# Introduction aux équations aux dérivées partielles
**- - -**
**(présentation très sommaire de la théorie classique)**

Dans le cas particulier simple, où une seule variable $t$ est concernée, une équation aux dérivées partielles est en fait une équation différentielle ordinaire. Nous renvoyons pour l'étude aux cours correspondants. Regardons par exemple l'équation différentielle à coefficients constants du premier ordre

$$y'(t) + a\,y(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ sont donnés. Si on rajoute la condition initiale $y(0) = y_0$, elle admet une solution et une seule, qui est donnée par

$$y(t) = y_0\, e^{-t\,a} + \int_0^t e^{-(t-s)a} f(s)\, ds.$$

Cela se montre aisément en utilisant la méthode de variation de la constante (encore appelée principe de Duhamel)

## 1 Equations du premier ordre, linéaires, à coefficients constants

On regarde maintenant le problème à conditions initiales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j}(t,x) + a\,u(t,x) = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d, \\ \qquad\qquad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1}$$

Les données sont $\alpha \in \mathbb{R}^d$ (de composantes $\alpha_j$), $a \in \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ ; l'inconnue $u$ est recherchée dans $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$.

La résolution est simple. On effectue le changement de variables

$$y = x - t\,\alpha = \begin{pmatrix} x_1 - t\alpha_1 \\ \dots \\ x_d - t\alpha_d \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{c} v(t,y) = u(t, y + t\,\alpha) = u(t,x) \\ \\ g(t,y) = f(t, y + t\,\alpha). \end{array}$$

Le problème (1) devient alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,y) + a\,v(t,y) = g(t,y), \\ \qquad v(0,y) = u_0(y). \end{cases}$$

Pour chaque $y$ fixé on a une équation différentielle en $t$, linéaire à coefficients constants. Donc

$$v(t,y) = u_0(y)\, e^{-t\,a} + \int_0^t e^{-(t-s)a} g(s,y)\, ds.$$

et en revenant aux variables initiales

$$u(t,x) = u_0(x-t\alpha)\, e^{-t\,a} + \int_0^t e^{-(t-s)a} f(s, x-(t-x)\alpha)\, ds.$$

*Remarque. On a résolu notre problème en résolvant une équation différentielle sur chacune des droites $y = x - t\alpha =$ constante. Ces droites sont appelées les (droites) caractéristiques du problème. De manière un peu similaire, mais plus délicate, cette méthode se généralise aux problèmes linéaires à coefficients variables ; on a à résoudre des équations différentielles sur des courbes caractéristiques, elles-mêmes obtenues par solutions d'équations différentielles. Les problèmes non linéaires présentent des difficultés supplémentaires très intéressantes (solutions avec chocs, détente) que nous n'aborderons pas ici.*

# 2 Systèmes linéaires du premier ordre

## 2.1 Le système dit "des ondes"

On se donne un réel $c > 0$ et deux fonctions $u_0$ et $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$. On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad \text{muni des conditions initiales} \quad \begin{array}{l} u(0,x) = u_0(x), \\ v(0,x) = v_0(x). \end{array} \tag{2}$$

Le changement de fonctions $f = u + v$ et $g = u - v$ ramène le problème (2) à

$$\frac{\partial f}{\partial t} - c\,\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial t} + c\,\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad (+\ c.i.)$$

On applique les résultats du paragraphe précédent avec $\alpha = \pm c$, $a = 0$, $f = 0$, d'où
$f(t,x) = f(0, x+ct)$, $g(t,x) = g(0, x-ct)$, ce qui donne en revenant aux fonctions initiales

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}\big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\big) + \frac{1}{2}\big(v_0(x+ct) - v_0(x-ct)\big), \\ v(t,x) &= \frac{1}{2}\big(u_0(x+ct) - u_0(x-ct)\big) + \frac{1}{2}\big(v_0(x+ct) + v_0(x-ct)\big). \end{aligned}$$

*Remarques.*

- *$u_0$ et $v_0 \in C^k(\mathbb{R})$ entraînent $u$ et $v \in C^k(\mathbb{R}^2)$,*
- *Si $u$ et $v$ solutions de (2) sont de classe $C^2$, par un calcul simple on obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Cette dernière équation est appelée équations des cordes vibrantes ou encore équations des ondes sonores. Dans ce ernier cas, le nombre c correspond alors à la vitesse du son. Le principe de Huyghens est alors vérifié :*

  *sous l'hypothèse $v_0 = 0$, on a $u(t,x) = \frac{1}{2}\big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\big)$,*

  *autrement dit, en termes plus physiques, le son entendu au point $x$ à l'instant $t$ est la moyenne des sons émis à l'instant $0$ aux points distants de $x$ de la quantité $t\,c$.*
- *Il existe un cône de dépendance : les valeurs de $u(t,x)$ et de $v(t,x)$ pour $x \in [a,b]$ ne dépendent que des valeurs de $u_0(y)$ et $v_0(y)$ pour $y \in [a - tc, b + tc]$.*

### 2.2 Le système de Cauchy

On regarde maintenant le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Ce système est très semblable au précédent ; on peut l'écrire aussi sous la forme matricielle

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque ici que les valeurs propres de la matrice $A$ sont imaginaires. Cela implique que l'on ne peut pas trouver un changement de fonctions, similaire à celui du système des ondes, qui découple le problème.

*Remarque. Si $u$ et $v$ sont des solutions de (3) de classe $C^1$ dans un ouvert $\Omega$, et si on pose*

$$z = x + i\,y, \quad f(z) := u(x,y) + i\,v(x,y),$$

*la fonction $f$ vérifie les conditions de Cauchy. Elle est donc holomorphe dans cet ouvert, ce qui entraîne que les fonctions $f$, $u$, $v$ y sont analytiques. Notons aussi que les fonctions $u$ et $v$ sont harmoniques, i.e. $\Delta u = \Delta v = 0$. La situation pour le système de Cauchy est très différente de celle du sytème des ondes. Les solutions classiques sont toujours $C^\infty$ ; si on voulait imposer des données initiales elles devraient être analytiques...*

# 3 Équations aux dérivées partielles du second ordre

### 3.1 Un problème elliptique

On s'intéresse maintenant au problème : la fonction $f$ étant donnée, trouver $u$ vérifiant

$$-\Delta u = f, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d, \quad d = 2 \text{ ou } 3. \tag{4}$$

Remarquons d'abord que, sans condition supplémentaire, il n'y a pas unicité. Les polynômes 1, $x_1$, $x_2$, $x_1x_2$, $x_1^2 - x_2^2$, sont tous harmoniques, donc solutions de $\Delta p = 0$.

*Fontions holdériennes.* Soit $\alpha \in ]0,1[$ on définit l'espace des fonctions holdériennes d'ordre $\alpha$ sur $\mathbb{R}^d$ par

$$C^\alpha(\mathbb{R}^d) := \{\varphi \in C^0(\mathbb{R}^d)\,;\ \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^d} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty\},$$

et, si $m \in \mathbb{N}$,

$$C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d) := \{\varphi \in C^m(\mathbb{R}^d)\,;\ \text{les dérivées d'ordre } m \text{ de } \varphi \text{ appartiennent à } C^\alpha(\mathbb{R}^d)\}.$$

Nous introduisons maintenant les fonctions $G_2$ et $G_3$, qui sont appelée les solutions fondamentales du laplacien,

$$\begin{aligned} G_2(x) &= -\frac{1}{2\pi}\log|x|, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ G_3(x) &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^3, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Remarquons que $G_d \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. De plus un calcul simple montre que, pour $x \neq 0$, $\Delta G_d(x) = 0$.

**Théorème 1.** *On fait les hypothèses :* $\alpha > 0$, $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ *et le support de* $f$ *est compact. Si la dimension* $d$ *est égale à 2, on suppose de plus que* $\int_{\mathbb{R}^2} f(y)\,dy = 0$.

*Alors le problème (4) admet une solution unique vérifiant* $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ *et* $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$. *Cette solution est donnée par*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_d(x-y)\,f(y)\,dy. \tag{5}$$

*De plus on a* $u \in C^{\alpha+2}(\mathbb{R}^d)$ *lorsque* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *et* $u \in C^{\alpha+2-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$, *pour tout* $0 < \varepsilon < 2+\alpha$, *si* $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

*Démonstration partielle.* (Nous nous limiterons au cas $d = 3$, le cas $d = 2$ est laissé en exercice, nous admettrons les résultats de régularité $C^{\alpha+2}$, et supposerons pour simplifier que la fonction $f$ est $C^1$, i.e. $\alpha = 1$).

a) *Existence.* Nous allons montrer que la solution proposée en (5) convient. On note $K :=$ le support de $f$, $K_1 := \{y \in \mathbb{R}^3\,; d(y,K) \le 1\}$. La fonction $\mathbf{1}_E$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $E$. On utilisera la notation $G_{3,j}$ (resp. $f_j$)pour la dérivée partielle de $G_3$ (resp. $f$) par rapport à sa $j$-ième variable $G_{3,j}(x) = \frac{\partial G_3}{\partial x_j}(x)$. Enfin on pose

$$M_0 = \max_x |f(x)|, \quad M_1 = \max_x \max(|f_1(x)|, |f_2(x)|, |f_3(x)|).$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3$ fixé, dans ce qui suit on suppose que $|x-x_0| \le 1$, on aura donc $f(x-y) = 0$ pour tout $y \notin E_{0:=}x_0 - K_1$. En effectuant le changement de variables $y \to x-y$ dans (5) on obtient

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G_3(y)\,f(x-y)\,dy\,; \quad \text{notons que} \quad \big|G_3(y)\,f(x-y)\big| \le M_0\,G_3(y)\,\mathbf{1}_{E_0}(y).$$

L'intégrande étant continue en $x$ et dominée par une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que $u \in C^0(\mathbb{R}^3)$. Dérivant ensuite cette équation sous l'intégrale, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G_3(y)\,f_j(x-y)\,dy\,; \quad \text{avec} \quad \big|G_3(y)\,f_j(x-y)\big| \le M_1\,G_3(y)\,\mathbf{1}_{E_0}(y).$$

La domination $L^1$ justifie a posteriori cette dérivation, et on obtient ainsi $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$. En procédant de même, mais à partir de (5) on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{3,j}(y)\,f(x-y)\,dy\,; \quad \text{avec} \quad \big|G_{3,j}(y)\,f(x-y)\big| \le M_0\,G_{3,j}(y)\,\mathbf{1}_{E_0}(y).$$

Finalement, en dérivant encore une fois

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{3,j}(y)\,f_k(x-y)\,dy\,; \quad \text{avec} \quad \big|G_{3,j}(y)\,f_k(x-y)\big| \le M_1\,G_{3,j}(y)\,\mathbf{1}_{E_0}(y).$$

L'intégrande est toujours bornée par une fonction $L^1$, on a donc bien $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$.

On déduit des calculs qui précèdent

$$-\Delta u(x) \;\; = \;\; -\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} G_{3,j}(y)\,f_j(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^3} \Big( \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial G_3}{\partial y_j}(y)\,\frac{\partial f}{\partial y_j}(x-y) \Big)\,dy.$$

On introduit maintenant la couronne $\Omega_{\varepsilon,M} := \{y \in \mathbb{R}^3\,; \varepsilon < |y| < M\}$, $M$ sera choisi suffisamment grand pour que $E_0$ soit contenu dans la boule de centre 0 et de rayon $M$, on suppose $\varepsilon > 0$. On obtient alors, puisque l'intégrande précédente est nulle hors de $E_1$ et qu'elle appartient à $L^1$,

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_{\varepsilon,M}} \Big(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial G_3}{\partial y_j}(y)\, \frac{\partial f}{\partial y_j}(x-y)\Big)\, dy, \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_{\varepsilon,M}} \Big(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j}\big(\frac{\partial G_3}{\partial y_j}(y)\, f(x-y)\big)\Big)\, dy, \end{aligned}$$

(en utilisant que $\Delta G_3 = 0$ dans $\Omega_{\varepsilon,M}$).

*Rappel : la formule de Gauss.* Soit $\Omega$ un ouvert de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^d$, situé d'un seul côté par rapport à sa frontière $\partial\Omega$. Soit $y$ un point de $\partial\Omega$, on note $\vec{\nu}(y)$ le vecteur unitaire normal en $y$ à la frontière, orienté vers l'extérieur de $\Omega$, et on note $d\sigma(y)$ l'élément de surface ($d-1$ dimensionnel) sur cette frontière. Pour toute fonction $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ on a la relation

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}\big(\varphi(y)\big)\, dy = \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\, \nu_j(y)\, d\sigma(y), \qquad \text{où } \nu_j \text{ est la } j\text{-ième composante de } \nu.$$

La frontière de la couronne $\Omega_{\varepsilon,M}$ est formée de deux parties, la sphère de centre 0 et de rayon $M$, sur laquelle $f(x-y) = 0$, et la sphère de centre 0 et de rayon $\varepsilon$. Sur cette sphère on a

$$\vec{\nu}(y) = -\frac{y}{|y|}, \quad \nu_j(y) = -\frac{y_j}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial G_3}{\partial y_j} = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{y_j}{|y|^3} = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{y_j}{\varepsilon^3}.$$

L'application de la formule de Gauss nous donne donc

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega_{\varepsilon,M}} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial G_3}{\partial y_j}(y)\, \nu_j(y)\, f(x-y)\, d\sigma(y) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|=\varepsilon} \sum_{j=1}^{3} \frac{y_j^2}{4\,\pi\,\varepsilon^4}\, f(x-y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{4\,\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|y|=\varepsilon} f(x-y)\, d\sigma(y) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

b) *Comportement à l'infini.* Pour $|x|$ grand et $y \in K$ (donc borné) on a

$$|G_3(x-y)| = \frac{1}{4\pi\, |x-y|} \le \frac{C}{|x|},$$

donc, en reportant dans (5), $\qquad |u(x)| \le \dfrac{C}{|x|}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |f(y)|\, dy.$

Cela montre que $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. En dimension $d = 2$ on a seulement

$$|G_2(x-y)| - G_2(x)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\log\big(\frac{|x-y|}{|x|}\big)\Big| \le \frac{C}{|x|},$$

donc, en reportant dans (5), $\qquad u(x) = G_2(x)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(y)\, dy + O(\tfrac{1}{|x|}).$

On a encore $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$, grâce à l'hypothèse supplémentaire $\int f(y)\, dy = 0$.

d) *Unicité.* Rappelons pour cela la formule de la moyenne qui est vérifiée par les fonctions harmoniques. Notons $S_{d-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, $|S_{d-1}|$ sa mesure, $B(x, R_0)$ la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $R_0 > 0$. Soit $0 \le R < R_0$, on a

$$v \in C^2(B(x,R_0)), \ \text{ et } \Delta v = 0 \ \text{ dans } B(x,R_0) \implies v(x) = \frac{1}{|S_{d-1}|}\int_{S_{d-1}} v(x+R\,s)\, d\sigma(s).$$

*Sous-preuve.* En effet, posons $\varphi(R) := \frac{1}{|S_{d-1}|}\int_{S_{d-1}} v(x+R\,s)\,d\sigma(s)$. Il est clair que $\varphi \in C^2([0,R_0[)$ et $\varphi(0) = v(x)$. On a aussi

$$\varphi'(R) = \frac{1}{|S_{d-1}|}\int_{S_{d-1}} \sum_j \frac{\partial v}{\partial y_j}(x+R\,s)\,s_j\,d\sigma(s).$$

Remarquons que $s$ est le vecteur unitaire normal extérieurement à $\partial B(x,R)$ au point $y = x+Rs$, donc, en utilisant la formule de Gauss,

$$\begin{aligned} R^{d-1}\int_{S_{d-1}} \sum_j \frac{\partial v}{\partial y_j}(x+R\,s)\,s_j\,d\sigma(s) &= \int_{\partial B(x,R)} \sum_j \frac{\partial v}{\partial y_j}(y)\,\nu_j\,d\sigma(y) \\ &= \int_{B(x,R)} \sum_j \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2}(y)\,dy = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\varphi'(R) = 0$, d'où $\varphi(R) = \varphi(0) = v(x)$. □

D'après ce qui précède, si $v \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et $\Delta v = 0$, on a pour tout $x$ et tout $R$,

$$v(x) = \frac{1}{|S_{d-1}|}\int_{S_{d-1}} v(x+R\,s)\,d\sigma(s).$$

Si, de plus, $v(y) \to 0$ quand $|y| \to \infty$ on en déduit $v(x) = 0$ pour tout $x$ (en faisant tendre $R$ vers l'infini). Cela entraîne clairement l'unicité pour notre problème.

□

## 3.2 Problèmes du second ordre à coefficients constants

On regarde maintenant un problème un peu plus général : trouver $u$ vérifiant

$$-\sum_{i,j}^{d} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d, \quad d = 2 \text{ ou } 3. \tag{6}$$

Ici la fonction $f$ est donnée, ainsi que les coefficients $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice $d\times d$ correspondante ; elle est supposée symétrique : $a_{ij} = a_{ji}$. On lui associe la forme quadratique

$$(A\xi,\xi) = \sum_{i,j}^{d} a_{ij}\,\xi_i\xi_j.$$

On peut considérer quatre cas différents

- *La forme est définie positive* (Elle peut se décomposer en somme de $d$ carrés) Il existe alors un changement linéaire des variables

  $$y = B\,x, \quad v(y) = u(x), \quad g(y) = f(x),$$

  tel que (6) soit équivalent à $-\Delta v = g$ dans $\mathbb{R}^d$. On est donc ramené au paragraphe précédent.

  *Le problème est alors dit elliptique.* (Cette appellation provient de ce que les surfaces d'équations $(A\xi,\xi) = cste$ sont des ellipsoïdes).

- *La forme est définie négative.* On change alors $A$ en $-A$ et $f$ en $-f$, ce qui ne change pas le problème. On revient alors au cas précédent

  *On dit encore que problème est elliptique.*

- *La forme n'est ni dégénérée, ni définie positive ou négative.* Par un changement de variables approprié, on peut comme précédemment se ramener à

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= g, \quad \text{en dimension 2,} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} &= g, \quad \text{en dimension 3.}
\end{aligned}
$$

  *On dit alors que problème est hyperbolique.*

- *La forme est dégénérée.* On alors plusieurs types d'équations aux dérivées partielles, suivant les dégénérescences. Le plus étudié est celui de l'équation de la chaleur

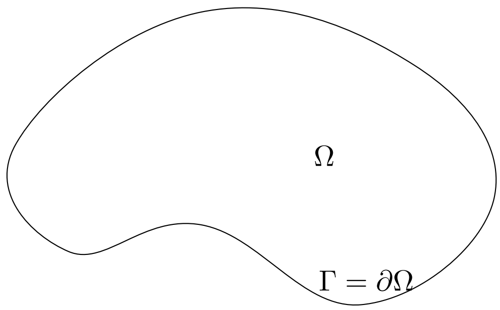
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f.$$

  *Le problème est alors appelé parabolique.*

Dans ce cours, nous n'étudierons que le premier cas.

# 4 Problèmes aux limites elliptiques du second ordre

**Le problème de Dirichlet**




$\Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^d$

$$
(P) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + a(x)\,u(x) = f(x), & \forall\, x \in \Omega, \\ \\ u(x) = g(x), & \forall\, x \in \partial\Omega. \end{cases}
$$

Les données sont $a$, $f$, $g$,
l'inconnue est la fonction $u$.

*Définition.* $C^\alpha(\overline{\Omega}) := \big(C^\alpha(\mathbb{R}^d)\big)\big|_{\overline{\Omega}}$ (ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

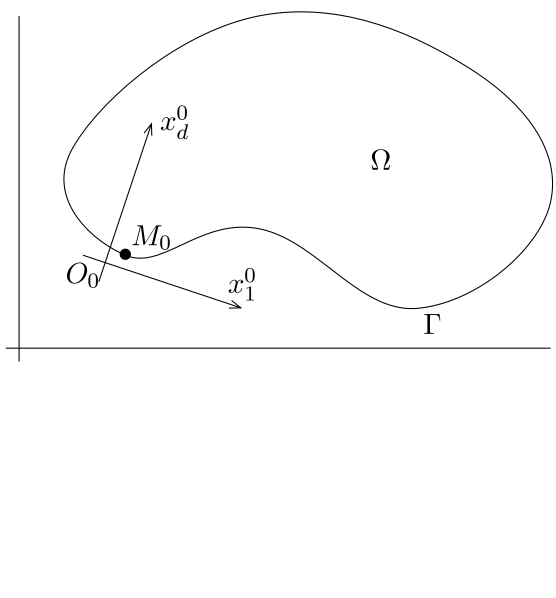
**Théorème 2.** *On fait les hypothèses : $\alpha > 0$, $a$ et $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $a(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \Omega$, et on suppose que $\Omega$ est un ouvert de classe $C^{\alpha+2}$. Alors le problème (P) admet une solution et une seule $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Si de plus $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors on a $u \in C^{\alpha+2}(\overline{\Omega})$.*

On dit que $\Omega$ est de classe $C^\alpha$ si, pour tout point $M_0$ de la frontière $\Gamma$ de $\Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_0$ de $M_0$, un système d'axes $\{O_0; x_1^0, \cdots, x_d^0\}$ et une fonction $a_0 \in C^\alpha(\mathbb{R}^{d-1})$ tels que :

$$\Gamma \cap \mathcal{V}_0 = \{x \in \mathcal{V}_0; x_d^0 = a_0(x_1^0, \cdots, x_{d-1}^0)\}$$

$$\Omega \cap \mathcal{V}_0 = \{x \in \mathcal{V}_0; x_d^0 > a_0(x_1^0, \cdots, x_{d-1}^0)\}$$

$$\bar{\Omega}^c \cap \mathcal{V}_0 = \{x \in \mathcal{V}_0; x_d^0 < a_0(x_1^0, \cdots, x_{d-1}^0)\}$$



On remarque que, si $\Omega$ est de classe $C^\alpha$, cela implique que $\Omega$ est situé localement d'un même côté par rapport à sa frontière $\Gamma$ .

Nous admettrons ce théorème (sauf l'unicité qui sera vue plus loin). La démonstration est basée sur des inégalités délicates, dues à Schauder.

**Le principe du maximum.**

Pour une fonction $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, on définit $(\mathcal{L}v)(x) := -\Delta v(x) + a(x)\, v(x)$.

**Théorème 3.** *Soit $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Alors on a*

$$(\mathcal{L}v)(x) \leq 0,\ \forall\, x \in \Omega \quad\Longrightarrow\quad v(x) \leq \max\big(0, \max_{y \in \partial\Omega} v(y)\big),\ \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

*(Autrement dit, lorsque le maximum est $> 0$, il est atteint sur la frontière)*

*Démonstration.* Posons $v_\varepsilon(x) = v(x) - \varepsilon(R^2 - |x|^2)$, avec $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_d^2$, $\varepsilon > 0$ et $R = \max_{x \in \overline{\Omega}} |x|$. On a alors $(\mathcal{L}v_\varepsilon)(x) = (\mathcal{L}v)(x) - 2d\varepsilon - \varepsilon\, a\,(R^2 - |x|^2) < 0$ dans $\Omega$.
La fonction $v_\varepsilon$ étant continue sur le compact $\overline{\Omega}$, elle y atteint son maximum en un point $c$. Si on suppose qu'en ce point on a

$$v_\varepsilon(c) = \max_{x \in \overline{\Omega}} v_\varepsilon(x) > \max\big(0, \max_{y \in \partial\Omega} v_\varepsilon(y)\big),$$

on en déduit $v_\varepsilon(c) > 0$ et $c \in \Omega$ ; ainsi on est en un maximum pour un point intérieur. La formule de Taylor, utilisée à l'ordre 2 au voisinage d'un tel point, montre que $\partial_{x_j} v_\varepsilon(c) = 0$ et $\partial^2_{x_j x_j} v_\varepsilon(c) \leq 0$, pour tout $j$, donc $\Delta v(c) \leq 0$. Par ailleurs on a $\Delta v_\varepsilon(c) = a(c)\, v_\varepsilon(c) - (\mathcal{L}v_\varepsilon)(c) > 0$, d'où une contradiction. On a ainsi montré que

$$v_\varepsilon(x) \leq \max\big(0, \max_{y \in \partial\Omega} v_\varepsilon(y)\big),\ \forall\, x \in \overline{\Omega},\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Le théorème s'obtient alors par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

□

**Corollaire 4.** *La solution $u$ du problème $(P)$ vérifie*

$$\forall x \in \Omega, \qquad |u(x)| \leq \frac{R^2 - |x|^2}{2d} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

*La solution du problème $(P)$ est donc unique.*

*Proof.* Posons $w(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2d} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, on a alors

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}(u - w))(x) &= f(x) - \|f\|_\infty - a(x)\, w(x) \leq 0, \text{ dans } \Omega, \quad u - w \leq 0, \text{ sur } \partial\Omega, \\
(\mathcal{L}(-u - w))(x) &= -f(x) - \|f\|_\infty - a(x)\, w(x) \leq 0, \text{ dans } \Omega, \quad -u - w \leq 0, \text{ sur } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

On déduit du théorème précédent $u - w \leq 0$ et$-u - w \leq 0$ dans $\overline{\Omega}$, d'où $|u| \leq w$.

Il découle de cette majoration que $f = 0$ et $g = 0$ entraîne $u = 0$. Le problème étant linéaire, on en déduit l'unicité.

□