Compléments d'Analyse

1 Une famille régularisante

On sait que la fonction a définie par : $a(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ si $x > 0$ et $a(x) = 0$ si $x \leq 0$, appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$; il en résulte que la fonction b, définie par : $b(x) = a(1 - x_1^2 - \cdots - x_d^2)$, pour $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$, appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$; de plus b est positive ou nulle et a pour support la boule unité de $\mathbb{R}^d$. Considérons maintenant, pour $\varepsilon > 0$, la famille de fonctions

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{b(x/\varepsilon)}{\int_{\mathbf{R}^d} b(y/\varepsilon)\ dy}; \tag{1}$$

cette famille vérifie les propriétés

$$\begin{cases} \text{support de } \theta_\varepsilon \ = \ \text{boule de } \mathbb{R}^d \text{ de centre } 0 \text{ et de rayon } \varepsilon \\ \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta_\varepsilon(x) \geq 0, \quad \theta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \\ \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \theta_\varepsilon(x) dx = 1. \end{cases}$$

Nous dirons qu'une telle famille de fonctions est une famille régularisante. En effet

Théorème 1. *a) On suppose que la fonction f est continue ; alors $f * \theta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$; de plus, si f est à support compact, $f * \theta_\varepsilon$ est aussi à support compact et on a*

$f * \theta_\varepsilon$ converge uniformément vers f dans $\mathbb{R}^d$.

b) On suppose que $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq +\infty$; alors $g * \theta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$; lorsque de plus $p < +\infty$, on a

$g * \theta_\varepsilon$ converge vers g dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. L'appartenance à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est un exercice d'application des théorèmes de Lebesgue. Il est clair que, si le support de f est contenu dans une boule de rayon R, le support de $f * \theta_\varepsilon$ est contenu dans une boule de même centre et de rayon $R + \varepsilon$.

a) Si f est continue à support compact, alors f est uniformément continue, donc

$$\forall\, \eta > 0, \exists\ \varepsilon_0 > 0 \ \text{ tel que } |x - y| \leq \varepsilon_0 \quad \text{implique } |f(x) - f(y)| \leq \eta,$$

en remarquant que $\int \theta_\varepsilon(x-y)\, dy = 1$, on en déduit, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$|f(x) - (f * \theta_\varepsilon)(x)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - f(y))\theta_\varepsilon(x-y)\, dy \Big| \leq \eta,$$

d'où la convergence uniforme.

b) On utilise les deux résultats suivants de la théorie de l'intégration :

- L'ensemble $C_0^0(\mathbb{R}^d)$, des fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}^d$, est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, lorsque $1 \leq p < +\infty$.

- Si $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $g * h \in L^p(\mathbb{R}^d)$, et $\|g * h\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \ \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.

On a ici en particulier $\theta_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|\theta_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$. Soit $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$; pour $f \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \|g * \theta_\varepsilon - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leq \|(g-f) * \theta\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|f * \theta_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|f * \theta_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + 2\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

On déduit la convergence de $g * \theta_\varepsilon$ vers g de la densité de $C_0^0(\mathbb{R}^d)$ et du a). $\square$

2 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$; nous noterons par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ dont le support est un compact K contenu dans Ω , et $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ = l'ensemble des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.
Exemples. Les fonctions b et $\theta_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 2. *Soit K un compact, Ω un ouvert tel que $K \subset \Omega$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ sur K.*

Démonstration. Soit α = distance (K, Ω^c) et $0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{2}$ si $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, ($\varepsilon > 0$ quelconque si $\Omega = \mathbb{R}^d$) ; $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d;\ d(x, K) \leq \varepsilon\}$; on pose $\varphi_\varepsilon(x) = \int_{K_\varepsilon} \theta_\varepsilon(x-y)\ dy$; il est clair que $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi_\varepsilon \geq 0$; de plus $\varphi_\varepsilon(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \theta_\varepsilon(x-y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^d} \theta_\varepsilon(x)\ dx = 1$. Si $x \in K$, on a $\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \theta_\varepsilon(x-y)\ dy = 1$, car $\forall y \notin K_\varepsilon, \theta_\varepsilon(x-y) = 0$; si $x \notin K_{2\varepsilon}$, $\forall y \in K_\varepsilon$, $\theta_\varepsilon(x-y) = 0$ car $d(x,y) \geq \varepsilon$ donc le support de φ_ε est contenu dans $K_{2\varepsilon}$. Il est donc compact et φ_ε convient.

$\square$

Corollaire 3. *Si f est mesurable (pour la mesure de Lebesgue) et si, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f\varphi = 0$ presque partout, alors $f = 0$ presque partout dans Ω.*

Lemme 4. *Si f est localement intégrable dans Ω et si , $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\int_\Omega f\varphi\ dx = 0$, alors $f = 0$ presque partout dans Ω.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; on a alors $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $h_\varepsilon(x) = \int_\Omega f(y)\varphi(y)\theta_\varepsilon(x-y)dy = 0$, puisque $\varphi(.)\theta_\varepsilon(x - .) \in \mathcal{D}(\Omega)$; prolongeons $f\varphi$ par 0 dans Ω^c , on a ainsi $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $h_\varepsilon = f\varphi * \theta_\varepsilon = 0$ tend vers $f\varphi$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, d'où $f\varphi = 0$ dans $\mathbb{R}^d$ et par suite, φ étant arbitaire, $f = 0$ dans Ω.

$\square$

Notation. Soit $j = (j_1, ..., j_d) \in \mathbb{N}^d$ un multientier ; on notera

$$\partial^j \varphi = \frac{\partial^{|j|}\varphi}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_d^{j_d}}, \qquad \text{avec } |j| = j_1 + j_2 + ... + j_d,$$

la dérivée partielle prise j_1 fois en x_1, ... , j_d fois en x_d de la fonction φ. L'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel, nous le munirons de la *pseudo-topologie* suivante

On dira que la suite φ_n converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ ssi :
il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que, $\forall n$, support(φ_n)$\subset K$,
et si, pour tout multientier j, $\partial^j \varphi_n$ converge uniformément vers $\partial^j \varphi$ dans Ω.

3 L'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition. On appelle distribution T sur Ω toute forme linéaire

$$T \ : \quad \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle \qquad \text{de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } \mathbb{R}$$

telle que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un entier k et une constante C tels que

$$\forall \varphi \text{ avec support}(\varphi) \subset K, \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \ \max\{\| \partial^j \varphi\|_{L^\infty(\Omega)}; |j| \leq k\}.$$

(Remarquons que k et C peuvent dépendre de K.)

Exemple 1. La masse de Dirac. Soit a un point de Ω, la forme linéaire :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a),$$

définit une distribution sur Ω ; (il suffit de prendre $k = 0$ et $C = 1$).

Exemple 2. Soit f une fonction localement intégrable dans Ω, la forme linéaire

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

définit une distribution sur Ω ; (il suffit de prendre $k = 0$ et $C = \int_K |f(x)|\, dx$).

Remarquons que l'application $f \mapsto T_f$ est linéaire et, d'après le lemme 4, injective de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; cela nous permet d'identifier $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ avec $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Désormais, on n'utilisera plus pour cette distribution la notation T_f, mais seulement f. On écrira indifféremment $\langle f, \varphi \rangle$ ou $\int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx$. On a ainsi $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, et en particulier (puisque $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$) on a $L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Rappelons aussi que l'application $f \mapsto \dot{f}$ qui à une fonction $f \in C^0(\Omega)$ associe sa classe $\dot{f}$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout" est aussi linéaire et injective. On identifie f et sa classe (et on garde la notation f). On a ainsi

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset C^k(\Omega) \subset C^0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Les fonctions continues sont donc des distributions.

Dérivation des distributions

Définition. Soit j un multientier. On appelle dérivée partielle j-ième de la distribution T, la distribution $\partial^j T$ définie par

$$\langle \partial^j T, \varphi \rangle = (-1)^{|j|} \langle T, \partial^j \varphi \rangle.$$

C'est un exercice facile de vérifier que l'on a bien défini ainsi une distribution. D'autre part on a clairement

$$\partial^{j+k} T = \partial^j(\partial^k T) = \partial^k(\partial^j T),$$

Les distributions sont ainsi indéfiniment dérivable, et l'ordre des dérivations est indifférent.

Remarque. On a vu que si $f \in C^1(\Omega)$, alors f était aussi une distribution. Notons par $\frac{\partial}{\partial x_j}$ la dérivée partielle prise au sens classique des fonctions. En remarquant que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi)\, dx = 0$; on en déduit

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, \varphi\, dx = -\int_\Omega f\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx,$$

formule qui correspond exactement à la définition de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ en tant que dérivée au sens des distributions. On montre de même que, si $f \in C^k(\Omega)$ les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k, prises au sens classique, et prises au sens des distributions, coïncident.

Notons que, sans hypothèse de continuité sur les dérivées partielles, les sens classiques (définitions ponctuelles), et celui des distributions (action sur une fonction φ) peuvent être différents. En effet on connaît des exemples de fonctions pour lesquelles, prises au sens classique, les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ existent et diffèrent, cela ne peut être le cas au sens des distributions.

Convergence des distributions

Définition. On dira que la suite de distributions T_n converge vers la distribution T ssi

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \text{dans } \mathbb{R},$$

on dira alors que $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Remarque. On a clairement $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ entraîne $\partial^j T_n \to \partial^j T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; ainsi la dérivation est une opération continue dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On vérifie aussi, assez facilement, que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, entraîne $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lemme 5. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction vérifiant $\int_\Omega \varphi(x)\,dx = 0$. Alors, si Ω est connexe, il existe $\vec{u} \in (\mathcal{D}(\Omega))^d$ tel que* div $\vec{u} = \varphi$.

Démonstration. Le cas $d = 1$ est très facile, et laissé en exercice. Pour éviter une lourdeur des notations, on ne regardera que le cas $d = 2$, mais la généralisation est sans difficulté.

Étape 1. Cas où le support de φ est contenu dans $\overline{R} \subset \Omega$, avec $R =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$ rectangle à côtés parallèles aux axes.

On choisit $\theta \in \mathcal{D}(]a_2, b_2[)$ tel que $\int_{a_2}^{b_2} \theta(y)\,dy = 1$; on pose alors

$$\psi_1(x_1, x_2) = \theta(x_2) \int_{a_2}^{b_2} \varphi(x_1, t)\,dt, \qquad \psi_2 = \varphi - \psi_1.$$

On vérifie facilement que les supports de ψ_1 et ψ_2 sont contenus dans $\overline{R}$ et

$$\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \qquad \int_{a_1}^{b_1} \psi_1(x, x_2)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{a_2}^{b_2} \psi_2(x_1, y)\,dy = 0.$$

On pose ensuite

$$u_1(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} \psi_1(x, x_2)\,dx \quad \left(= \int_{b_1}^{x_1} \psi_1(x, x_2)\,dx\right)$$
$$u_2(x_1, x_2) = \int_{a_2}^{x_2} \psi_2(x_1, y)\,dy \quad \left(= \int_{b_2}^{x_2} \psi_2(x_1, y)\,dy\right).$$

Il est clair aussi que u_1 et u_2 ont des supports contenus dans $\overline{R}$, que u_1 et $u_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et que $\operatorname{div} \vec{u} = \psi_1 + \psi_2 = \varphi$.

Étape 2. Cas où le support de φ est contenu dans $\overline{S} \cup \overline{R} \subset \Omega$, où R et S sont deux rectangles ouverts, à côtés parallèles aux axes, tels que $R \cap S \neq \emptyset$.

On peut trouver des rectangles R_1, R_2 tels que $\overline{S} \subset R_1 \subset \overline{R_1} \subset \Omega$ et $\overline{R} \subset R_2 \subset \overline{R_2} \subset \Omega$. On pose $R_3 = S \cap R$. Il existe alors des fonctions $\eta_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2, 3$, vérifiant

$$\eta_j > 0 \text{ dans } R_j, \quad \eta_j = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus R_j \quad \text{et} \quad \int_{R_j} \eta_j(x)\,dx = 1.$$

On pose alors

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta_1\,\varphi}{\eta_1+\eta_2} & \text{si } \eta_1+\eta_2>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \qquad \psi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta_2\,\varphi}{\eta_1+\eta_2} & \text{si } \eta_1+\eta_2>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\alpha = \int_\Omega \psi_1(x)\,dx, \qquad \varphi_1 = \psi_1 - \alpha\eta_3, \qquad \varphi_2 = \psi_2 + \alpha\eta_3.$$

Il est clair que

$$\varphi_1+\varphi_2 = \psi_1+\psi_2 = \varphi, \quad \int_\Omega \varphi_1(x)\,dx = 0, \quad \int_\Omega \varphi_2(x)\,dx = \int_\Omega \varphi\,dx - \int_\Omega \varphi_1(x)\,dx = 0.$$

On remarque que les supports de ψ_1 et ψ_2 sont contenus respectivement dans $\overline{R}_1$ et $\overline{R}_2$. On a aussi $\psi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, en effet cela est évident aux points $x \notin$ support de φ, car alors $\psi_1 = 0$ au voisinage de x. Pour les points x du support de φ, on a $x \in R_1 \cup R_2$, donc $\eta_1+\eta_2 > 0$; le dénominateur étant non nul, on conclut que ψ_1 est C^∞ au voisinage de x. De même on montre que $\psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

On déduit alors du a) l'existence de $\vec{v}$ et $\vec{w} \in \mathcal{D}(\Omega)$ tels que $\operatorname{div}\vec{v} = \varphi_1$ et $\operatorname{div}\vec{w} = \varphi_1$. En posant $\vec{u} = \vec{v}+\vec{w}$, on obtient $\operatorname{div}\vec{u} = \varphi$.

Étape 3. Le cas général La compacité du support de φ et la connexité de Ω permet de trouver S et R tels que : le support de φ est contenu dans $\overline{S}\cup\overline{R} \subset \Omega$, $R\cap S \neq \emptyset$, S est une réunion finie de rectangles ouverts à côtés parallèles aux axes, S est connexe et R est un rectangle ouvert à côtés parallèles aux axes. La démonstration se fait alors de manière tout à fait similaire à celle de l'étape précédente par récurrence sur le nombre de rectangles constituant S.

□

Remarque. Soit $K \subset \Omega$ un compact. La construction ci-dessus peut être la même pour toutes les fonctions φ à support contenu dans K. Un examen attentif de la démonstration montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver une constante $C(k,K)$, ne dépendant que de k et K, telle que

$$\max_{|j|\le k}\left(\|\partial^j u_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\partial^j u_2\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \le C_k \max_{|j|\le k}\|\partial^j\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Corollaire 6. *On suppose que l'ouvert Ω est connexe et que la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifie $\partial^j T = 0$, pour tout multi-entier j avec $|j| = k+1$. Alors la distribution T est un polynôme de degré $\le k$ sur Ω.*

Démonstration. Il suffit de la faire pour $k = 0$, le cas général s'en déduisant ensuite par récurrence. On remarque d'abord que, si $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifie $\int_\Omega \psi\,dx = 0$, alors

$$\langle T, \psi\rangle = \langle T, \operatorname{div}\vec{u}\rangle = -\sum_{j=1}^d \langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, u_j\rangle = 0.$$

Soit maintenant $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ fixé tel que $\int_\Omega \theta\,dx = 1$, et $a := \langle T,\theta\rangle \in \mathbb{R}$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on pose $\psi(x) := \varphi(x) - \int_\Omega \varphi(y)\,dy\ \theta(x)$. On a donc $\int_\Omega \psi\,dx = 0$, d'où

$$0 = \langle T,\psi\rangle = \langle T,\varphi\rangle - \int_\Omega \varphi(y)\,dy\ \langle T,\theta\rangle = \langle T,\varphi\rangle - \langle a,\varphi\rangle,$$

ce qui prouve que $T = a$ =constante. □

4 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$; on définit (les dérivées ci-dessous étant prises au sens des distributions sur Ω)

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ ; \ \forall j \text{ avec } |j| \leq m, \ \partial^j u \in L^p(\Omega)\};$$

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = (\sum_{|j|\leq m} \|\partial^j u\|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p} \ ; \ |u|_{m,p,\Omega} = (\sum_{|j|=m} \|\partial^j u\|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p};$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|j|\leq m} \|\partial^j u\|_{L^\infty(\Omega)} \ ; \ |u|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|j|=m} \|\partial^j u\|_{L^\infty(\Omega)};$$

Pour $p \neq +\infty$,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } W^{m,p}(\Omega).$$

Le cas particulier "$p = 2$" a une très grande importance, on utilisera alors des notations spécifiques :

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega); \quad H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega);$$

$$\|u\|_{m,\Omega} = \|u\|_{m,2,\Omega}; \quad |u|_{m,\Omega} = |u|_{m,2,\Omega};$$

$$((u,v))_{m,\Omega} = \sum_{|j|\leq m} \int_\Omega \partial^j u \ \partial^j v \ dx; \qquad (u,v)_{m,\Omega} = \sum_{|j|=m} \int_\Omega \partial^j u \ \partial^j v \ dx.$$

Théorème 7. *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$, muni de la norme $\| \,.\, \|_{m,p,\Omega}$, est un espace de Banach ; l'ensemble $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $((.,.))_{m,\Omega}$.*

Démonstration. Soit u_n une suite de Cauchy dans $W^{m,p}(\Omega)$; alors, pour tout j avec $|j| \leq m$, $\partial^j u_n$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ donc il existe $g_j \in L^p(\Omega)$ tel que $\partial^j u_n \to g_j$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. On a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \partial^j u_n \, \varphi \ dx = (-1)^{|j|} \int_\Omega u_n \, \partial^j \varphi \ dx,$$

d'où, par passage à la limite,

$$\int_\Omega g_j \, \varphi \ dx = (-1)^{|j|} \int_\Omega g_0 \, \partial^j \varphi \ dx,$$

ce qui montre que $\partial_j g_0 = g_j$ au sens des distributions ; donc $g_0 \in W^{m,p}(\Omega)$ et

$$\|u_n - g_0\|_{m,p,\Omega} = (\sum_{|j|\leq m} \|\partial^j u_n - g_j\|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p} \ \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Nous avons ainsi montré que $W^{m,p}(\Omega)$ est complet ; donc $W^{m,p}(\Omega)$ est bien un espace de Banach et, si $p = 2$, un espace de Hilbert.

□

Travailler sur des fonctions de $L^p(\Omega)$ et des dérivées au sens des distributions est assez délicat ; le théorème suivant permet de se ramener, pour beaucoup de problèmes, à ne travailler que sur des fonctions régulières, puis à procéder ensuite à un passage à la limite.

Théorème 8. *Si Ω est fortement étoilé par rapport à un de ses points, ou si Ω est de classe C^0, $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.*

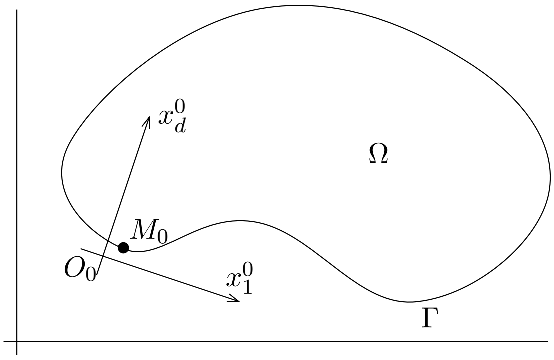
Définitions. On dit que Ω est fortement étoilé par rapport au point $M \in \Omega$ si, $\forall P \in \bar{\Omega}$ et $\forall \lambda \in]1, +\infty[$, on a $M + \lambda^{-1}\vec{MP} \in \Omega$.

On dit que Ω est de classe C^k , (resp. $C^{k,1}$) , si pour tout point M_0 de la frontière Γ de Ω , il existe un voisinage $\mathcal{V}_0$ de M_0 , un système d'axes $\{O_0; x_1^0, \cdots, x_d^0\}$ et une fonction $a_0 \in C^k(\mathbb{R}^{d-1})$ (resp. $C^{k,1}$) tels que :

$$\Gamma \cap \mathcal{V}_0 = \{x \in \mathcal{V}_0; x_d^0 = a_0(x_1^0, \cdots, x_{d-1}^0)\}$$

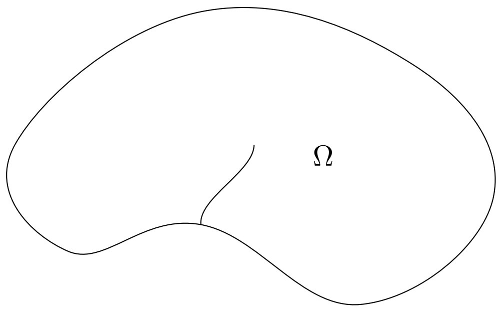
$$\Omega \cap \mathcal{V}_0 = \{x \in \mathcal{V}_0; x_d^0 > a_0(x_1^0, \cdots, x_{d-1}^0)\}$$

$$\bar{\Omega}^c \cap \mathcal{V}_0 = \{x \in \mathcal{V}_0; x_d^0 < a_0(x_1^0, \cdots, x_{d-1}^0)\}$$



On remarque que, si Ω est de classe C^k ou $C^{k,1}$, cela implique que Ω est situé localement d'un même côté par rapport à sa frontière Γ .

Exemple d'ouvert où $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$: l'ouvert ci-dessous qui présente une fissure.



La démonstration du théorème 7, comme celle du suivant est assez longue, elles sont données en annexe dans le paragraphe 10 de ce cours, dans le cas où l'ouvert Ω est étoilé. Remarquons en particulier que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, (si $p \neq +\infty$) ; donc $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^d) = W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 9. *Si Ω est de classe C^0, ou si Ω est fortement étoilé par rapport à un de ses points, on a*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega); \tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)\},$$

où $\tilde{u}$ désigne le prolongement de u par 0 en dehors de Ω.

5 Approximation polynomiale. Compacité

Lemme 10. *Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $1 \le p \le +\infty$, l'opérateur Λ défini par*

$$(\Lambda a)(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_0^1 a((1-t)x+ty)|x-y| \; dt\, dy,$$

vérifie la majoration $\|\Lambda\|_{L^p(\Omega)\to L^p(\Omega)} \le h_\Omega$, où h_Ω désigne le diamètre de Ω.

Démonstration. a) Le cas $p = +\infty$ est évident. Montrons ce résultat pour $p = 1$. On a

$$(\Lambda a)(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 a((1-t)x+ty)\, \mathbf{1}_\Omega(y)|x-y| \; dt\, dy$$

d'où, en effectuant le changement de variables $(t, y) \to (t, u)$, avec $u = (1-t)x+ty$,

$$(\Lambda a)(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 a(u)\, \mathbf{1}_\Omega(u - \tfrac{1-t}{t}(x-u)) \tfrac{|x-u|}{t^3} \; dt\, du = \tfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega a(u)\; b(x,u)\, du, \tag{2}$$

en posant $\quad b(x,u) = \displaystyle\int_0^1 \mathbf{1}_\Omega(u - \tfrac{1-t}{t}(x-u)) \frac{|x-u|}{t^3} \; dt,$

et en notant que $b(x, u) = 0$ si $u \notin \Omega$. Posons $r\, e^{i\theta} \equiv (r\cos\theta, r\sin\theta) = x - u$; à $u \in \Omega$ fixé, les points de Ω sont donc représentés en coordonnées polaires par $\Omega = \{u + re^{i\theta}; 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le r < \rho_u(\theta)\}$. On remarque ensuite que

$$u - \tfrac{1-t}{t}(x-u)) \in \Omega \iff 0 \le \tfrac{1-t}{t}\, r < \rho_u(\theta+\pi) \iff \frac{r}{r + \rho(\theta+\pi)} < t < 1,$$

On a donc, si $u \in \Omega$,

$$b(x,u) = \int_{\frac{r}{r+\rho(\theta+\pi)}}^1 \frac{r}{t^3}\; dt = \frac{1}{2\,r} \left(\rho_u(\theta+\pi)^2 + 2r\, \rho_u(\theta+\pi)\right),$$

d'où l'on déduit, en majorant $\rho(\theta)+\rho(\theta+\pi)$ par h_Ω,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |b(x,u)|\, dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\theta)} b(x,u)\, r\, dr\, d\theta = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\rho(\theta)+\rho(\theta+\pi))\rho(\theta)\rho(\theta+\pi)\, d\theta \\ &\le \tfrac{h_\Omega}{2} \int_0^{2\pi} \rho(\theta)\rho(\theta+\pi)\, d\theta \le \tfrac{h_\Omega}{4} \int_0^{2\pi} (\rho^2(\theta) + \rho^2(\theta+\pi))\, d\theta = h_\Omega\, |\Omega|. \end{aligned}$$

En reportant dans (2), on obtient

$$\|\Lambda a\|_{L^1(\Omega)} \le \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |a(u)| \int_\Omega |b(x,u)|\, dx\, du \le h_\Omega \, \|a\|_{L^1(\Omega)}.$$

b) Regardons maintenant le cas $1 < p < +\infty$. On rappelle que, avec l'exposant conjugué $p' = \frac{p}{p-1}$, on a

$$\|\Lambda a\|_{L^p(\Omega)} = \max\{\int_\Omega (\Lambda a)(x)\, v(x)\, dx \;;\; \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \le 1\}.$$

Or on a

$$\int_\Omega (\Lambda a)(x)\, v(x)\, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_\Omega \int_0^1 a((1-t)x+ty)\, |x-y|\; v(x)\; dt\, dy\, dx,$$

d'où, par l'inégalité de Hölder,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (\Lambda a)(x)\, v(x)\, dx \quad &\le \quad \Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\int_\Omega\int_0^1 |x-y|\,|v(x)|^{p'}\; dt\, dy\, dx\Big)^{1/p'} \\
&\qquad \times \Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\int_\Omega\int_0^1 |a((1-t)x+ty)|^p\,|x-y|\; dt\, dy\, dx\Big)^{1/p} \\
&\le \quad \Big(\int_\Omega (\Lambda 1)(x)\,|v(x)|^{p'} dx\Big)^{1/p'} \Big(\|\Lambda(|a|^p)\|_{L^1(\Omega)}\Big)^{1/p} \\
\text{(en utilisant le a))} \qquad &\le \quad \big(h_\Omega\, \|v\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}\big)^{1/p'} \big(h_\Omega\, \|a^p\|_{L^1(\Omega)}\big)^{1/p} = h_\Omega\, \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}\, \|a\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

On a donc montré, pour tout $a \in L^p(\Omega)$,

$$\|\Lambda a\|_{L^p(\Omega)} \le h_\Omega\, \|a\|_{L^p(\Omega)}.$$

$\square$

Théorème 11. *Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^d$, $d \le 3$, $1 \le p \le +\infty$, h_Ω le diamètre de Ω, on a*

$$\forall\, f \in W^{1,p}(\Omega), \|f - T_0 f\|_{L^p(\Omega)} \le h_\Omega \|Df\|_{L^p(\Omega)},$$

où $T_0 f$ désigne la valeur moyenne de f sur Ω.

Démonstration. (Nous nous limiterons au cas $d = 2$). Supposons la majoration montrée pour tout $f \in \mathcal{D}(\bar\Omega)$; si $p \ne +\infty$, le théorème en résulte en prenant une suite $f_n \in \mathcal{D}(\bar\Omega)$ qui converge vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et en passant à la limite dans l'inégalité quand $n \to +\infty$. Pour $p = +\infty$, on remarque que, si $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$, alors $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $\forall p$; on obtient le résultat en utilisant le fait que $\lim_{p\to\infty} \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Regardons maintenant le cas où $f \in \mathcal{D}(\bar\Omega)$. En utilisant la formule de Taylor, on obtient

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 (Df((1-t)x+ty).(x-y)\; dt\; dy,$$

d'où, en intégrant en y sur Ω, puis en divisant par la mesure $|\Omega|$ de cet ouvert.

$$(f - T_0 f)(x) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\int_0^1 (Df((1-t)x+ty).(x-y)\; dt\; dy$$

En posant $a(x) = |Df(x)|$ et en utilisant la notation du lemme précédent, on en déduit la majoration $|(f - T_0 f)| \le \Lambda a$. Le résultat résulte alors de l'estimation $\|\Lambda a\|_{L^p(\Omega)} \le h_\Omega \|a\|_{L^p(\Omega)}$. $\square$

Plus généralement on a le

Théorème 12. *Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^d$, $d \le 3$, $1 \le p \le +\infty$ et $k \in \mathbb{N}$; pour $f \in W^{k+1,p}(\Omega)$ on note $T_k f$ le polynôme $\in \mathbb{P}_k$ défini par*

$$(T_k f)(x) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega [f(y) + Df(y)(x-y) + \cdots + \frac{1}{k!}D^k f(y)(x-y)^k]\; dy.$$

Alors on a

$$\forall\ 0 \le \ell \le k+1-d, \qquad \|D^\ell(f - T_k f)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{h_\Omega^{k+1-\ell}}{(k+1-\ell)!}\frac{1}{|\Omega|}\|D^{k+1}f\|_{L^1(\Omega)},$$

et

$$\forall\ 0 \le \ell \le k+1, \qquad \|D^\ell(f - T_k f)\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{h_\Omega^{k+1-\ell}}{(k+1-\ell)!}\|D^{k+1}f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Démonstration. Comme précédemment il suffit de regarder le cas où $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Précisons d'abord les notations : pour $u \in \mathbb{R}^d$, $|u| = (u_1^2 + \cdots + u_d^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne usuelle et

$$|D^\ell f(x)| = \max\{|D^\ell f(x)(u)^k|; u \in \mathbb{R}^d,\ |u| \leq 1\}, \quad \|D^\ell f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |D^\ell f(x)|^p\, dx\Big)^{1/p}.$$

a) Montrons la première inégalité avec $\ell = 0$ dans le cas $d = 2$. Pour cela on remarque que, pour $x \in \Omega$ fixé,

$$\begin{aligned} |\Omega|(f - T_k f)(x) &= \int_\Omega (f(x) - f(y) + Df(y)(x-y) + \cdots + \frac{1}{k!} D^k f(y)(x-y)^k)\ dy \\ &= \int_\Omega \int_0^1 \frac{t^k}{k!} D^{k+1} f(x + t(y-x))(x-y)^{k+1}\ dt\, dy. \end{aligned}$$

On pose maintenant $b(x) = |D^{k+1} f(x)|$ et $y = x + re^{i\theta}$. Soit $x + \rho(\theta)e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, l'écriture en coordonnées polaires de centre x de l'équation de la frontière de Ω on en déduit

$$\begin{aligned} |\Omega|\,|(f - T_k f(x)| &\leq \frac{1}{k!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\theta)} \int_0^1 t^k\, b(x + tre^{i\theta})\, r^{k+1}\ dt\, r dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\theta)} \int_0^s s^k\, b(x + se^{i\theta})\ ds\, r dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\theta)} s^k\, b(x + se^{i\theta}) \frac{\rho(\theta)^2 - s^2}{2}\ ds\, d\theta. \end{aligned}$$

En remarquant que $(k+1)\, s^{k-1}\, (\rho(\theta)^2 - s^2) \leq 2\rho(\theta)^{k+1} \leq 2h_\Omega^{k+1}$ on en déduit

$$|\Omega|\,|(f - T_k f(x)| \leq \frac{h_\Omega^{k+1}}{(k+1)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\theta)} b(x + se^{i\theta})\ sds\, d\theta = \frac{h_\Omega^{k+1}}{(k+1)!}\ \|D^{k+1} f\|_{L^1(\Omega)}.$$

On obtient ainsi la première inégalité lorsque $\ell = 0$.

Pour $\ell > 0$ et x fixés, soit $u \in \mathbb{R}^2$, $|u| = 1$, tel que $|D^\ell(f - T_k f)(x)| = D^\ell(f - T_k f)(x)(u)^\ell$ et soit $g(x) = D^\ell f(x)(u)^\ell$. On remarque que $D^\ell(f - T_k f)(x)(u)^\ell = (g - T_{k-l} g)(x)$ et $|D^{k+1-\ell} g(x)| \leq |D^{k+1} f(x)|\, ||u|^\ell = |D^{k+1} f(x)|$. L'inégalité pour $\ell \geq 1$ se déduit donc de celle pour $\ell = 0$ (en remplaçant f par g et k par $k - \ell$).

b) La deuxième inégalité est triviale pour $\ell = k+1$ (car $D^{k+1} T_k f = 0$). Comme on a $D^k(f - T_k f)(x)(u)^k = (D^k f - T_0 D^k f)(x)(u)^k$, en procédant comme au théorème 11 on obtient $|D^k(f - T_k f)| \leq \Lambda(|D^{k+1} f|)$, d'où la deuxième inégalité. Pour $\ell < k$ on remarque (inégalité de Hölder)

$$\|D^\ell(f - T_k f)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/p} \|D^\ell(f - T_k f)\|_{L^1(\Omega)} \text{ et } \|D^{k+1} f\|_{L^1(\Omega)} \leq |\Omega|^{1-1/p} \|D^{k+1} f\|_{L^p(\Omega)},$$

la deuxième inégalité se déduit alors de la précédente.

Le cas $d = 3$ se traiterait de manière similaire.

□

Théorème 13. *Si Ω est un ouvert borné de classe $C^{0,1}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\subset} W^{m-1,p}(\Omega), \qquad \textit{avec injection compacte.}$$

C'est-à-dire tout sous-ensemble borné dans $W^{m,p}(\Omega)$ est relativement compact dans $W^{m-1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\subset} L^p(\Omega)$; nous allons le faire dans le cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est convexe. Soit $h > 0$ donné ; considérons les carrés $K_{ij} = \{(x_1, x_2);\ ih \le x_1 \le (i+1)h,\ jh \le x_2 \le (j+1)h,\ i,j \in \mathbb{Z}\}$; si $\Omega_{ij} = K_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset$, on note $\mathrm{m}_{ij}u$ la valeur moyenne de u sur Ω_{ij}. À chaque $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on associe $u_h \in X_h = \{v_h \in L^p(\Omega);\ \forall\ K_{ij},\ v_{h|_{\Omega_{ij}}} \in \mathbb{P}_0\}$ défini par : sur $K_{ij} \cap \Omega$, $u_h = \mathrm{m}_{ij}u$. D'après le théorème 11,

$$\|u - u_h\|_{L^p(\Omega_{ij})} \le \sqrt{2}\, h\ \|Du\|_{L^p(\Omega_{ij})},$$

d'où $\|u - u_h\|^p_{L^p(\Omega)} \le (\sqrt{2}\, h)^p \sum_{i,j} \|Du\|^p_{L^p(\Omega_{ij})} = (\sqrt{2}\, h)^p \|Du\|^p_{L^p(\Omega)}$;
ainsi $\|u - u_h\|_{L^p(\Omega} \le C\ h\|u\|_{1,p,\Omega}$.

Soit alors B un sous-ensemble borné de $W^{m,p}(\Omega)$. L'inégalité précédente montre que les fonctions $u \in B$ sont uniformément approchées dans $L^p(\Omega)$ par des fonctions u_h appartenant à un espace X_h de dimension finie. Il en résulte que B est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$.

□

Corollaire 14. *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de classe $C^{0,1}$, et soit V un sous-espace fermé de $W^{m,p}(\Omega)$ tel que $V \cap \mathbb{P}^{m-1} = 0$; alors il existe une constante $C_V(\Omega)$ telle que :*

$$\forall v \in V, \qquad |v|_{m,p,\Omega} \le \|v\|_{m,p,\Omega} \le C_V(\Omega)|v|_{m,p,\Omega}.$$

Démonstration. L'inégalité de gauche est évidente. Supposons l'inégalité de droite fausse ; on pourrait alors trouver une suite u_k telle que

$$u_k \in V, \qquad \|u_k\|_{m,p,\Omega} = 1 \qquad \text{et} \lim_{k\to\infty} |u_k|_{m,p,\Omega} = 0;$$

après extraction éventuelle d'une sous-suite on peut supposer que u_k converge dans $W^{m-1,p}(\Omega)$, quand $k \to +\infty$. On a alors $\|u_k - u_q\|_{m-1,p,\Omega} \to 0$ quand k et q tendent vers $+\infty$, de plus $|u_k - u_q|_{m,p,\Omega} \to 0$, donc $\|u_k - u_q\|_{m,p,\Omega} \to 0$; la suite u_k, étant de Cauchy dans V, converge dans V vers une limite u. On a donc $u \in V$ et $|u|_{m,p,\Omega} = \lim_{k\to\infty} |u_k|_{m,p,\Omega} = 0$, ce qui montre que $\forall j$ avec $|j| = m,\ \partial_j u = 0$; on déduit du corollaire 6 que $u \in \mathbb{P}_{m-1}$, donc $u = 0$ puisque $V \cap \mathbb{P}_{m-1} = 0$; ceci est en contradiction avec le fait que $\|u\|_{m,p,\Omega} = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{m,p,\Omega} = 1$. □

Théorème 15. *(Poincaré-Friedrichs) Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, alors $|\ .\ |_{1,p,\Omega}$ et $\|\ .\ \|_{1,p,\Omega}$ sont deux normes équivalentes dans $W_0^{1,p}(\Omega)$*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \le C\ \|\partial_1\varphi\|_{L^p(\Omega)}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pour cela on remarque qu'il existe M tel que, $x \in \Omega$ entraîne $|x_1| \le M$. Alors, pour $x \in \Omega$,

$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_d)| = |\int_{-M}^{x_1} \partial_1\varphi(y_1, x_2, \ldots, x_d)\, dy_1| \le \int_{-M}^{M} |\partial_1\varphi(y_1, x_2, \ldots, x_d)|\, dy_1,$$

d'où, par Hölder,

$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_d)|^p \le (2M)^{p-1} \int_{-M}^{M} |\partial_1\varphi(y_1, x_2, \ldots, x_d)|^p\, dy_1,$$

et, en intégrant sur Ω,

$$\|\varphi\|^p_{L^p(\Omega)} \le\ (2M)^p\ \|\partial_1\varphi\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

□

6 Les théorèmes d'inclusion de Sobolev

Nous admettrons le théorème de prolongement suivant.

Théorème 16. *Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{0,1}$, il existe un opérateur P (ne dépendant que de m et de Ω) linéaire continu de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\forall u \in W^{m,p}(\Omega), \qquad Pu_{|\Omega} = u$.*

Théorème 17. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de classe $C^{0,1}$.*
a) on a $W^{d,1}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$, avec injection continue.
b) Si de plus Ω est borné et si $p > 1$,

$$W^{d,p}(\Omega) \overset{c}{\subset} C^0(\bar{\Omega}), \text{ (avec injection compacte).}$$

Démonstration. a) En utilisant le théorème 16 précédent, on se ramène au cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$; en remarquant que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \qquad \varphi(x_1, ..., x_d) = \int_{\infty}^{x_1} \int_{\infty}^{x_2} \cdots \int_{\infty}^{x_d} \frac{\partial^d \varphi}{\partial x_1 \cdots \partial x_d}(y_1, ..., y_d)\, dy_d ... dy_1,$$

d'où $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq |\varphi|_{d,1,\mathbb{R}^d}$ on obtient le résultat par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $W^{d,1}(\mathbb{R}^d)$.

b) (En dimension $d = 2$). On utilise les notations de la démonstration du théorème 13. Posons

$$Y_h = \{v_h \in L^p(\Omega);\ \forall\ (i,j),\ v_{h|\Omega_{ij}} \in \mathbb{P}_1\} \quad \text{et } (T_{ij}v)(x) = \frac{1}{|K_{ij}|} \int_{K_{ij}} (v(y) + Dv(y)(x-y)\, dy.$$

D'après le théorème 12

$$\|v - T_{ij}v\|_{L^\infty(K_{ij})} \leq \frac{2h^2}{2h^2} \|D^2 v\|_{1(K_{ij})} \leq (h^2)^{1-1/p} \|D^2 v\|_{L^p(K_{ij})}.$$

Si $u \in W^{2,1}(\Omega)$, on lui associe $u_h \in Y_h$ défini par $u_h = T_{ij}(Pu)$, sur Ω_{ij}. On a alors

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega_{ij})} &\leq \|Pu - u_h\|_{L^\infty(K_{ij})} \leq h^{2-2/p} \|D^2 Pu\|_{L^p(K_{ij})} \\ &\leq h^{2-2/p} \|D^2 Pu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C\, h^{2-2/p} \|u\|_{2,p,\Omega}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\, h^{2-2/p} \|u\|_{2,p,\Omega}$; les fonctions u bornées dans $W^{2,p}(\Omega)$ sont donc uniformément approchées par des fonction u_h appartenant à un espace de dimension finie. On en déduit la compacité. $\square$

Théorème 18. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de classe $C^{0,1}$.*
a) On a

$$W^{m,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & \text{avec } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}, \quad \text{si } mp < d, \\ L^q(\Omega) & \text{pour tout } p \leq q < +\infty, \quad \text{si } mp = d, \\ C^0(\bar{\Omega}) & \text{si mp > d.} \end{cases}$$

b) Si de plus Ω est borné, alors

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\subset} \begin{cases} L^q(\Omega) & \text{pour tout } 1 \leq q < p^*, \quad \text{si } mp < d, \\ L^q(\Omega) & \text{pour tout } 1 \leq q < +\infty, \quad \text{si } mp = d, \\ C^0(\bar{\Omega}) & \text{si } mp > d. \end{cases}$$

Démonstration partielle. (Dans le cas $d = 2$). Il suffit de regarder le cas $m = 1$, et de procéder ensuite par récurrence. Comme dans le théorème précédent on se ramène au cas $\Omega = \mathbb{R}^d$. On remarque tout d'abord que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, si on pose $a(x_1) = \int_{\mathbb{R}} |\partial_1\varphi(y_1, x_2)|\ dy_1$ et $b(x_2) = \int_{\mathbb{R}} |\partial_2\varphi(x_1, y_2)|\ dy_2$, on a

$$|\varphi(x)| = |\int_{-\infty}^{x_1} \partial_1\varphi(y_1, x_2)\ dy_1| \leq a(x_2), \qquad \text{et de même } |\varphi(x)| \leq b(x_1),$$

d'où

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2\ dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} a(x_2)\ b(x_1)\ dx = \|\partial_1\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\ \|\partial_2\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Par densité, cela montre le a) dans le cas $p = m = 1$. Pour $1 < p < 2$, en posant $q = p^*$ et $\varphi = v^{q/2}$, on déduit de l'inégalité précédente la majoration

$$\|v\|^q_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \big(\frac{q}{2}\big)^2\ \|v^{q/2-1}\partial_1 v\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\ \|v^{q/2-1}\partial_2 v\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

On utilise ensuite l'inégalité de Hölder $\|v^{q/2-1}\partial_1 v\|_{L^1} \leq \|v\|^{q/2-1}_{L^q}\|\partial_1 v\|_{L^p}$ pour obtenir

$$\|v\|^2_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \big(\frac{q}{2}\big)^2\ \|\partial_1 v\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\ \|\partial_2 v\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

et ainsi $\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{q}{2}\|Dv\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$.

Pour $p = 2$ et $q \geq 4$, on utilise l'inégalité de Hölder $\|v^{q/2-1}\partial_1 v\|_{L^1} \leq \|v\|^{\frac{2}{q-2}}_{L^2}\|v\|^{\frac{q(q-4)}{2(q-2)}}_{L^q}\|\partial_1 v\|_{L^2}$, d'où l'on déduit

$$\|v\|^{\frac{2q}{q-2}}_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \big(\frac{q}{2}\big)^2\ \|v\|^{\frac{4}{q-2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ \|\partial_1 v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ \|\partial_2 v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Par suite $\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \big(\frac{q}{2}\big)^{1-2/q}\ \|v\|_{1,2,\Omega}$, ce qui montre l'inclusion de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dans $L^q(\mathbb{R}^2)$ pour $q \geq 4$. Cette inclusion est aussi valable pour $2 \leq q \leq 4$ puisque $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$.

Dans le cas $2 < p < +\infty$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on écrit en utilisant des coordonnées polaires (r, θ) d'origine x et les notations $\partial_r\varphi = \partial_1\varphi\ \cos\theta + \partial_2\varphi\ \sin\theta$ et $a(y) = |\partial_r\varphi(y)| + |\varphi(y)|$:

$$|\varphi(x)| = |\int_0^1 \partial_r[(1-r)\varphi(x+r\,\mathrm{e}^{i\theta})]\ dr| \leq \int_0^1 r^{1/p}\ a(x+r\,\mathrm{e}^{i\theta})\ r^{-1/p}\ dr,$$

d'où, par l'inégalité de Hölder, $|\varphi(x)|^p \leq \big(\frac{p-1}{p-2}\big)^{p-1}\ \int_0^1 r\ a(x+r\,\mathrm{e}^{i\theta})^p\ dr$, et en intégrant en θ

$$2\pi|\varphi(x)|^p \leq \big(\frac{p-1}{p-2}\big)^{p-1}\ \|a\|^p_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \big(2\,\frac{p-1}{p-2}\big)^{p-1}\ \|\varphi\|^p_{1,p,\mathbb{R}^2}.$$

On a donc

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq (2\pi)^{-1/p}\ \big(2\,\frac{p-1}{p-2}\big)^{1-1/p}\ \|\varphi\|_{1,p,\mathbb{R}^2}.$$

L'application identité est donc bien continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ dans $C^0(\mathbb{R}^2)$.

Le b) se déduit du a) et de l'inclusion compacte $W^{1,p} \overset{c}{\subset} L^p$ (théorème 13). $\square$

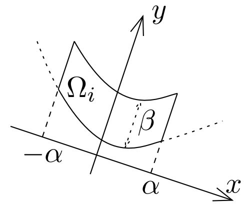
7 Théorèmes de trace.

Théorème 19. *Soit Ω un ouvert (borné) de $\mathbb{R}^d$ de classe $C^{0,1}$, $d \geq 2$.*

L'application $\gamma_0 : u \mapsto u_{|\Gamma}$ de $C^1(\bar{\Omega})$ muni de la norme de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $L^1(\Gamma)$ est uniformément continue ; elle se prolonge donc en une application, notée encore γ_0, linéaire continue de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $L^1(\Gamma)$. De plus, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $p < d$, alors $\gamma_0 u \in L^r(\Gamma)$ où $r = p\frac{d-1}{d-p}$ et γ_0 est un opérateur linéaire continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^r(\Gamma)$.

Démonstration. (Dans le cas $d = 2$).

a) La frontière Γ étant compacte, on peut la considérer comme une réunion finie de parties $\Gamma = \cup \Gamma_i$ où Γ_i est de la forme, (dans un repère orthonormé dépendant de i Oxy),
$\Gamma_i = \{(x,y); -\alpha < x < \alpha \text{ et } y = a_i(x)\}$, avec
$\Omega_i = \{(x,y); -\alpha < x < \alpha \text{ et } a_i(x) < y < a_i(x) + \beta\} \subset \Omega$;
de plus la fonction a_i est continue lipschitzienne.



On a $u(x, a(x)) = u(x,y) - \int_{a(x)}^{y} \partial_y u(x,t)\, dt$,
d'où, en majorant et en intégrant en y
entre $a(x)$ et a$(x) + \beta$,

$$\beta |u(x, a(x))| \leq \int_{a(x)}^{a(x)+\beta} |u(x,y)|\, dy + \beta \int_{a(x)}^{a(x)+\beta} |\partial_y u(x,t)|\, dt,$$

et par suite

$$\beta \int_{-\alpha}^{\alpha} |u(x, a(x))|\, dx \leq |u|_{L^1(\Omega_i))} + \beta |u|_{1,1,\Omega_i}.$$

Remarquons que l'élément d'arc $d\sigma(x) = \sqrt{1 + a'(x)^2}\, dx \leq \sqrt{1+L^2}\, dx$, on a donc

$$\|u\|_{L^1(\Gamma_i)} \leq \sqrt{1+L^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} |u(x,a(x))|\, dx \leq C_i \|u\|_{1,1,\Omega_i},$$

avec $C_i = \sqrt{1+L^2}\max(1, 1/\beta)$. Par suite $\|u\|_{L^1(\Gamma)} \leq (\sum C_i)\|u\|_{1,1,\Omega}$

b) L'application γ_0 est uniformément continue de $C^1(\bar{\Omega})$ muni de $\| \ . \ \|_{1,1,\Omega}$ dans $L^1(\Gamma)$; le prolongement s'obtient en remarquant que $C^1(\bar{\Omega})$, (qui contient $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$), est dense dans $W^{1,1}(\Omega)$.

c) Pour la dernière partie, on remplace u par $|v|^r$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \|v\|^r_{L^r(\Gamma)} &\leq C\ \|v^r\|_{1,1,\Omega} \leq C\big(\|v^{r-1}\ v\|_{L^1(\Omega)} + r\ \|v^{r-1} Dv\|_{L^1(\Omega)}\big) \\ &\leq C\ \|v\|^{r-1}_{L^{p^*}(\Omega)}\big(\|v\|_{L^p(\Omega)} + r\ \|Dv\|_{L^p(\Omega)}\big). \end{aligned}$$

Le résultat se déduit alors du théorème 18.

□

Remarques.

1) Si $p > d$, $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$, donc γ_0 est continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $C^0(\Gamma)$ et n'est rien d'autre que l'application trace (restriction au bord) au sens classique.

2) Si $p = d$, alors $\forall q \geq 1$, γ_0 est une application linéaire continue de $W^{1,d}(\Omega)$ dans $L^q(\Gamma)$.

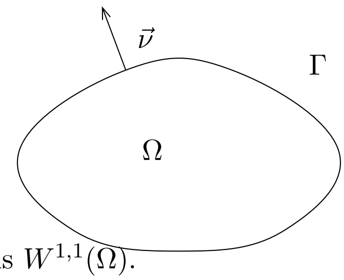
3) L'application γ_0 est en particulier linéaire continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Gamma)$.

Attention. L'application γ_0 n'est pas surjective de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^r(\Gamma)$, excepté dans le cas $p = 1$ où l'on peut montrer qu'elle est surjective de $W^{1,1}(\Omega)$ sur $L^1(\Gamma)$.

Théorème 20. *(Formule de Gauss). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $(d \geq 2)$ de classe $C^{0,1}$. On a, pour tout $u \in W^{1,1}(\Omega)$,*

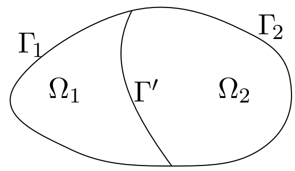
$$\int_\Omega \partial_i u \; dx = \int_\Gamma (\gamma_0 u)(x) \; \nu_i(x) d\sigma(x),$$

où $\nu_i(x)$ désigne la i-ème composante de la normale unitaire $\vec{\nu}$ au point x de Γ extérieure à Ω, et $\partial_i u$ la dérivée partielle de u par rapport à la i-ème variable.



Démonstration. Ce théorème résulte de la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $W^{1,1}(\Omega)$. □

Corollaire 21. *On se place dans le cas de figure ci-contre où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ de classe $C^{0,1}$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, Ω_1 et Ω_2 ont une partie de frontière commune Γ'.*



À une fonction u définie sur $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma'$, on associe $u_1 = u_{|\Omega_1}$ et $u_2 = u_{|\Omega_2}$; alors on a

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_1 \in W^{1,p}(\Omega_1), \;\; u_2 \in W^{1,p}(\Omega_2), \\ \text{et } \gamma_0 u_{1|_{\Gamma'}} = \gamma_0 u_{2|_{\Gamma'}}. \end{cases}$$

Démonstration. a) "$\Rightarrow$". L'implication dans ce sens s'obtient, si $p \neq +\infty$, en prenant une suite $u_n \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. Si $p = +\infty$ et Ω borné, $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \Rightarrow u \in W^{1,1}(\Omega)$, ce qui permet de reprendre le raisonnement précédent ; si Ω n'est pas borné et $u \in W^{1,p}(\Omega)$, les raisonnements précédents montrent que $\gamma_0 u_1$ et $\gamma_0 u_2$ coïncident sur toute partie bornée de Γ', donc sur Γ'.

b) "$\Leftarrow$". Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\Omega u \; \partial_i \varphi \; dx + \int_{\Omega_1} \partial_i u_1 \; \varphi \; dx + \int_{\Omega_2} \partial_i u_2 \; \varphi \; dx &= \textstyle\int_{\Omega_1} \partial_i(\varphi u_1) \; dx + \int_{\Omega_2} \partial_i(\varphi u_2) \; dx \\ &= \textstyle\int_{\Gamma'} \gamma_0(\varphi u_1) \; \nu_i^1 \; d\sigma + \int_{\Gamma'} \gamma_0(\varphi u_2) \; \nu_i^2 \; d\sigma. \end{aligned}$$

Il est clair que $\gamma_0(\varphi u_1) = \gamma_0(\varphi u_2)$ et que $\nu_i^1 = -\nu_i^2$ sur Γ' ; on obtient donc

$$\int_\Omega u \; \partial_i \varphi \; dx = -\int_{\Omega_1} \partial_i u_1 \varphi \; dx - \int_{\Omega_2} \partial_i u_2 \varphi \; dx,$$

ce qui signifie que u admet pour dérivée partielle $\partial_i u$ (au sens des distributions sur Ω) la fonction définie presque partout sur Ω par $\partial_i u_{|_{\Omega_1}} = \partial_i u_1$ et $\partial_i u_{|_{\Omega_2}} = \partial_i u_2$. Il est clair ainsi que $\partial_i u \in L^p(\Omega)$. □

Corollaire 22. *Si Ω est de classe $C^{0,1}$ et $p \neq +\infty$*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \; ; \; \gamma_0 u = 0\}.$$

Démonstration. En effet, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et si $\gamma_0 u = 0$, en notant $\tilde{u}$ le prolongement de u par 0 en dehors de Ω, on a $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. On conclut par le théorème 9. □

8 Formulations variationnelles

On considère un espace de Hilbert V sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $((.,.))$ et de la norme associée $\|\,.\,\|$; on notera V' le dual de V et (f,v) la valeur prise par la forme linéaire $f \in V'$ sur l'élément v de V. On munira V' de la norme $\|\,.\,\|_*$ définie par

$$\|f\|_* = \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{|(f,v)|}{\|v\|}.$$

Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$; il existe donc une constante M telle que pour tout couple $u, v \in V$, on ait $|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$.

Définitions.

Nous dirons que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est V-elliptique s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\forall\, v \in V, \qquad a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2.$$

On appelle forme bilinéaire adjointe de $a(.,.)$ la forme bilinéaire $a_*(.,.)$ définie par

$$\forall\, u, v \in V, \qquad a_*(u,v) = a(v,u).$$

Nous dirons que $a(.,.)$ est symétrique si

$$\forall\, u, v \in V, \qquad a(u,v) = a_*(u,v).$$

Introduisons maintenant la fonctionnelle $J : V \mapsto \mathbb{R}$

$$J(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - (f,v),$$

et soit K un sous-ensemble convexe fermé de V ; on considère maintenant le problème

$$(\mathcal{E}) \qquad \begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \forall\, v \in K, \quad J(u) \leq J(v). \end{cases}$$

Théorème 23. *On suppose que $a(.,.)$ est, sur $V \times V$, une forme bilinéaire symétrique continue et V-elliptique, et que K est un sous-ensemble convexe fermé non vide de V. Alors le problème $(\mathcal{E})$ admet une solution unique. Le problème $(\mathcal{E})$ peut aussi s'écrire sous la forme équivalente*

$$(\mathcal{I}) \qquad \begin{cases} \textit{trouver } u \in K \textit{ tel que} \\ \forall\, v \in K, \quad a(u, v-u) \geq (f, v-u), \end{cases}$$

ou encore

$$(\mathcal{I}') \qquad \begin{cases} \textit{trouver } u \in K \textit{ tel que} \\ \forall\, v \in K, \quad a(v, v-u) \geq (f, v-u), \end{cases}$$

De plus, lorsque $K = u_0 + W$ est un sous-espace affine fermé de V ($u_0 \in V$, W sous-espace vectoriel fermé de V), les trois problèmes $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{I})$ et $(\mathcal{I}')$ sont équivalents à $(\mathcal{V})$

$$(\mathcal{V}) \qquad \begin{cases} \textit{trouver } u \in u_0 + W \textit{ tel que} \\ \forall\, w \in W, \quad a(u,w) = (f,w). \end{cases}$$

Démonstration. a) On a $J(v) \geq \alpha/2\|v\|^2 - \|f\|_*\|v\| \geq -\|f\|_*^2/2\alpha$, donc $j = \inf\{J(v); v \in K\}$, vérifie $j > -\infty$. Par ailleurs, on remarque que

$$J(v)+J(w)-2J(\tfrac{v+w}{2}) = \tfrac{1}{2}[a(v,v)+a(w,w)-\tfrac{1}{2}a(v+w,v+w)] = \tfrac{1}{4}a(v-w,v-w) \geq \tfrac{\alpha}{4}\|v-w\|^2.$$

Par définition de j il existe une suite d'éléments $u_n \in K$ tels que $j \leq J(u_n) \leq j + \frac{1}{n}$; on a alors

$$\frac{\alpha}{4}\|u_n - u_p\|^2 \leq J(u_n) + J(u_p) - 2J(\tfrac{u_n+u_p}{2}) \leq J(u_n) + J(u_p) - 2j \leq \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{p};$$

il en résulte que la suite $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy dans V, et donc converge dans cet espace vers un élément $u \in K$; par continuité, on a $j = J(u)$, ce qui montre que $(\mathcal{E})$ admet une solution ; de l'inégalité $\frac{\alpha}{4}\|u-v\|^2 \leq J(u) + J(v) - 2j$, on déduit l'unicité de u tel que $j = J(u)$.

b) Si u est solution de $(\mathcal{E})$, on a $\forall v \in K$ et $\forall \theta \in [0,1]$, $u+\theta(v-u) \in K$, d'où $0 \leq J(u+\theta(v-u)) - J(u)$, et, en développant,

$$\forall \theta \in]0,1], \quad 0 \leq \theta[a(u,v-u) - (f,v-u)] + \theta^2 a(v-u,v-u).$$

En simplifiant par $\theta > 0$, et en faisant tendre θ vers zéro, on obtient que u est solution de $(\mathcal{I})$. D'autre part

$$a(v,v-u) = a(v-u,v-u) + a(u,v-u) \geq a(u,v-u),$$

donc u solution de $(\mathcal{I})$ entraîne u solution de $(\mathcal{I}')$.

c) Pour démontrer que $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{I})$ sont équivalents, il suffit de montrer l'unicité de la solution de $(\mathcal{I})$; dans ce but, si u' désigne une autre solution de $(\mathcal{I})$, on remarque que l'on a alors

$$a(u,u'-u) \geq (f,u'-u) \quad \text{et} \quad a(u',u-u') \geq (f,u-u'),$$

d'où, en additionnant, $-a(u-u',u-u') \geq 0$; et donc, en utilisant la V-ellipticité, $u = u'$.

d) Soit maintenant $u \in K$ une solution de $(\mathcal{I}')$. Si $v \in K$, on a aussi pour $0 < t < 1$, $u+t(v-u) = t\,v + (1-t)u \in K$, donc en remplaçant v par $u+t(v-u)$ dans $(\mathcal{I}')$

$$a(u+t(v-u),t(v-u)) \geq (f,t(v-u)),$$

d'où, en divisant par t qui est positif,

$$a(u+t(v-u),v-u) \geq (f,v-u), \qquad \forall\, t \in]0,1[;$$

on en déduit que u est solution de $(\mathcal{I})$, en faisant tendre t vers 0.

e) On suppose maintenant $K = u_0 + W$. En choisissant $v = u \pm w$, où u est solution de $\mathcal{I}$ et w arbitraire dans W, on a bien $v \in K$; donc u est solution de $(\mathcal{V})$. Réciproquement, si u est solution de $(\mathcal{V})$, alors $a(u,v-u) = (f,v-u)$ donc a fortiori u est solution de $(\mathcal{I})$.

$\square$

Physiquement J s'interprète comme l'énergie du système, K comme l'ensemble des états admissibles. Les solutions stationnaires correspondent au minimum de l'énergie. La formulation $(\mathcal{I})$ ou $(\mathcal{V})$ coïncide en mécanique avec le théorème des puissances virtuelles. Nous dirons que $(\mathcal{I})$, $(\mathcal{I}')$ ou $(\mathcal{V})$ est une formulation variationnelle associée à $(\mathcal{E})$; $(\mathcal{I})$ et $(\mathcal{I}')$ s'appellent des inéquations variationnelles, tandis que $(\mathcal{V})$ s'appelle une équation variationnelle.

Corollaire 24. *(Théorème de F. Riesz) Soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Pour toute forme linéaire $f \in V'$, il existe un unique élément $u_f \in V$ tel que*

$$\forall\, w \in V, \qquad (\!(u_f, w)\!) = (f,w).$$

L'application $f \mapsto u_f$ est une isométrie de V' sur V. Le dual V' de V est donc un espace de Hilbert isomorphe à V.

Démonstration. On applique le théorème 23 avec $a(v,w) = ((v,w))$, $u_0 = 0$, $K = W = V$; cela montre l'existence et l'unicité de u_f. De plus

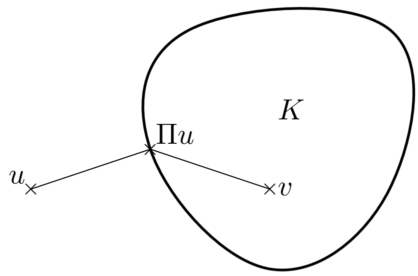
$$\|f\|_* = \sup_{v \neq 0} \frac{|(f,v)|}{\|v\|} = \sup_{v \neq 0} \frac{|((u_f, v))|}{\|v\|} = \|u_f\|,$$

d'où l'isométrie. En posant $(f,g)_* = ((u_f, u_g))$, on munit V' d'une structure d'espace de Hilbert. $\square$

Corollaire 25. *Soit K un ensemble convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert V, et $u \in V$ donné. Alors il existe un unique élément $\Pi u \in K$ tel que*

$$\|u - \Pi u\| = \min_{v \in K} \|u - v\|.$$

L'élément Πu s'appelle la projection orthogonale de u sur le convexe K. Il est caractérisé par l'inéquation variationnelle



$$(\mathcal{J}) \qquad \begin{cases} \Pi u \in K \quad \textit{et} \quad \forall\, v \in K, \\ ((u - \Pi u, v - \Pi u)) \leq 0, \end{cases}$$

ou encore

$$(\mathcal{J}') \qquad \begin{cases} \Pi u \in K \quad \textit{et} \quad \forall\, v \in K, \\ ((u - v, v - \Pi u)) \leq 0, \end{cases}$$

Démonstration. On applique le théorème 23 avec $a(v,w) = ((v,w))$ et $(f,v) = ((u,v))$; de sorte que $J(v) = \frac{1}{2}\big(\|v - u\|^2 - \|u\|^2\big)$. $\square$

Corollaire 26. *Soit W un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert V. Une condition nécessaire et suffisante pour que W soit dense dans V s'écrit*

$$\text{“}v \in V \quad \textit{et} \quad ((v,w)) = 0, \quad \forall\, w \in W\text{”} \implies \qquad \text{“}v = 0\text{”}.$$

Démonstration. Condition nécessaire. En effet, si W est dense dans V, alors par continuité

$$\text{“}((v,w)) = 0, \quad \forall\, w \in W\text{”} \implies \text{“}((v,w)) = 0, \quad \forall\, w \in V\text{”} \implies \text{“}((v,v)) = 0\text{”} \implies \text{“}v = 0\text{”}.$$

Condition suffisante. On suppose la condition vérifiée. Soit $u \in V$; on note Πu sa projection orthogonale sur $\overline{W}$. On a alors

$$((u - \Pi u, w)) = 0 \quad \forall\, w \in \overline{W}, \quad \text{donc a fortiori } \forall\, w \in W.$$

La condition implique $u - \Pi u = 0$, d'où $u = \Pi u \in \overline{W}$, et par suite $V = \overline{W}$. $\square$

On considère maintenant deux espaces de Hilbert V et W sur $\mathbb{R}$, une forme bilinéaire $a(.,,)$ continue sur $V \times W$, une forme linéaire $f \in W'$ continue sur W,

$$a : \ (v,w) \mapsto a(v,w), \qquad f : \ w \mapsto (f,w).$$

On s'intéresse maintenant au problème suivant

$$(\mathcal{V}) \qquad \begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall\, w \in W, \quad a(u,w) = (f,w). \end{cases}$$

Théorème 27. *Sous les hypothèses*

$$\beta = \inf_{0\neq v\in V} \sup_{0\neq w\in W} \frac{|a(v,w)|}{\|v\|_V \|w\|_W} > 0, \tag{3}$$

et

$$\text{“}w \in W \quad \textit{et} \quad a(v,w) = 0,\ \forall v \in V\text{”} \implies w = 0 \tag{4}$$

le problème $(\mathcal{V})$ *admet une solution et une seule.*

Démonstration. D'après le théorème de Riesz, il existe $\varphi_f \in W$ et $\mathcal{A}u \in W$ tels que

$$((\varphi_f, w))_W = (f,w), \quad \text{et} \quad ((\mathcal{A}u, w))_W = a(u,w), \qquad \forall\, w \in W.$$

Le problème $(\mathcal{V})$ équivaut alors à : trouver $u \in V$ tel que $\mathcal{A}u = \varphi_f$.

la condition (3) entraîne

$$\|\mathcal{A}u\|_W = \sup_{0\neq w\in W} \frac{|a(u,w)|}{\|w\|_W} \geq \beta\, \|u\|_V,$$

cela montre que l'opérateur $\mathcal{A}$ (qui est clairement linéaire) est un isomorphisme de V sur son image $\operatorname{Im}\mathcal{A} \subset W$. Il en résulte que le sous-espace $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ est fermé dans W.

Soit maintenant $w \in W$ tel que $((\varphi, w))_W = 0$ quel que soit $\varphi \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$.
On a alors $0 = ((\mathcal{A}v, w))_W = a(v,w)$, $\forall\, v \in V$, d'où, par l'hypothèse (4), $w = 0$. En utilisant le corollaire 26, on en déduit la densité de $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ dans W, d'où, $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ étant fermé, $\operatorname{Im}\mathcal{A} = W$. □

Corollaire 28. *Sous les hypothèses (3) et*

$$\gamma = \inf_{0\neq w\in W} \sup_{0\neq v\in V} \frac{|a(v,w)|}{\|v\|_V \|w\|_W} > 0, \tag{5}$$

le problème $(\mathcal{V})$ *admet une solution et une seule.*

Corollaire 29. *Soit* $V \subset W$ *deux espaces de Hilbert. On suppose que* $a(.,.)$ *est une forme bilinéaire continue sur* $W \times V$ *et qu'elle est* V*-elliptique, i.e.*

$$\exists\ \alpha > 0, \quad \textit{tel que} \quad \forall\, v \in V, \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

Soit $u_0 \in W$ *et* $f \in V'$ *donnés. Alors le problème*

$$(\mathcal{V}) \qquad \begin{cases} \textit{trouver } u \in u_0 + V \textit{ tel que} \\ \forall\, v \in V, \quad a(u,v) = (f,v), \end{cases}$$

admet une solution et une seule.

Démonstration. On fait le changement de variables $u = u_0 + w$; le problème $(\mathcal{V})$ est alors équivalent à

$$\begin{cases} \text{trouver } w \in V \text{ tel que} \\ \forall\, v \in V, \quad a(w,v) = (f,v) - a(u_0,v), \end{cases}$$

Il est clair que la forme linéaire $v \mapsto (f,v) - a(u_0,v)$ est continue sur V. On applique alors le corollaire précédent avec ici $V = W$, en prenant $v = w$ on vérifie facilement que les conditions (3) et (5) sont vérifiées avec $\beta \geq \alpha$ et $\gamma \geq \alpha$. □

Remarque. Lorsque $V = W$, le choix de u_0 alors n'intervient plus (on peut le prendre $= 0$) ; le corollaire précédent est connu sous le nom de théorème de Lax-Milgram.

9 Exemples

Exemple 1. On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On prend $W = H^1(\Omega)$, on considère des données $a \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, et on pose

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \Big(\vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + a(x)\,u(x)\,v(x)\Big)\,dx, \\ (\ell, v) &= \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\,\gamma_0 v(x)\,d\sigma(x). \end{aligned}$$

On fait d'autre part l'hypothèse :

$$\forall\, x \in \Omega, \qquad a(x) \geq \alpha \geq 0.$$

Il est clair que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire et que $(\ell,.)$ est une forme linéaire. On déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq a(u,u)^{1/2}\,a(v,v)^{1/2} \leq \max\left(1, \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|_{1,\Omega}\,\|v\|_{1,\Omega}, \\ |(\ell,v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\,\|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\,\|\gamma_0\|_{H^1(\Omega)\to L^2(\partial\Omega)}\right)\|v\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Cela montre la continuité sur W de la forme bilinéaire ; il en est de même pour la forme linéaire dès que, soit $g = 0$, soit l'application trace γ_0 est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$(ce qui est le cas, d'après le théorème 19, si Ω est borné de classe $C^{0,1}$). Par ailleurs on a

$$\forall\, v \in W, \qquad a(v,v) \geq |v|_{1,\Omega}^2 + \alpha|v|_{1,\Omega}^2 \geq \min(1,\alpha)\|v\|_{1,\Omega}^2.$$

La forme bilinéaire $a(.,.)$ est donc W-elliptique lorsque $\alpha > 0$. Lorsque l'on a seulement $\alpha = 0$, le théorème 15 assure que a est V-elliptique pour $V = H_0^1(\Omega)$ quand Ω est borné, et le corollaire 14 lorsque V est un sous-espace fermé de W tel que $V \cap \mathbb{P}_0 = \{0\}$, si Ω est borné de classe $C^{0,1}$.

Sous-exemple 1.1. (Problème de Dirichlet) On fait le choix $V = H_0^1(\Omega)$, et on suppose : soit $\alpha > 0$, soit $\alpha = 0$ et Ω borné. On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in u_0 + H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \\ a(u,v) = \int_\Omega f(x)\,v(x)\;dx. \end{array} \right.$$

D'après le corollaire 29 ce problème admet une solution et une seule. De plus on a l'équivalence

$$(P) \iff \left\{ \begin{array}{ll} u - u_0 \in H_0^1(\Omega), & \\ -\Delta u + au = f, & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{array} \right. \overset{\text{form.}}{\iff} \left\{ \begin{array}{ll} u = u_0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ -\Delta u + au = f, & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Preuve. Lorsque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle -\Delta u + au - f, \varphi\rangle = a(u,\varphi) - \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\;dx$. Puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset V$, on en déduit que si u est solution de (P), alors on a l'égalité $-\Delta u + au = f$ dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$; réciproquement, si $-\Delta u + au = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on en déduit $a(u,\varphi) = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\;dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V, u est solution de (P).

La deuxième équivalence est seulement valable "formellement" ; par cet adverbe nous voulons dire qu'elle n'est valable que si des hypothèses de régularité supplémentaires (que nous ne préciserons généralement pas) sont vérifiées. Par exemple, si Ω est de classe $C^{0,1}$, on sait que $u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$ équivaut à $\gamma_0 u = \gamma_0 u_0$; si de plus u et u_0 sont C^1, γ_0 n'est autre que la restriction au bord et $u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$ équivaut bien à $u = u_0$ sur $\partial\Omega$. Similairement, si $u \in C^2(\Omega)$, a et $f \in C^0(\Omega)$, la relation $-\Delta u + au = f$, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ équivaut bien à $-\Delta u + au = f$ en tout point de Ω.

$\square$

Sous-exemple 1.2. (Problème de Neumann) On fait maintenant le choix $V = W = H^1(\Omega)$; on suppose $\alpha > 0$, et Ω (borné) de classe $C^{0,1}$. On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall\, v \in H^1(\Omega), \\ a(u,v) = (\ell, v). \end{cases}$$

Ce problème admet comme le précédent une solution et une seule. On a maintenant l'équivalence (formellement)

$$(P) \overset{\text{form.}}{\iff} \begin{cases} -\Delta u + au = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Preuve. On a encore $\mathcal{D}(\Omega) \subset V$ donc, si u est solution de (P), l'égalité $-\Delta u + au = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si cette égalité est vérifiée, et si la fonction u est suffisamment régulière pour que les formules de Gauss soient justifiées, alors

$$\begin{aligned} a(u,v) - (\ell, v) &= \int_\Omega \left(\vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + a\,u\,v\right) dx - \int_\Omega f\,v\,dx - \int_{\partial\Omega} g\,v\,d\sigma \\ &= \int_\Omega \left(\vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + \Delta u\,v\right) dx - \int_{\partial\Omega} g\,v\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} (\tfrac{\partial u}{\partial \nu} - g)\,v\,d\sigma. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme suivant, on en déduit l'équivalence (dite formelle puisque soumise à conditions de régularité) proposée.

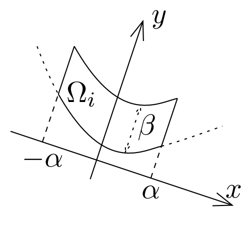
□

Lemme 30. *Les conditions $g \in L^1(\partial\Omega)$ et $\int_{\partial\Omega} g\,\varphi\,d\sigma = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, entraînent $g = 0$ sur $\partial\Omega$.*

Démonstration. (En dimension 2). Soit $K \subset \partial\Omega$ une partie compacte de la frontière $\partial\Omega$. D'après le lemme 2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tel que $0 \le \varphi_\varepsilon \le 1$, $\varphi_\varepsilon = 1$ sur K et $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ si $d(x, K) \ge \varepsilon$. En passant à la limite dans la relation $\int_{\partial\Omega} g\,\varphi_\varepsilon\,d\sigma = 0$ on en déduit $\int_{\partial\Omega} g\,\mathbf{1}_K\,d\sigma = 0$.

Comme pour la démonstration du théorème de trace, nous nous plaçons maintenant sur une partie Γ_i de la frontière liée à une partie Ω_i de Ω représentée (dans un repère orthonormé dépendant de i : Oxy) par
$\Gamma_i = \{(x,y); -\alpha < x < \alpha \text{ et } y = a_i(x)\}$, avec
$\Omega_i = \{(x,y); -\alpha < x < \alpha \text{ et } a_i(x) < y < a_i(x) + \beta\} \subset \Omega$.
Si la fonction v est nulle sur $\partial\Omega$ en dehors de Γ_i, on peut écrire (en oubliant l'indice i)

$$\int_{\partial\Omega} g\,v\,d\sigma = \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{g}\,\tilde{v}\,dx$$



où on a posé

$$\tilde{g}(x) = g(x, a(x))\sqrt{1 + a'(x)^2},\ \tilde{v}(x) = v(x, a(x))\,;$$

rappelons que $d\sigma = \sqrt{1 + a'(x)^2}\,dx$.

Pour montrer que $g = 0$ sur Γ_i, c'est à dire $\tilde{g} = 0$ sur $(-\alpha, \alpha)$, il suffit de montrer que $\int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{g}\,\tilde{v}\,dx = 0$ pour tout $v \in \mathcal{D}(-\alpha, \alpha)$ (voir le lemme 4), donc il suffit de le montrer pour toute fonction v constante par intervalle (les fonctions de $\mathcal{D}(-\alpha, \alpha)$ sont limites uniformes de telles fonctions). Finalement il suffit de montrer que pour tout intervalle $[a, b] \subset]-\alpha, \alpha[$ on a $\int_a^b \tilde{g}\,dx = 0$, ce qui n'est autre que $\int_{\partial\Omega} g\,\mathbf{1}_K\,d\sigma = 0$ en notant par $K = \{(x, a_i(x))\,; a \le x \le b\}$, le compact de Γ_i se projetant en $[a, b]$ sur l'axe Ox.

□

Nous admettrons les théorèmes de régularité suivants :

Théorème 31. *On suppose que Ω est convexe ou de classe $C^{1,1}$; alors, si l'on est dans le cas du problème de Dirichlet avec $u_0 \in H^2(\Omega)$, $a \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$, ou si l'on est dans le cas du problème de Neumann avec $a \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g = 0$, on a $u \in H^2(\Omega)$, de plus*

$$\begin{array}{rrcl} \textit{dans le premier cas} & \|u\|_{2,\Omega} & \leq & C(\|u_0\|_{2,\Omega} + \|f_0\|_{0,\Omega}), \\ \textit{et dans le deuxième cas} & \|u\|_{2,\Omega} & \leq & C\|f_0\|_{0,\Omega}. \end{array}$$

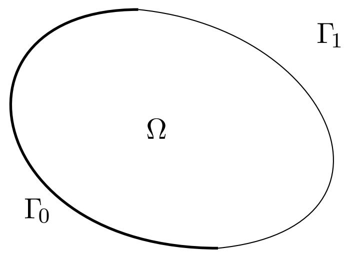
Pour des régularités plus élevées, ce théorème se généralise sous la forme

Théorème 32. *Soit k un entier ≥ 1 ; on suppose Ω de classe $C^{k+1,1}$, $a \in C^k(\bar{\Omega})$, $f \in H^k(\Omega)$; alors, si l'on est dans le cas du problème de Dirichlet avec $u_0 \in H^{k+2}(\Omega)$, ou si l'on est dans le cas du problème de Neumann avec $g = 0$, on a $u \in H^{k+2}(\Omega)$.*

Sous-exemple 1.3. (Problème mêlé) On suppose maintenant que Ω est borné de classe $C^{0,1}$ et que sa frontière $\partial\Omega$ est la réunion de deux parties fermées Γ_0 et Γ_1, dont l'intersection $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$ est de mesure nulle (par rapport à la mesure $d\sigma$ sur $\partial\Omega$).
On fait le choix

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \; ; \gamma_0 v_{|\Gamma_0} = 0\}$$

et on suppose Γ_0 de mesure superficielle non nulle. On considère le problème



$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{trouver } u \in u_0 + V \quad \text{tel que} \\ \forall\, v \in V, \quad a(u,v) = (\ell, v). \end{cases}$$

Il est clair que $V \cap \mathbb{P}_0 = \{0\}$. La forme bilinéaire $a(.,.)$ est V-elliptique, même si $\alpha = 0$; donc le problème (P) admet une solution et une seule. On a l'équivalence (formelle)

$$(P) \overset{\text{form.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -\Delta u + au = f, \quad \text{dans } \Omega, \\ u = u_0, \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g, \quad \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Preuve. On a encore $\mathcal{D}(\Omega) \subset V$ donc, si u est solution de (P), l'égalité $-\Delta u + au = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. De plus cette égalité entraîne, si la solution u est suffisamment régulière et si $v \in V$,

$$a(u,v) - (\ell, v) = \int_{\partial\Omega} (\tfrac{\partial u}{\partial \nu} - g)\, v \, d\sigma = \int_{\Gamma_1} (\tfrac{\partial u}{\partial \nu} - g)\, v \, d\sigma.$$

On en déduit l'équivalence formelle en adaptant la démonstration du lemme 30. $\square$

Les théorèmes de régularité cités précédemment ne se généralisent pas au problème mêlé ; le changement du type de condition limite à l'interface entre Γ_0 et Γ_1 engendre des singularités.

Exemple 2. (Le problème de l'obstacle) Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^2$ de classe $C^{0,1}$. On prend $W = H^1(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ et on considère des données $u_0 \in H^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^2(\Omega)$; on suppose $u_0 \geq \psi$ sur la frontière $\partial\Omega$, on définit les formes bilinéaires et linéaires

$$a(u,v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u . \vec{\nabla} v \, dx, \qquad (f,v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx,$$

enfin on pose

$$J(v) = \frac{1}{2}\,a(v,v) - (f,v), \qquad K = \{v \in H^1(\Omega)\,;\gamma_0 v = \gamma_0 u_0,\ \text{et}\ v(x) \geq \psi(x)\ \text{dans}\ \Omega\}.$$

On considère le problème

$$(\mathcal{E})\ \begin{cases} \text{trouver } u \in K \quad \text{tel que} \\ \forall\, v \in K, \quad J(u) \leq J(v). \end{cases}$$

On vérifie facilement que K est un sous ensemble convexe fermé de W, que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue symétrique sur $W \times W$, $(f,.)$ une forme linéaire continue sur W, mais on n'est pas en mesure d'utiliser directement le théorème 23, car $a(.,.)$ n'est pas W-elliptique. Notons que $a(.,.)$ est par contre V-elliptique. Le changement de variables

$$u = u_0 + w, \qquad \tilde{J}(v) = J(u_0+v) - J(u_0), \qquad \tilde{K} = \{v \in H_0^1(\Omega)\,; u_0 + v \geq \psi,\ \text{dans}\ \Omega\},$$

ramène le problème $(\mathcal{E})$ au problème équivalent, “ $w \in \tilde{K}$ et $\tilde{J}(w) \leq \tilde{J}(v)$, pour tout $v \in \tilde{K}$”. Le convexe $\tilde{K}$ étant fermé dans V, on peut maintenant appliquer au nouveau problème le théorème 23. On en déduit ainsi que le problème $(\mathcal{E})$ a une solution et une seule et qu'il est équivalent à l'inéquation variationnnelle

$$(\mathcal{P})\ \begin{cases} \text{trouver } u \in K \quad \text{tel que} \\ \forall\, v \in K, \quad a(u, v-u) \geq (f, v-u). \end{cases}$$

On obtient maintenant l'interprétation formelle

$$(P) \overset{\text{form.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -\Delta u - f \geq 0 \text{ dans } \Omega, \quad u \geq \psi \quad \text{dans } \Omega, \qquad u = u_0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \text{et } (u-\psi)(-\Delta u - f) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Preuve. Précisons tout d'abord que, pour une distribution T, on écrit $T \geq 0$ ssi, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\varphi \geq 0$, on a $\langle T, \varphi\rangle \geq 0$. En reprenant la démonstration du lemme 4, on vérifie facilement que lorsque $T \in L^1_{loc}(\Omega)$, cette définition coïncide avec la définition habituelle de la positivité pour les (classes de) fonctions. D'autre part, en supposant $u \in H^2(\Omega) \cap K$, $v \in K$ (donc $v - u \in H_0^1(\Omega)$), on peut écrire

$$a(u, v-u) - (f, v-u) = \int_\Omega (-\Delta u - f)(v-u)\,dx.$$

a)“ $\Longrightarrow$ ” Pour tout $\varphi \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $u + \varphi \in K$, donc $\int_\Omega(-\Delta u - f)\,\varphi\,dx \geq 0$, d'où $-\Delta u - f \geq 0$. Cela montre la première ligne du membre de droite dans l'implication. Soit $\Omega_\ell = \{x\,; u(x) > \psi(x)$, c'est un ouvert (si $u \in H^2(\Omega)$) puisque $u - \psi$ est alors continu. Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\ell)$, on a alors $u - \psi > 0$ sur le support (compact) de φ, $u - \psi$ est donc uniformément minoré par un nombre > 0 sur ce compact. Il en résulte l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon|\varphi| \leq u - \psi$ sur Ω, d'où $u + \varepsilon\varphi \in K$ et $u - \varepsilon\varphi \in K$. On a par conséquent $a(u, \varepsilon\varphi) \geq (f, \varepsilon\varphi)$ et $a(u, -\varepsilon\varphi) \geq (f, -\varepsilon\varphi)$, d'où $a(u,\varphi) = (f,\varphi)$. On a ainsi montré montré que $-\Delta u = f$ dans Ω_ℓ, c'est à dire aux points de Ω où $u \neq \psi$.

b)“$\Longleftarrow$” Soit $v \in K$. Sur Ω_ℓ on a $u \neq \psi$, d'où $-\Delta u = f$, donc $(-\Delta u - f)(v-u) = 0$. Dans $\Omega \setminus \Omega_\ell$ on a $v - u = v - \psi \geq 0$, donc $(-\Delta u - f)(v - u) \geq 0$. Il en résulte

$$a(u, v-u) - (f, v-u) = \int_\Omega (-\Delta u - f)(v-u)\,dx \geq 0.$$

□

Exemple 3. Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^2$ de classe $C^{0,1}$. On utilise maintenant l'espace $V = \{v \in H^1(\Omega)\,;\int_\Omega v(x)\,dx = 0\}$, et on considère une donnée $f \in L^2(\Omega)$. On reprend les formes bilinéaires et linéaires

$$a(u,v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v\,dx, \qquad (f,v) = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx.$$

On considère enfin le problème

$$(P) \begin{cases} \text{trouver } u \in V \quad \text{tel que} \\ \forall\, v \in V, \quad a(u,v) = (f,v). \end{cases}$$

Ce problème admet une solution et une seule puisque $V \cap \mathbb{P}_0 = \{0\}$. On a l'équivalence

$$(P) \overset{\text{form.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -\Delta u = f - c, \quad \text{dans } \Omega, \text{ avec } c \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_\Omega u(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad c = \frac{\int_\Omega f(x)\,dx}{\int_\Omega dx}. \end{cases}$$

Preuve. On n'a plus $\mathcal{D}(\Omega) \subset V$, mais on sait que, si une distribution T vérifie $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant $\int_\Omega \varphi(x)\,dx = 0$, alors la distribution est constante (voir la démonstration du corollaire 6. On a donc, si u est solution de (P), l'égalité $-\Delta u + au = f - c$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si cette égalité est vérifiée, si la fonction u est suffisamment régulière pour que les formules de Gauss soient justifiées, alors

$$a(u,v) - (f,v) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v\, d\sigma - c\int_\Omega v(x)\,dx.$$

Si u est solution de (P), on a donc $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v\, d\sigma = 0$, pour tout $v \in V$; cette relation est évidemment vraie aussi pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc pour tout $v \in H^1(\Omega) = V + \mathcal{D}(\Omega)$. En utilisant le lemme 30, cela montre que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. D'autre part on a

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_\Omega \Delta u\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx - c\int_\Omega dx,$$

ce qui donne la relation sur c. La réciproque est immédiate. $\square$

Remarque. Dans le cas particulier où la donnée vérifie $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$, on a

$$(P) \overset{\text{form.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \text{et} \quad \int_\Omega u(x)\,dx = 0. \end{cases}$$

Exemple 4. On considère ici les espaces

$$W = \{v \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)\,; \frac{\partial v}{\partial x_1} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x_2} \in L^2(\mathbb{R}^2)\}, \qquad V = \{v \in W\,; \int_{B(0,1)} v(x)\,dx = 0\},$$

$B(0,1)$, désignant la boule unité du plan $\mathbb{R}^2$. Remarquons d'abord que l'espace V muni du produit scalaire $a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^2} \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v\,dx$ (et donc de la norme $|\,.\,|_{1,\mathbb{R}^2}$) est un espace de Hilbert.

Preuve. C'est bien un produit scalaire puisque $a(v,v)=0$ entraîne $v=0$. Soit $R \geq 1$ un réel, et V_R l'espace des restrictions à la boule $B(0,R)$ des fonctions de V. Puisque $V_R \cap \mathbb{P}_0 = \{0\}$, il existe une constante C_R telle que

$$\forall\, v \in V, \qquad \|v\|_{L^2(B(0,R))} \leq C_R\, |v|_{1,B(0,R)} \leq C_R\, |v|_{1,\mathbb{R}^2}.$$

Il en résulte que, si u_n est une suite de Cauchy dans V, (en restriction à la boule) u_n est de Cauchy dans $H^1(B(0,R))$ qui est complet. On en déduit aisément que V est complet. □

On se donne maintenant une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$; on suppose de plus que f est à support compact, et que $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx = 0$. On considère enfin le problème

$$(P)\ \begin{cases} \text{trouver } u \in V \quad \text{tel que} \\ \forall\, v \in V, \quad a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,v(x)\,dx. \end{cases}$$

Théorème 33. *Le problème (P) admet une solution et une seule ; on a l'équivalence*

$$(P) \Longleftrightarrow \begin{cases} u \in V \quad \textit{et} \\ -\Delta u = f, \quad \textit{dans } \mathbb{R}^2, \end{cases} .$$

D'autre part on a $\vec{\nabla} u \in \left(H^1(\mathbb{R}^2)\right)^2$ *et* $|u|_{2,\mathbb{R}^2} \leq |f|_{0,\mathbb{R}^2}$ *; plus généralement, si on suppose* $f \in H^k(\mathbb{R}^2)$*, alors on a* $\vec{\nabla} u \in \left(H^{k+1}(\mathbb{R}^2)\right)^2$*.*

Démonstration. a) Soit R tel que support$(f) \subset B(0,R)$; on a alors, pour $v \in V$,

$$|\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,v(x)\,dx| \leq |f|_{0,\mathbb{R}^2}\, |v|_{0,B(o,R)} \leq C_R\, |f|_{0,\mathbb{R}^2}\, |v|_{1,\mathbb{R}^2},$$

la forme linéaire est donc continue et le théorème de Lax-Milgram (cf. corollaire 29) assure l'existence et l'unicité de la solution. Remarquons que $a(u,1) = 0 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,1\,dx$; si u est solution de (P), on a donc $a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,v(x)\,dx$ pour tout $v \in V + \{1\} = W$. En particulier,

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \qquad \langle -\Delta u - f, \varphi\rangle = a(u,\varphi) - \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0,$$

d'où $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Nous admettons le résultat "$\mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \cap V$ est dense dans V", qui montre l'implication réciproque "$\Longleftarrow$".

b) Comme précédemment le problème

$$\begin{cases} \text{trouver } g_1 \in V \quad \text{tel que} \\ \forall\, v \in V, \quad a(g_1,v) = -\int_{\mathbb{R}^2} f\, \frac{\partial v}{\partial x_1}\,dx, \end{cases}$$

admet une solution unique, et la relation précédente est vraie aussi $\forall\, v \in W$.

Introduisons maintenant les notations $v_h = v(.+he_1)$, c'est à dire $v_h(x_1,x_2) = v(x_1+h,x_2)$. On vérifie facilement (par des arguments de densité) les propriétés

- si $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, alors $v_h \to v$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, quand $h \to 0$,
- si $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$, alors $v_h \to v$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, quand $h \to 0$,
- si $v \in W$, alors $v_h \in W$ et $v_h(x) - v(x) = \displaystyle\int_0^h \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1+t,x_2)\,dt$,
- $\forall\, u,v \in W, \qquad a(u_h,v) = a(u,v_{-h})$.

On obtient ainsi, si u est solution de (P) et $v \in W$,

$$\begin{aligned}
a(u_h - u, v) &= -a(u, v - v_{-h}) = -\int_{\mathbb{R}^2} f\,(v - v_{-h})\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2) \int_0^h \tfrac{\partial v}{\partial x_1}(x_1 - t, x_2)\,dt\;dx \\
&= -\int_0^h \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\,\tfrac{\partial v}{\partial x_1}(x_1 - t, x_2)\,dx\;dt \\
&= \int_0^h a(g_1, v_{-t})\,dt = a\Big(\int_0^h g_1(.+te_1)\,dt, v\Big).
\end{aligned}$$

Posons, pour $h \neq 0$,

$$c_h = \int_0^1 \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1} - g_1\Big)(x + t\,h\,e_1)\,dt = \frac{u_h - u}{h} - \int_0^1 g_1(x + t\,h\,e_1)\,dt.$$

On a montré que $a(c_h, v) = 0$, pour tout $v \in W$; or $c_h \in W$ donc c_h est une constante. D'autre part il est clair que $c_h \to \frac{\partial u}{\partial x_1} - g_1$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ (quand $h \to 0$), d'où $\frac{\partial u}{\partial x_1} - g_1 =$ constante. Par suite

$$\tfrac{\partial u}{\partial x_1} \in W \cap L^2(\mathbb{R}^2) = H^1(\mathbb{R}^2), \quad \text{et} \quad a(\tfrac{\partial u}{\partial x_1}, v) = -\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\tfrac{\partial v}{\partial x_1}\,dx, \quad \forall\, v \in W,$$

$$\text{de même} \qquad \tfrac{\partial u}{\partial x_2} \in H^1(\mathbb{R}^2), \qquad \text{et} \quad a(\tfrac{\partial u}{\partial x_2}, v) = -\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\tfrac{\partial v}{\partial x_2}\,dx, \quad \forall\, v \in W.$$

En utilisant que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \big(|\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}|^2 + 2|\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}|^2 + |\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}|^2\big)\,dx &= a(\tfrac{\partial u}{\partial x_1}, \tfrac{\partial u}{\partial x_1}) + a(\tfrac{\partial u}{\partial x_2}, \tfrac{\partial u}{\partial x_2}) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,\Delta u\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2\,dx,
\end{aligned}$$

on obtient $|u|_{2,\mathbb{R}^2} \le |f|_{0,\mathbb{R}^2}$.

c) Si maintenant on suppose de plus que $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$, on a alors $a(g_1, v) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial x_1}\,v\,dx$, $\forall\, v \in V$ et $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx = 0$. Donc d'après ce qui précède $\vec{\nabla} g_1 \in (H^1(\mathbb{R}^2))^2$, d'où $\vec{\nabla} u \in (H^2(\mathbb{R}^2))^2$. Le résultat général s'obtient par récurrence.

□

Hypoellipticité du laplacien. Soit maintenant Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 34. *Les conditions "$u \in H^1_{loc}(\Omega)$ et $\Delta u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$" impliquent $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on pose $\tilde{u} = u\psi$ dans Ω, $\tilde{u} = 0$ autrement. Il est clair que $\tilde{u} \in W$. Soit de plus $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\begin{aligned}
a(\tilde{u}, \varphi) &= \int_\Omega \psi\,\vec{\nabla} u.\vec{\nabla}\varphi\,dx + \int_\Omega u\,\vec{\nabla}\psi.\vec{\nabla}\varphi\,dx \\
&= \int_\Omega \vec{\nabla} u.\nabla(\vec{\varphi\psi})\,dx - 2\int_\Omega \varphi\,\vec{\nabla} u.\vec{\nabla}\psi\,dx - \int_\Omega u\,\Delta\psi\,\varphi\,dx \\
&= \langle \Delta u, \varphi\psi\rangle - 2\int_\Omega \varphi\,\vec{\nabla} u.\vec{\nabla}\psi\,dx - \int_\Omega u\,\Delta\psi\,\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} f\,\varphi\,dx,
\end{aligned}$$

en posant $f = -u\,\Delta\psi - \vec{\nabla} u.\vec{\nabla}\psi$ dans Ω, $f = 0$ en dehors. De l'hypothèse $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, on déduit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. De plus, notons par φ_0 une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui vaut 1 sur le support de ψ, une telle fonction existe d'après le lemme 2 et vaut 1 sur le support de f ; on a alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} f\,\varphi_0\,dx = a(\tilde{u}, \varphi_0) = a(\tilde{u}, 1) = 0.$$

On peut donc appliquer les résultats du théorème précédent, on a ainsi $\tilde{u} = u\psi \in H^2(\mathbb{R}^2)$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

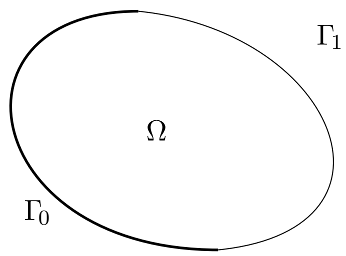
De même, pour $k \geq 0$, $u \in H^{k+1}_{loc}(\Omega)$ entraîne $f \in H^k(\mathbb{R}^2)$. D'après le théorème précédent, cela implique $\nabla\tilde{u} \in (H^{k+1}(\mathbb{R}^2))^2$, donc $u \in H^{k+2}_{loc}(\Omega)$. Cela montre par récurrence que $u \in H^k_{loc}(\Omega)$ pour tout k, d'où le résultat final par les théorèmes d'inclusion de Sobolev. $\square$

Remarque. Il est en fait possible de démontrer le résultat plus général si la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifie $\Delta T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $T \in C^\infty(\Omega)$.

Exemple 5. On suppose, comme dans le problème mêlé de l'exemple 1, que Ω est un ouvert (borné) de $\mathbb{R}^d$, de classe $C^{0,1}$ et que sa frontière Γ est la réunion de deux parties fermées Γ_0 et Γ_1, dont l'intersection $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$ est de mesure nulle (par rapport à la mesure $d\sigma$ sur Γ).

On reprend les espaces $W = H^1(\Omega)$, $V = \{v \in W\ ; \gamma_0 v_{|\Gamma_0} = 0\}$,
et on considère le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{trouver } u \in u_0 + V, \text{ tel que} \\ \forall\, v \in V, \quad a(u,v) = (f,v), \end{cases}$$



avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\ \partial_i u\ \partial_j v + a_0\ u\ v\}\ dx,$$

$$(\ell, v) = \int_\Omega f\ v\ dx + \int_{\Gamma_1} g\ \gamma_0 v\ d\sigma(x).$$

Les fonctions a_{ij}, a_0 sont données dans $C^0(\bar{\Omega})$, f dans $L^2(\Omega)$, g dans $L^2(\Gamma_1)$; la fonction u_0 est donnée dans $H^1(\Omega)$. On suppose de plus que les coefficients a_{ij} vérifient la condition d'ellipticité : $\exists\,\alpha_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in \bar{\Omega},\ \forall \xi_1, ..., \xi_d \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{i=1,j=1}^{d} a_{ij}(x)\ \xi_i\ \xi_j\ \geq \alpha_1 \sum_{i=1}^{d}\ \xi_i^2, \tag{6}$$

et que la fonction a_0 satisfait

$$\forall x \in \bar{\Omega}, a_0(x) \geq \alpha_2 \geq 0. \tag{7}$$

Remarques.

1) Nous avons vu lors de l'exemple 1 que V est un sous-ensemble fermé de W. Γ_0 n'est pas de mesure nulle, $V \cap \mathbb{P}_0 = 0$; on munira alors indifféremment V de l'une des deux normes équivalentes $|\,.\,|_{1,\Omega}$ ou $\|\,.\,\|_{1,\Omega}$. Si Γ_0 est de mesure nulle, alors $W = V = H^1(\Omega)$, (on prendra alors $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_0 = \emptyset$), V sera muni de la norme $\|\,.\,\|_{1,\Omega}$. On supposera désormais que, soit "$\alpha_2 > 0$", soit "$\alpha_2 \geq 0$ et mes $(\Gamma_0) \neq 0$" ; il résulte alors de ce qui précède que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est V-elliptique.

2) Il est facile de voir que $a(u,v)$ est continue sur $W \times W$, donc a fortiori sur $W \times V$:

$|a(u,v)| \leq M \ \|u\|_{1,\Omega} \ \|v\|_{1,\Omega}$.

Nous avons déjà montré la continuité de la forme linéaire à l'exemple 1.

Il résulte du corollaire 29, que le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution et une seule.

Interprétation de $(\mathcal{P})$.

Introduisons maintenant les notations

$$\mathcal{A}u = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0\ u, \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \nu_j.$$

En supposant que la solution u, les fonctions a_{ij} et la frontière Γ sont suffisamment régulières, on déduit de la formule de Gauss, que, pour tout $v \in V$

$$a(u,v) - \int_\Omega \mathcal{A}u\ v\ dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\ \gamma_0 v\ d\sigma = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\ \gamma_0 v\ d\sigma.$$

En procédant comme dans l'exemple 1, on obtient l'équivalence formelle

$$(P) \overset{\text{form.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \mathcal{A}u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = g, & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Cas particuliers.

Sous-exemple 5.1. *Problème de Dirichlet.* Il correspond à $\Gamma_1 = \emptyset$, donc $\Gamma_0 = \Gamma$ et $V = H_0^1(\Omega)$:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \gamma_0 u = \gamma_0 u_0 \text{ sur } \Gamma \text{ et} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u,v) = (f,v). \end{cases}$$

Ce problème équivaut à

$$\begin{cases} \mathcal{A}\ u &= f_0 & \text{dans } \Omega, \\ u &= u_0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Lorsque $u_0 = 0$, on parle du problème de Dirichlet homogène.

Sous-exemple 5.2. *Problème de Neumann.* Il correspond à $\Gamma_0 = \emptyset$, donc $\Gamma = \Gamma_1$ et $V = W = H^1(\Omega)$:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u,v) = (f,v). \end{cases}$$

Ce problème équivaut à

$$\begin{cases} \mathcal{A}\ u &= f_0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} &= g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Lorsque $g = 0$, on parle de problème de Neumann homogène.

Dans le cas général de l'exemple 1, on parle de "problème mêlé".

Nous admettrons les théorèmes de régularité suivants :

Théorème 35. *On suppose que Ω est convexe ou de classe $C^{1,1}$, que les fonctions $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $f_0 \in L^2(\Omega)$; alors, si l'on est dans le cas du problème de Dirichlet avec $u_0 \in H^2(\Omega)$, ou si l'on est dans le cas du problème de Neumann avec $g = 0$, on a $u \in H^2(\Omega)$, de plus*

$$\begin{array}{rrcl} \textit{dans le premier cas} & \|u\|_{2,\Omega} & \leq & C(\|u_0\|_{2,\Omega} + \|f_0\|_{0,\Omega}), \\ \textit{et dans le deuxième cas} & \|u\|_{2,\Omega} & \leq & C\|f_0\|_{0,\Omega}, \end{array}$$

(où la constante C ne dépend que de Ω, des a_{ij} et de a_0).

Pour des régularités plus élevées, ce théorème se généralise sous la forme

Théorème 36. *Soit k un entier ≥ 1 ; on suppose Ω de classe $C^{k+1,1}$, $a_{ij} \in C^{k,1}(\bar{\Omega})$, $a_0 \in C^k(\bar{\Omega})$, $f_0 \in H^k(\Omega)$; alors, si l'on est dans le cas du problème de Dirichlet avec $u_0 \in H^{k+2}(\Omega)$, ou si l'on est dans le cas du problème de Neumann avec $g = 0$, on a $u \in H^{k+2}(\Omega)$.*

Exemple 6. Le système de l'élasticité.

Comme dans l'exemple précédent Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, ($d = 2$ ou 3) ; la frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ est la réunion de deux parties fermées d'intersection de mesure nulle ; Ω représente un corps élastique homogène isotrope au repos. Notons par $\underset{\sim}{v}(x)$ le déplacement du point $x \in \Omega$ lors d'une déformation. Si on exerce sur le corps élastique la force volumique $\underset{\sim}{f}_0$ en chaque point x de Ω et la force surfacique $\underset{\sim}{g}$ en chaque point de Γ_1, l'énergie potentielle élastique du corps $J(\underset{\sim}{v})$ (dans l'hypothèses des petits déplacements) s'écrit

$$J(\underset{\sim}{v}) = \frac{1}{2} a(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{v}) - (\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{g}),$$

où (on utilise la convention de sommation des indices répétés)

$$a(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}) = \int_\Omega [\lambda \text{ div } \underset{\sim}{u} \text{ div } \underset{\sim}{v} + 2\mu \ \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{u}) \ \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{v})] \ dx,$$

l'énergie de déformation est exprimée par la forme bilinéaire $\frac{1}{2}a(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{v})$, et l'énergie potentielle des forces extérieures est donnée par

$$(\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v}) = \int_\Omega \underset{\sim}{f}_0(x) \ \underset{\sim}{v}(x) \ dx + \int_{\Gamma_1} \underset{\sim}{g}(x) \ \underset{\sim}{v}(x) \ d\sigma(x).$$

Les coefficients $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$ sont les coefficients de Lamé du solide,

$\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{u}) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\big)$ désigne le tenseur des déformations,

div $\underset{\sim}{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$;

on notera aussi

$$\sigma_{ij}(\underset{\sim}{u}) = \lambda \text{ div}(\underset{\sim}{u}) \ \delta_{ij} + 2\mu \ \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{u})$$

le tenseur des contraintes. Le corps élastique collé le long de Γ_0 prend la position d'équilibre qui minimise $J(\underset{\sim}{v})$ parmi toutes les positions possibles, i.e. celles qui correspondent à un déplacement $\underset{\sim}{v} = 0$ le long de Γ_0.

On introduit l'espace des déplacements admissibles

$$V = \{ \ \underset{\sim}{v} = (v_1, ..., v_d); v_i \in H^1(\Omega), \gamma_0 v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

et on le munira de la norme $\| \underset{\sim}{v} \|_{1,\Omega} = \big(\sum_{i=1}^d \|v_i\|_{1,\Omega}^2 \big)^{1/2}$.

Lemme 37. *On suppose que Γ_0 est de mesure (superficielle) non nulle ; alors la forme bilinéaire $a(.,.)$ est V-elliptique.*

Démonstration (très partielle). Puisque nous supposons $\mu > 0$, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \underset{\sim}{v} \in V, \quad \sum_{i,j=1}^{d} \| \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{v}) \|_{0,\Omega}^2 \geq C \| \underset{\sim}{v} \|_{1,\Omega}^2$$

a) Vérifions d'abord que $\| \underset{\sim}{v} \| = \big(\sum_{i,j=1}^{d} \ \|\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{v})\|_{0,\Omega}^2 \big)^{1/2}$ définit bien une norme sur V. Il suffit de montrer que $\| \underset{\sim}{v} \| = 0$ entraîne $\underset{\sim}{v} = 0$.

Définissons l'ensemble $\mathcal{R}$ des déplacements rigides

$$\mathcal{R} = \{ \underset{\sim}{v} \in (H^1(\Omega))^d ; \ \forall i, j, \quad \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{v}) = 0 \}.$$

On vérifie simplement que

$$\text{pour } d = 2, \ \mathcal{R} = \{ \underset{\sim}{v} \ ; \ \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{a} + b \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{a} \in \mathbb{R}^2, \ b \in \mathbb{R} \},$$

$$\text{et, pour } d = 3, \quad \mathcal{R} = \{ \underset{\sim}{v} \ ; \ \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{a} + b \wedge \underset{\sim}{x}, \quad \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^3 \}.$$

Donc, si Γ_0 est de mesure superficielle non nulle, l'ensemble des déplacements rigides appartenant à V est réduit à $\{0\}$.

b) Pour montrer l'inégalité ci-dessus, on procède ensuite comme dans la preuve du corollaire 14, en faisant usage de l'inégalité de Korn que nous admettons

$$\forall \underset{\sim}{v} \in (H^1(\Omega))^d, \qquad \| \underset{\sim}{v} \|_{1,\Omega}^2 \leq C(\Omega) \big(\sum_{i,j=1}^{d} \| \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{v}) \|_{0,\Omega}^2 + \| \underset{\sim}{v} \|_{0,\Omega}^2 \big).$$

□

On déduit du lemme 37 et du théorème 23 que le problème

$$(\mathcal{E}) \qquad \begin{cases} \text{trouver } \underset{\sim}{u} \in V \text{ tel que} \\ \forall \underset{\sim}{v} \in V, \quad J(\underset{\sim}{u}) \leq J(\underset{\sim}{v}), \end{cases}$$

a une solution et une seule ; ce problème est équivalent à la formulation variationnelle

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{trouver } \underset{\sim}{u} \in V \text{ tel que} \\ \forall \underset{\sim}{v} \in V, \quad a(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v}). \end{cases}$$

Si $\underset{\sim}{u}$ est solution de $(\mathcal{P})$, on a

$$\forall \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^d \quad \int_\Omega \sigma_{ij}(\underset{\sim}{u}) \ \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \Big) \ dx = \int_\Omega f_i \ \varphi_i \ dx.$$

En tenant compte de la symétrie du tenseur des contraintes, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, on obtient

$$\forall \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega) \quad - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \big(\sigma_{ij}(\underset{\sim}{u}) \big) \ \varphi_i \ dx = \int_\Omega f_i \ \varphi_i \ dx.$$

Ainsi, on déduit

$$- \frac{\partial}{\partial x_j} \big(\sigma_{ij}(\underset{\sim}{u}) \big) \ = f_i, \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, d, \tag{8}$$

ce que l'on écrit aussi de manière condensée $-\underset{\sim}{\mathrm{div}}\ \underset{\approx}{\sigma}(\underset{\sim}{u}) = \underset{\sim}{f}$ dans Ω.

Puisque $\underset{\sim}{u}$ satisfait (8), l'équation variationnelle

$$\forall \underset{\sim}{v} \in V, \quad a(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v})$$

devient

$$\forall \underset{\sim}{v} \in V, \quad \int_\Omega \sigma_{ij}(\underset{\sim}{u})\ \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{v})\ dx = \int_\Omega -\frac{\partial}{\partial x_j}\big(\sigma_{ij}(\underset{\sim}{u})\big)\ v_i\ dx + \int_{\Gamma_1} g_i\ v_i\ d\sigma(x)$$

ou encore

$$\forall \underset{\sim}{v} \in V, \quad \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\sigma_{ij}(\underset{\sim}{u})\ v_i\big)\ dx = \int_{\Gamma_1} g_i\ v_i\ d\sigma(x),$$

i.e.

$$\forall \underset{\sim}{v} \in V, \quad \int_{\Gamma_1} \big(\sigma_{ij}(\underset{\sim}{u})\ \nu_j - g_i\big) v_i\ d\sigma(x) = 0.$$

Ainsi on obtient les équivalences

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -\underset{\sim}{\mathrm{div}}\ \underset{\approx}{\sigma}(\underset{\sim}{u}) & = & \underset{\sim}{f} & \text{dans } \Omega, \\ \underset{\sim}{u} & = & \underset{\sim}{0} & \text{sur } \Gamma_0, \quad \text{(encastrement)}, \\ \underset{\approx}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{\nu} & = & \underset{\sim}{g} & \text{sur } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

10 Annexe. Théorèmes de densité

Dans ce paragraphe nous supposons $1 \leq p < +\infty$; donc $p \neq \infty$. Le premier lemme ne concerne que les ouverts Ω non bornés.

Lemme 38. *Les fonctions de $W^{m,p}(\Omega)$, à support borné dans $\bar{\Omega}$, sont denses dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Démonstration. Nous ne la ferons que pour $m = 1$, le cas général se traitant de la même manière. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\theta(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq 1$; posons $\theta_M(x) = \theta(x/M)$, $c_i = \|\partial_i\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$, où ∂_i désigne la dérivée partielle par rapport à la $i$ème variable. On vérifie aisément que, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ alors la fonction $u_M = \theta_M u$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ et l'on a

$$\partial_i u_M - \partial_i u = (\theta_M - 1)\partial_i u + (\partial_i \theta_M) u$$

le théorème de la convergence dominée montre que $(\theta_M - 1)\partial_i u \to 0$ dans $L^p(\Omega)$ (quand $M \to +\infty$) ; de plus $\|\partial_i\theta_M\|_{L^\infty(\Omega)} = c_i/M \to 0$; on en déduit que $\partial_i u_M - \partial_i u \to 0$ dans $L^p(\Omega)$. On a de même $u_M - u \to 0$ dans $L^p(\Omega)$, ce qui montre que u_M converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. □

Remarque. Ce lemme est faux si $p = \infty$, puisque, dans un ouvert Ω non borné, la fonction constante égale à 1 ne peut être la limite uniforme de fonctions à support compact.

Lemme 39. *Les fonctions de $W^{m,p}(\Omega)$ à support compact dans Ω, appartiennent à $W_0^{m,p}(\Omega)$*

Démonstration. Nous nous limiterons encore au cas $m = 1$. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ayant pour support un compact $K \subset \Omega$; soit $\varepsilon_0 = \mathrm{d}(K; \Omega^c)$. Pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on pose $u_\varepsilon = \tilde{u} * \theta_\varepsilon$, où $\tilde{u}$ est le prolongement de u par 0 en dehors de K et θ_ε est défini au début du paragraphe 1. On a $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et support $u_\varepsilon \subset K_\varepsilon = \{x;\ \mathrm{d}(x, K) \leq \varepsilon\}$, donc $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$; de plus

$$\partial_i u_\varepsilon = \tilde{u} * \partial_i\theta_\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{9}$$

Compte tenu du théorème 1, il suffit de montrer que

$$\partial_i u_\varepsilon = \widetilde{\partial_i u} * \theta_\varepsilon, \tag{10}$$

pour obtenir la convergence de u_ε vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Pour cela on remarque d'abord que, si $\partial_i u$ est la dérivée de u au sens des distributions sur Ω, son prolongement à $\mathbb{R}^d$ par 0 en dehors de Ω, $\widetilde{\partial_i u}$, coïncide avec la dérivée $\partial_i \tilde{u}$ de $\tilde{u}$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}^d$. En effet si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et si $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ est tel que $\theta = 1$ sur K, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}\ \partial_i \varphi\ dx = \int_K u\ \partial_i(\theta\varphi)\ dx = -\int_\Omega \partial_i u\ \theta\varphi\ dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \theta\widetilde{\partial_i u}\ \varphi\ dx$$

d'où $\partial_i \tilde{u} = \theta\widetilde{\partial_i u}$, ($\forall\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\theta_{|K} = 1$) ; on a donc bien $\partial_i \tilde{u} = \widetilde{\partial_i u}$.

Maintenant, nous allons vérifier (10); soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on déduit de (9)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_i u_\varepsilon(x)\ \varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}(y)\ \partial_i\theta_\varepsilon(x-y)\ \varphi(x)\ dy\ dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}(y)\ \partial_i\varphi_\varepsilon(y)\ dy,$$

avec $\varphi_\varepsilon(y) = \int_{\mathbb{R}^d}\ \theta_\varepsilon(x-y)\ \varphi(x)\ dx$; or $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_i u_\varepsilon(x)\ \varphi(x)\ dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_i\tilde{u}(y)\ \varphi_\varepsilon(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_i\tilde{u}(y)\ \theta_\varepsilon(x-y)\varphi(x)\ dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_i\tilde{u} * \theta_\varepsilon)(x)\ \varphi(x)\ dx,\end{aligned}$$

ce qui montre (10). □

Corollaire 40. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, i.e. $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^d) = W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Cela résulte des deux lemmes précédents. □

Théorème 41. *Si Ω est fortement étoilé par rapport à un point, alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Démonstration. □

On suppose Ω fortement étoilé par rapport à l'origine. Pour $\lambda \in]1,\infty[$ on pose $\Omega_\lambda = \{\lambda x; x \in \Omega\}$ et $u_\lambda(x) = u(x/\lambda)$. On vérifie aisément que, si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, alors $u_\lambda \in W^{m,p}(\Omega_\lambda)$ et que $u_{\lambda|\Omega} \to u$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ quand λ tend vers 1. On peut trouver une fonction $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\theta = 1$ dans $\bar{\Omega}$ et $\theta = 0$ dans le complémentaire de Ω_μ pour un μ tel $1 < \mu < \lambda$. Si u a un support borné dans $\bar{\Omega}$, alors θu_λ a un support compact dans Ω_λ, donc $\theta u_\lambda \in W_0^{m,p}(\Omega_\lambda)$ d'après le lemme 39, et par suite $u_{\lambda|\Omega}$ est limite, dans $W^{m,p}(\Omega)$, de fonctions de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$; par suite il en est de même pour u. On conclut en utilisant le lemme 38.

Théorème 42. *Si Ω est fortement étoilé par rapport à un point, alors*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega);\ \tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)\},$$

où $\tilde{u}$ désigne le prolongement de u par zéro en dehors de Ω.

Démonstration. L'inclusion $\subset$ s'obtient aisément par la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{m,p}(\Omega)$. L'inclusion dans l'autre sens se déduit en utilisant la fonction u_λ du théorème précédent, mais maintenant avec $\lambda < 1$; le lemme 39 entraîne alors $u_\lambda \in W_0^{m,p}(\Omega)$ et on fait tendre λ vers 1. □

Remarque. L'utilisation d'une "partition de l'unité" permet d'étendre les deux derniers résultats au cas où Ω est localement fortement étoilé.