonction $\theta_k v \in W^{1,1}(\Omega)$ a un support compact contenu dans ω_k ; on peut donc lui associer une fonction $\varphi_{n,k} \in \mathcal{D}(\omega_k)$ telle que l'on ait la majoration $\|\theta_k v - \varphi_{n,k}\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq \frac{2^{-k}}{n}$. La fonction $\varphi_n = \sum_k \varphi_{n,k}$ appartient alors à W et vérifie $\|\theta_k v - \varphi_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq \frac{2}{n}$. ■

Remarques 3.

1) La démonstration montre aussi que toute fonction positive appartenant à $W^{1,1}(\Omega)$ est limite de fonctions positives appartenant à W.

2) En prenant une triangulation de ω_k par des simplexes, on peut remplacer dans ce qui précède $\varphi_{n,k} \in \mathcal{D}(\omega_k)$ par $\varphi_{n,k}$ est linéaire par morceaux. Cela montre que les fonctions de $W^{1,1}(\Omega)$ bornées et linéaires par morceaux (le nombre de morceaux étant localement fini dans Ω) sont denses dans $W^{1,1}(\Omega)$.

Soit maintenant $v \in W$ une fonction non constante, on la suppose de plus positive lorsque $|\Omega|_d$ est non borné. On pose

$$\Lambda_a = \{x \in \Omega \ ; \ v(x) > a\}, \quad \alpha(a) = |\Lambda_a|_d, \quad m = \inf_{x\in\Omega} v(x) \text{ et } \quad M = \sup_{x\in\Omega} v(x).$$

Pour presque tout a, l'ensemble $\{x \in \Omega\,;\, v(x) = a \text{ et } Dv(x) = 0\}$ est vide ; il en résulte que $\Lambda_a \in \mathcal{A}$. On a les relations (aires et co-aires)

$$\| v \|^p_{L^p(\Omega)} = -\int_m^M |a|^p \, d\alpha(a), \qquad \| Dv \|_{L^1(\Omega)} = \int_m^M |\partial_i \Lambda_a|_{d-1}\, da.$$

La fonction α est continue à droite, strictement décroissante sur (m, M), elle vaut $|\Omega|_d$ (qui est éventuellement infini) pour $a < m$ et 0 pour $a \geq M$; elle admet donc une fonction réciproque à gauche u qui est décroissante, continue et à support borné sur $[0, |\Omega|_d]$. On a

$$\| v \|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_0^{|\Omega|_d} |u(\alpha)|^p \, d\alpha \Big)^{1/p} = \| u \|_{L^p(0,|\Omega|_d)}, \qquad \text{pour } \ 1 \leq p < \infty.$$

Preuve de la majoration $S(\Omega) \leq R(\Omega)$. Il suffit de la faire dans le cas où $|\Omega|_d = +\infty$ puisque dans le cas contraire les deux quantités sont clairement infinies, on a alors $m = 0$. On utilise l'inégalité de Hardy

$$\| u \|_{L^{d'}(0,\infty)} \leq \int_0^\infty \alpha^{1/d'} \, |du(\alpha)|,$$

et la majoration $\alpha(a)^{1/d'} = |\Lambda_a|_d^{1/d'} \leq R(\Omega)\, |\partial_i \Lambda_a|_{d-1}$ (qui résulte de la définition de $S(\Omega)$). On en déduit

$$\| v \|_{L^{d'}(\Omega)} = \| u \|_{L^{d'}(0,\infty)} \leq \int_0^M \alpha(a)^{1/d'}\, da \leq R(\Omega) \int_0^M |\partial_i \Lambda_a|_{d-1}\, da = R(\Omega)\, \|Dv\|_{L^1(\Omega)}.$$

L'inégalité entre les deux termes extrêmes étant vraie pour toute fonction positive de W, on en déduit par densité qu'elle reste vraie pour toute fonction positive de $W^{1,1}(\Omega)$, donc pour toute fonction de $W^{1,1}(\Omega)$ (puisque les normes ne changent pas quand on remplace v par $|v|$). On a donc : $S(\Omega) \leq R(\Omega)$.

Remarque : rappelons la démonstration de l'inégalité de Hardy utilisée ci-dessus. Elle est clairement vérifiée (avec dans ce cas égalité) lorsque $u = \chi_t$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $(0, t)$, elle est donc vérifiée aussi pour toute combinaison positive finie de telles fonctions caractéristiques (i.e. pour toute fonction décroissante en escalier à support borné), donc pour toute fonction décroissante à support borné, et finalement pour toute fonction à variations bornées nulle à l'infini.

Preuve de la majoration $\sigma(\Omega) \leq \rho(\Omega)$. Il suffit de regarder le cas $\rho(\Omega) < \infty$. Soit $s > \rho(\Omega)$, on pose $A = \max_{t>0} \frac{1-s/r(t)}{t^{1/d}}$; il est clair que $|\Omega|_d^{-1/d} \leq A < \infty$. En procédant comme dans la remarque précédente on obtient (la fonction u étant décroissante, et à support borné lorsque $|\Omega|_d = +\infty$)

$$\| u \|_{L^{d'}(0,|\Omega|_d)} \leq A \, \| u \|_{L^1(0,|\Omega|_d)} + s \int_0^{|\Omega|_d} \frac{\alpha^{1/d'}}{r(\alpha)} \, |du(\alpha)|.$$

On utilise d'autre part la majoration $\alpha(a)^{1/d'} = |\Lambda_a|_d^{1/d'} \leq r(\alpha(a))\, |\partial_i \Lambda_a|_{d-1}$. On obtient ainsi

$$\| v \|_{L^{d'}(\Omega)} = \| u \|_{L^{d'}(0,|\Omega|_d)} \leq A \, \| u \|_{L^1(0,|\Omega|_d)} + s \int_m^M \frac{\alpha(a)^{1/d'}}{r(\alpha(a))} \, da$$

$$\leq A\,\|v\|_{L^1(\Omega)} + s\int_m^M |\partial_i\Lambda_a|_{d-1}\,da = A\,\|v\|_{L^1(\Omega)} + s\,\|Dv\|_{L^1(\Omega)}.$$

On en déduit $\sigma(\Omega) \leq s$ et par suite, s étant arbitraire $> \rho(\Omega)$, $\sigma(\Omega) \leq \rho(\Omega)$.

Preuve des majorations $s_p(\Omega) \leq r_p(\Omega)$ *et* $\tilde{s}_p(\Omega) \leq \tilde{r}_p(\Omega)$. Quitte à effectuer une dilatation de Ω, on peut se ramener au cas où $|\Omega|_d = 1$, ce qui permet d'alléger les notations. On remarque alors que $\underline{v} = \underline{u} = \int_0^1 u(\alpha)\,d\alpha$, $\|\,v - \underline{v}\,\|_{L^p(\Omega)} = \|\,u - \underline{u}\,\|_{L^p(0,1)}$ et $\inf_c \|\,v - c\,\|_{L^p(\Omega)} = \inf_c \|\,u - c\,\|_{L^p(0,1)}$. On utilise ensuite les inégalités de Hardy

$$\|\,u - \underline{u}\,\|_{L^p(0,1)} \leq \int_0^1 \varphi_p(\alpha)\,|du(\alpha)| \quad \text{et} \quad \inf_c \|\,u - c\,\|_{L^p(0,1)} \leq \int_0^1 \tilde{\varphi}_p(\alpha)\,|du(\alpha)|,$$

ainsi que les majorations $\varphi_p(\alpha(a)) \leq r_p(\Omega)\,|\partial_i\Lambda_a|_{d-1}$ et $\tilde{\varphi}_p(\alpha(a)) \leq \tilde{r}_p(\Omega)\,|\partial_i\Lambda_a|_{d-1}$, et on procède comme précédemment. ∎

Remarque 4.

1) Considérons l'espace $C^\infty(\bar{\Omega})$ (qui est l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions appartenant à $C^\infty(\mathbf{R}^d)$). Sous des hypothèses assez faibles comme la propriété suivante (dite du segment)

$$\forall x \in \partial\Omega,\ \text{il existe un voisinage } \mathcal{V} \text{ de } x$$
$$\text{et un vecteur non nul } \vec{e} \text{ tels que, } \forall t \in (0,1), \quad \mathcal{V} \cap \bar{\Omega} \subset \Omega + t\vec{e},$$

les fonctions $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W$ sont denses dans $W^{1,1}(\Omega)$. On peut alors rajouter dans la définition de l'ensemble $\mathcal{A}$ que les frontières intérieures $\partial_i\Lambda$ doivent être la restriction à Ω de variétés C^∞ de dimension $n-1$ (i.e. qu'elles doivent être C^∞ y compris au bord de Ω) sans changer la validité du théorème 2. Notons que l'on est en particulier dans ce cas lorsque la frontière de Ω est localement le graphe d'une fonction continue, Ω étant situé d'un seul côté de la frontière.

2) Compte tenu de la remarque 3) le théorème 2 reste valide quand, dans la définition de $\mathcal{A}$, la condition "$\partial_i\Lambda$ est une variété C^∞" est remplacée par la condition "$\partial_i\Lambda$ est une variété polyhédrique par morceaux, le nombre de morceaux étant localement fini dans Ω". Lorsque les fonctions appartenant à $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W$ sont denses dans $W^{1,1}(\Omega)$, on peut de plus supposer le nombre de morceaux globalement fini.

4. Quelques considérations sur les constantes.

Soit $\omega_d = |B_d|_d$ la d-mesure de la boule unité de $\mathbf{R}^d$. Il résulte de l'inégalité isopérimétrique classique (problème de Didon) que

$$\sigma(\mathbf{R}^2) = S(\mathbf{R}^2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \quad \sigma(\mathbf{R}^3) = S(\mathbf{R}^3) = \frac{1}{\sqrt[3]{36\,\pi}}, \quad \sigma(\mathbf{R}^d) = S(\mathbf{R}^d) = \frac{1}{d\,\omega_d^{1/d}}.$$

Le sup dans les définitions de ρ et R est atteint lorsque Λ est une boule.

Si Ω est invariant par une similitude de rapport $\neq 1$, alors $\sigma(\Omega) = S(\Omega)$.

Pour le demi-espace $\mathbf{R}^d_+ := \mathbf{R}^{d-1} \times \mathbf{R}^*_+$, on a $\sigma(\mathbf{R}^d_+) = S(\mathbf{R}^d_+) = 2^{1/d}\,S(\mathbf{R}^d)$.

Démonstration. Par symétrie. À la fonction $v \in W^{1,1}(\mathbf{R}^d_+)$, on associe la fonction symétrisée $\tilde{v} \in W^{1,1}(\mathbf{R}^d)$ définie par:

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in \mathbf{R}^d_+, \\ v(\bar{x}) & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{où } \bar{x} = (x_1, \ldots, x_{d-1}, -x_d).$$

On a alors $2^{1/d'}\,\|\,v\,\|_{L^{d'}(\mathbf{R}^d_+)} = \|\,\tilde v\,\|_{L^{d'}(\mathbf{R}^d)} \le S(\mathbf{R}^d)\|D\tilde v\,\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} = 2S(\mathbf{R}^d)\|Dv\,\|_{L^1(\mathbf{R}^d_+)}$, d'où la majoration $S(\mathbf{R}^d_+) \le 2^{1/d}\,S(\mathbf{R}^d)$. La borne supérieure est atteinte en prenant pour Λ une demi-boule centrée à l'origine O. ■

Soit $x \in \bar\Omega$ et $t > 0$. On note $B(x,t)$ la boule de centre x et de rayon t ; on pose $a_x(t) = |\Omega \cap B(x,t)|_d$ et $b_x(t) = |\Omega \cap \partial B(x,t)|_{d-1}$; on a donc $a_x(t) = \int_0^t b_x(s)\,ds > 0$ et $a_x(t)^{1/d'} \le S(\Omega)\,b_x(t)$. On obtient par intégration

$$\frac{t}{S(\Omega)} \le \int_0^t \frac{b_x(s)}{a_x(s)^{1/d'}}\,ds = d\,(a_x(t))^{1/d}.$$

On en déduit les minorations ($\forall x \in \bar\Omega$)

$$\forall t > 0, S(\Omega) \ge \frac{1}{d\big(a_x(t)/t^d\big)^{1/d}}, \quad \text{et } \sigma(\Omega) \ge \frac{1}{d\liminf_{t\to 0}\big(a_x(t)/t^d\big)^{1/d}}.$$

Remarque 5. Dans ce qui précède, on peut remplacer $a_x(t) = |\Omega \cap B(x,t)|_d$ par $a_x(t) = |\Omega_t|_d$ et $b_x(t) = |\Omega \cap \partial B(x,t)|_{d-1}$ par $b_x(t) = |\partial_i\Omega_t|_{d-1}$, où Ω_t est une composante connexe de $\Omega \cap B(x,t)$ telle que $x \in \bar\Omega_t$.

Conséquences.

1) On a $\sigma(\Omega) \ge 2^{1/d}S(\mathbf{R}^d)$ dès que
- soit $\partial\Omega$ admet un hyperplan tangent en un point (Ω étant d'un seul côté ou non)
- soit le complémentaire Ω^c possède un point intérieur

Justifions par exemple cette dernière affirmation. Soit P un point intérieur à Ω^c, il existe alors $A \in \partial\Omega$ tel que la boule de centre P et de rayon $|PA|$ soit contenue dans Ω^c. On a alors $\liminf_{t\to 0}\big(a_x(t)/t^d\big) \ge \omega_d/2$, d'où le résultat.

2) On a $\sigma(\Omega) \ge \frac{1}{d\,\theta^{1/d}}$ dès que, en un point frontière, Ω admet un cône tangent d'angle solide θ (la mesure étant prise vers l'intérieur de Ω).

3) On a en particulier $\sigma(\Omega) = +\infty$ si $\partial\Omega$ possède un point de rebroussement avec pointe tournée vers l'extérieur ($\theta = 0$).

Conjecture. On a $\sigma(\Omega) \ge 2^{1/d}S(\mathbf{R}^d)$ dès que $W^{1,1}(\Omega) \ne W^{1,1}(\mathbf{R}^d)$.

On suppose maintenant que $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ n'est pas l'espace entier ; on considère alors un recouvrement de $\partial\Omega$ par des ouverts non vides $\{\omega_i\}_{i\in I^*}$; on suppose que $0 \notin I^*$, et on pose $I = I^* \cup \{0\}$ et $\omega_0 = \Omega$. La famille $\{\omega_i\}_{i\in I}$ constitue donc un recouvrement de $\bar\Omega$. On pose

$$\tilde r_i(\varepsilon) = \sup\{\frac{|\Lambda|_d^{1/d'}}{|\partial_i\Lambda|_{d-1}}\,;\ \Lambda \in \mathcal{A},\ |\Lambda|_d \le \varepsilon \text{ et } \bar\Lambda \subset \omega_i\};$$

on a donc $\tilde r_0(\varepsilon) = \sigma(\mathbf{R}^d) \le \tilde r_i(\varepsilon)$, $\forall i \in I$.

On associe à ce recouvrement une partition de l'unité $\{\theta_i\}_{i\in I}$ telle que : $\theta_i \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$, $0 \le \theta_i \le 1$, $\text{support}(\theta_i) \subset \omega_i$, $\forall i \in I$ et $\sum_i \theta_i = 1$ dans Ω. On suppose de plus que cette partition vérifie de plus l'hypothèse

$$(b) \qquad B := \|\sum_{i\in I} |D\theta_i|\,\| < +\infty.$$

Lemme 4. *Sous l'hypothèse (b), on a* $\sigma(\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\{\sup_{i\in I^*} \tilde{r}_i(\varepsilon)\}$.

Démonstration. Il est clair que $\tilde{r}(\varepsilon) := \sup_{i\in I^*} \tilde{r}_i(\varepsilon)\} \leq r(\varepsilon)$, on a donc $\lim_{\varepsilon\to 0+} \tilde{r}(\varepsilon) \leq \sigma(\Omega)$. Pour obtenir l'inégalité dans l'autre sens, on choisit $s > \lim_{\varepsilon\to 0+} \tilde{r}(\varepsilon)$ et on pose $A = \sup_{t>0} \frac{1-s/\tilde{r}(t)}{t^{1/d}}$. On a alors $\forall v \in W^{1,1}(\Omega)$ (cf. au paragraphe 3 la preuve de $\sigma(\Omega) \leq \rho(\Omega)$)

$$\forall i \in I, \qquad \|\theta_i v\|_{L^{d'}(\Omega)} \leq A \|\theta_i v\|_{L^1(\Omega)} + s\|D(\theta_i v)\|_{L^1(\Omega)}.$$

En utilisant que $\|v\|_{L^{d'}(\Omega)} \leq \sum_i \|\theta_i v\|_{L^{d'}(\Omega)}$, que $\|v\|_{L^1(\Omega)} = \sum_i \|\theta_i v\|_{L^1(\Omega)}$ et que

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_i \|D(\theta_i v)\|_{L^1(\Omega)} &= \|\textstyle\sum_i |D(\theta_i v)|\,\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(\sum_i |D\theta_i|)\, v\,\|_{L^1(\Omega)} + \|\sum_i \theta_i\,|Dv|\,\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq B\,\|v\|_{L^1(\Omega)} + \|Dv\|_{L^1(\Omega)},\end{aligned}$$

on en déduit

$$\|v\|_{L^{d'}(\Omega)} \leq (A + sB)\,\|v\|_{L^1(\Omega)} + s\|Dv\|_{L^1(\Omega)},$$

d'où $s \geq \sigma(\Omega)$. ∎

Corollaire 5. *On a* $\sigma(\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \rho(\varepsilon)$, avec

$$\rho(\varepsilon) := \sup\{\frac{|\Lambda|_d^{1/d'}}{|\partial_i\Lambda|_{d-1}}\,;\ \Lambda \in \mathcal{A},\ \mathrm{diam}(\Lambda) \leq \varepsilon \text{ et } \bar{\Lambda} \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}.$$

Démonstration. On a évidemment $\lim_{\varepsilon\to 0} \rho(\varepsilon) \leq \sigma(\Omega)$ puisque $\mathrm{diam}(\Lambda) \leq \varepsilon$ implique $|\Lambda|_d \leq \omega_d\,\varepsilon^d$; l'inégalité réciproque s'obtient en recouvrant $\partial\Omega$ par des ouverts ω_i de diamètre $\leq \varepsilon$; pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé cela peut-être fait tout en satisfaisant l'hypothèse (b). On a alors, $\forall\, 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, $\tilde{r}_i(\varepsilon') \leq \rho(\varepsilon)$ et par suite $s(\Omega) \leq \rho(\varepsilon)$. ∎

Corollaire 6. *Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^d$, de frontière bornée et de classe C^1, alors*

$$\sigma(\Omega) = 2^{1/d}\, S(\mathbf{R}^d).$$

Démonstration. Pour tout $\varepsilon_0 > 0$ on peut recouvrir $\partial\Omega$ par des ouverts $\{\omega_i\}_{i\leq 1\leq n}$ vérifiant : $\forall i = 1,\ldots,n$, il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}^{(i)}$ et une fonction $a^{(i)} : \mathbf{R}^{d-1} \to \mathbf{R}$ tels que, si on note $(\hat{x}^{(i)}, x_d^{(i)})$ les coordonnées de x dans ce repère, on ait

$$\begin{gathered}\omega_i = \{x\,;\ \forall j = 1,..,d,\ |x_j^{(i)}| \leq \varepsilon_0\}, \quad a^{(i)}(0) = 0, \quad Da^{(i)}(0) = 0, \\ |a^{(i)}| \leq \varepsilon_0/2, \qquad \Omega \cap \omega_i = \{x\,;\ \forall j = 1,..,d,\ |x_j^{(i)}| \leq \varepsilon_0 \ \text{ et } \ x_d^{(i)} > a^{(i)}(\hat{x}^{(i)})\}.\end{gathered}$$

On note $\alpha(\varepsilon_0) = \sup_{1\leq i\leq n} \sup\{|Da^{(i)}(\hat{x}^{(i)})|\,;\ |\hat{x}^{(i)}|_\infty \leq \varepsilon_0\}$; la frontière étant de classe C^1, on a $\lim_{\varepsilon_0\to 0} \alpha(\varepsilon_0) = 0$.

Il est clair que $\sigma(\Omega) \geq 2^{1/d} S(\mathbf{R}^d)$; montrons que $\forall \varepsilon' > 0$, $\tilde{r}_i(\varepsilon') \leq 2^{1/d} S(\mathbf{R}^d)\,(1+\alpha(\varepsilon_0))$. Afin d'alléger les notations, on omettra désormais l'exposant i. Soit $\Lambda \in \mathcal{A}$ avec $\Lambda \subset \omega$; on définit $F(x) = F((\hat{x}, x_d)) := (\hat{x}, x_d - a(\hat{x}))$; on a $|\Lambda|_d = |F(\Lambda)|_d$ et $|\partial_i F(\Lambda)|_{d-1} \leq (1 + \alpha(\varepsilon_0))|\partial_i\Lambda|_{d-1}$. Or (par l'argument de symétrie utilisée pour le demi-espace) $|F(\Lambda)|_d \leq 2^{1/d}\, S(\mathbf{R}^d)\, |\partial_i F(\Lambda)|_{d-1}$, d'où l'on déduit $|\Lambda|_d \leq 2^{1/d}\, S(\mathbf{R}^d)\, |\partial_i\Lambda|_{d-1}\,(1+\alpha(\varepsilon_0))$, par suite $\tilde{r}_i(\varepsilon') \leq 2^{1/d} S(\mathbf{R}^d)\,(1+\alpha(\varepsilon_0))$, et en utilisant le lemme 4, $\sigma(\Omega) \leq 2^{1/d} S(\mathbf{R}^d)\,(1+\alpha(\varepsilon_0))$. ∎

Remarque. Lorsque la frontière $\partial\Omega$ est bornée et lipschitzienne, la démonstration précédente montre (mutatis mutandis) que l'on a $\sigma(\Omega) \le 2^{1/d} S(\mathbf{R}^d)\,(1+\ell)$ pour un certain réel positif ℓ.

On note

$$\mathcal{A}_0 = \{\Lambda \in \mathcal{A}\,;\ \Lambda \text{ est connexe }\}, \quad \mathcal{A}_1 = \{\Lambda \in \mathcal{A}_0\,;\ \Omega \setminus \{\Lambda \cup \partial_i\Lambda\} \text{ est connexe }\}$$

$$\text{et } \ \mathcal{A}_k = \{\Lambda \in \mathcal{A}_0\,;\ \Omega \setminus \{\Lambda \cup \partial_i\Lambda\} \text{ a au plus } k \text{ composantes connexes}\}$$

.

Théorème 7. *Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbf{R}^d$. Alors*

a) $S(\Omega) = R(\Omega) = \sup\{|\Lambda|_d^{1/d'}/|\partial_i\Lambda|_{d-1}\ ;\ \Lambda \in \mathcal{A}_0\}$; lorsque Ω a un seul point (resp. k points) à l'infini le résultat reste vrai avec $\mathcal{A}_0$ remplacé par $\mathcal{A}_1$ (resp. $\mathcal{A}_k$).

b) $\sigma(\Omega) = \rho(\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ \rho_\Omega(\varepsilon)$ avec $\rho_\Omega(\varepsilon) = \sup\{|\Lambda|_d^{1/d'}/|\partial_i\Lambda|_{d-1}\ ;\ \Lambda \in \mathcal{A}_0,\ \bar\Lambda \cap \partial\Omega \ne \emptyset$ et $\operatorname{diam}(\Lambda) \le \varepsilon\}$; lorsque la frontière $\partial\Omega$ est bornée de classe C^0 le résultat reste vrai avec $\mathcal{A}_0$ remplacé par $\mathcal{A}_1$.

c) $s_p(\Omega) = r_p(\Omega) = \sup\left\{\frac{|\Omega|_d^{1/p}}{|\partial_i\Lambda|_{d-1}}\varphi_p\left(\frac{|\Lambda|_d}{|\Omega|_d}\right)\ ;\ \Lambda \in \mathcal{A}_1\right\}$.

d) $\tilde s_p(\Omega) = \tilde r_p(\Omega) = \sup\left\{\frac{|\Omega|_d^{1/p}}{|\partial_i\Lambda|_{d-1}}\tilde\varphi_p\left(\frac{|\Lambda|_d}{|\Omega|_d}\right)\ ;\ \Lambda \in \mathcal{A}_1\right\}$.

Démonstration. Montrons d'abord que l'on peut toujours, sans modifier les bornes supérieures, remplacer $\Lambda \in \mathcal{A}$ par $\Lambda \in \mathcal{A}_0$. En effet, si $\Lambda \in \mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_0$, on peut écrire $\Lambda = \cup_{j\in J}\Lambda_j$, avec les $\Lambda_j \in \mathcal{A}_0$ disjoints, J au plus dénombrable. On remarque alors que les fonctions $\varphi(t) = t^{1/d'}$, $\varphi = \varphi_p(./|\Omega|_d)$ et $\varphi = \tilde\varphi_p(./|\Omega|_d)$ sont sous-additives. On a donc $\varphi(|\Lambda|_d) \le \sum_j \varphi(|\Lambda_j|_d)$; d'autre part Λ étant situé d'un seul côté de $\partial_i\Lambda$, les $\partial_i\Lambda_j$ sont nécessairement disjoints, d'où $|\partial_i\Lambda|_{d-1} = \sum_j |\partial_i\Lambda_j|_{d-1}$. Par suite on en déduit

$$\frac{\varphi(|\Lambda|_d)}{|\partial_i\Lambda|_{d-1}} \le \sup_j \frac{\varphi(|\Lambda_j|_d)}{|\partial_i\Lambda_j|_{d-1}}.$$

a) Supposons que Ω n'ait qu'un point à l'infini (nous entendons par là que tout voisinage de ce point dans Ω contient un voisinage connexe de ce point). Soit $\Lambda \in \mathcal{A}_1$, Λ est donc borné et $\Omega\setminus\{\Lambda\cup\partial_i\Lambda\}$ possède une composante connexe non bornée Λ_2 unique. On pose alors $\Lambda' = \Omega\setminus\{\Lambda_2\cup\partial_i\Lambda_2\}$; on a clairement $\partial_i\Lambda' = \partial_i\Lambda_2 \subset \partial_i\Lambda$ et $\Lambda \subset \Lambda'$. Donc $|\Lambda|_d/|\partial_i\Lambda|_{d-1} \le |\Lambda'|_d^{1/d'}/|\partial_i\Lambda'|_{d-1}$; or il est clair que $\Lambda' \in \mathcal{A}_1$ d'où le résultat. Lorsque Ω possède k points à l'infini, on remplace dans ce qui précède Λ_2 par l'union des composantes connexes non bornées de $\Omega \setminus \{\Lambda \cup \partial_i\Lambda\}$.

b) Nous avons vu que l'on pouvait remplacer $\Lambda \in \mathcal{A}$ par $\Lambda \in \mathcal{A}_0$, donc $\sigma(\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}\rho_\Omega(\varepsilon)$. Posons maintenant $\rho(\varepsilon) = \sup\{|\Lambda|_d^{1/d'}/|\partial_i\Lambda|_{d-1}\ ;\ \Lambda \in \mathcal{A}_1,\ \Lambda\cap\partial\Omega \ne \emptyset$ et $\operatorname{diam}(\Lambda) \le \varepsilon\}$; on a évidemment $\rho(\varepsilon) \le \rho_\Omega(\varepsilon)$. On considère maintenant une famille finie d'ouverts $\{\omega_k\}$ et de fonctions continues a_k tels que (si on note $(\hat x^{(k)}, x_d^{(k)})$ les coordonnées de x dans un repère orthonormé approprié $\mathcal{R}^{(k)}$) on ait

$$\omega_k = \{x\,;\ |\hat x^{(k)}|_\infty < \alpha,\ |x_d|^{(k)} \le \beta\}, \quad \Omega\cap\omega_k = \{x \in \omega_k\,;\ x_d^{(k)} > a_k(\hat x^{(k)})\}$$
$$\max|a_k| \le \tfrac{\beta}{2}, \qquad a_k(0) = 0.$$

Soit alors $\Lambda \in \mathcal{A}_0$ avec $\operatorname{diam}(\Lambda) \le \varepsilon$ et $\bar\Lambda\cap\partial\Omega \ne \emptyset$. (Quitte à supposer ε assez petit) on peut trouver k avec $\bar\Lambda \subset \omega_k$; on note alors Λ_2 la composante connexe de $\Omega\setminus(\Lambda\cup\partial_i\Lambda)$ qui n'est pas contenue dans ω_k et $\Lambda' = \Omega\setminus(\Lambda_2\cup\partial_i\Lambda_2)$. On a comme précédemment $\partial_i\Lambda' = \partial_i\Lambda_2 \subset \partial_i\Lambda$ et $\Lambda \subset \Lambda' \subset \omega_k$. Donc $|\Lambda|_d/|\partial_i\Lambda|_{d-1} \le |\Lambda'|_d^{1/d'}/|\partial_i\Lambda'|_{d-1}$. Par ailleurs $\Lambda' \in \mathcal{A}_1$ nous allons montrer que $\operatorname{diam}(\Lambda') \le \eta(\varepsilon)$ avec $\lim_{\varepsilon\to 0}\eta(\varepsilon) = 0$, le résultat découlera alors de la majoration $\rho_\Omega(\varepsilon) \le \rho(\eta(\varepsilon))$.

Soit $m \in \bar\Lambda\cap\partial\Omega$; on a $m \in \bar\Lambda'$ et $\operatorname{diam}(\Lambda') \le 2\max_{x\in\partial\Lambda'}\ d(m,x)$. Si $x \in \partial_i\Lambda'$, alors $x \in \partial_i\Lambda$ et donc $d(m,x) \le \varepsilon$; si $x \in \partial\Lambda'\setminus\partial_i\Lambda'$, alors $x \in \partial\Omega$ et $|\hat x^{(k)} - \hat m^{(k)}|_\infty \le \varepsilon$, on en déduit

$d(m,x) \leq \varepsilon + |a_k(\hat{x}^{(k)}) - a_k(\hat{m}^{(k)})| \leq \varepsilon + \eta_1(\varepsilon)$ en prenant η_1 égal au maximum des modules de continuité des fonctions a_k. On en déduit $\mathrm{diam}(\Lambda') \leq 2\varepsilon + 2\eta_1(\varepsilon)$.

c) Considérons maintenant le cas de r_p. Quitte à effectuer une homothétie, on supposera que $|\Omega|_d = 1$. Soit $\Lambda \in \mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_1$; puisque $\varphi_p(|\Lambda|_d) = \varphi_p(1-|\Lambda|_d)$ et φ_p est sous-additive, il existe une composante connexe Λ_2 de $\Omega \setminus (\Lambda \cup \partial_i\Lambda)$ telle que $\varphi_p(|\Lambda_2|_d)/|\partial_i\Lambda_2|_{d-1} \geq \varphi_p(|\Lambda|_d)/|\partial_i\Lambda|_{d-1}$. Soit $\Lambda' = \Omega \setminus (\Lambda_2 \cup \partial_i\Lambda_2)$, on a alors $\varphi_p(|\Lambda'|_d)/|\partial_i\Lambda'|_{d-1} = \varphi_p(|\Lambda_2|_d)/|\partial_i\Lambda_2|_{d-1} \geq \varphi_p(|\Lambda|_d)/|\partial_i\Lambda|_{d-1}$, pour achever la démonstration il suffit de remarquer que $\Lambda' \in \mathcal{A}_1$, i.e. que Λ' est connexe. En effet, Ω étant connexe, tout point de Λ' est relié par un arc restant dans Λ' à un point de $\partial_i\Lambda'$, par suite il est relié à un point de Λ (car $\partial_i\Lambda' \subset \partial_i\Lambda$) ; Λ étant connexe par arcs et $\Lambda \subset \Lambda'$ il en résulte que Λ' est connexe par arcs, donc connexe. La même démonstration marche pour le d). ∎

On introduit maintenant l'espace de cohomologie de de Rham

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \vartheta_f(\Omega)/\vartheta_e(\Omega)$$

défini comme l'espace quotient de l'espace $\vartheta_f(\Omega)$ des formes différentielles fermées de degré 1 sur Ω, à valeurs dans $\mathbf{R}$ de classe C^1, par le sous-espace $\vartheta_e(\Omega)$ des formes différentielles exactes.

Théorème 8. *Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbf{R}^d$.*

a) Si Ω est borné et si $\Lambda \in \mathcal{A}_1$, alors le nombre de composantes connexes de $\partial_i\Lambda$ est majoré par 1+dim $(\mathcal{H}^1(\Omega))$.

b) Si Ω est non borné, possède k points à l'infini et si $\Lambda \in \mathcal{A}_k$, alors le nombre de composantes connexes de $\partial_i\Lambda$ est majoré par k+dim $(\mathcal{H}^1(\Omega))$.

Démonstration. Notons $\{\gamma_j\}_{j\in J}$ la famille des composantes connexes de $\partial_i\Lambda$. on peut lui asocier une famille de fonctions $\theta_j \in C^\infty(\Omega)$ telle que

$$\theta_j(x) = 1 \text{ si } d(x,\gamma_j) \leq \tfrac{1}{3} d(x, \partial_i\Lambda \setminus \gamma_j) \qquad \theta_j(x) = 0 \text{ si } d(x,\gamma_j) \geq \tfrac{2}{3} d(x, \partial_i\Lambda \setminus \gamma_j).$$

À chaque $u = (u_j) \in \mathbf{R}^J$, on associe la forme différentielle

$$\omega_u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Lambda, \\ \sum_{j\in J} u_j \, d\theta_j & \text{si } x \in \Omega \setminus \Lambda. \end{cases}$$

Ces formes ont clairement un recollement C^∞ aux frontières γ_j. L'application $\omega : u \mapsto \omega_u$ est linéaire continue de $\mathbf{R}^J$ dans ϑ_f ; la forme différentielle ω_u est exacte quand il existe une fonction f telle que $df - \omega_u = 0$; cela implique qu'il existe $k+1$ constantes $a_0, a_1, \ldots, a_k$ telles que $f = a_0$ dans Λ et $f - \sum_j u_j \theta_j = a_\ell$ dans Λ_ℓ, où $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r$ désignent les $r \leq k$ composantes connexes de $\Omega \setminus \{\Lambda \cup \partial_i\Lambda\}$. On en déduit alors par continuité sur γ_l que $u_j = a_0 - a_\ell$ (pour l'unique valeur de ℓ telle que $\partial_i\Lambda_\ell \supset \gamma_j$). On a donc $\dim(\{u \in \mathbf{R}^J ; \omega_u \in \vartheta_e\}) \leq r$; par le théorème sur les dimensions on en déduit $\mathrm{card}(J) \leq r+$ dim $\mathcal{H}^1(\Omega)$. ∎

Remarque. On obtient en particulier le résultat suivant : si Ω est un ouvert simplement connexe et si $\Lambda \in \mathcal{A}_1$ alors la frontière $\partial_i\Lambda$ est connexe.

Références.

[1] Thierry Aubin, Yan Yan Li, *On the best Sobolev inequality*, J. Math. Pures Appl., 78, (1999), p. 353-387 .
[2] Vladimir G. Maz'ja, *Sobolev Spaces*, (1985), Springer Verlag.
[3] N. Meyers & J. Serrin, *H=W*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, (1985), p. 1055-1056.