UN LABORATOIRE DE L'IRMAR : Géométrie Réelle, Calcul Formel et Complexité

Reconnaître Effectivement les Ensembles Algébriques Réels

Résumé

On cherche une méthode qui, étant donné un objet géométrique W, permet de savoir si W peut être décrit par des équations algébriques, à des changements qui ne modifient pas sa topologie près. On commence par préciser la question dans la première section, en faisant intervenir la notion de triangulation. On examine dans la deuxième section le cas des dimensions 1 et 2 ; dans ces cas on peut effectivement décider la réponse à la question, en utilisant les notions d'entrelacs et de caractéristique d'Euler. On termine dans la troisième section en donnant une idée d'outils plus sophistiqués qui permettent de présenter une méthode de décision en dimension 3, et de montrer que le problème est en pratique indécidable en dimension plus grande.

Les personnages principaux de cet article, à savoir les ensembles algébriques réels, sont des objets fondamentaux d'étude dans notre équipe. Toutefois, le sujet précis de l'article ne représente qu'une très petite partie de nos thèmes de travail, et les résultats cités sont dûs à des mathématiciens d'autres centres de recherche. Le choix du sujet est motivé par les raisons suivantes :

- Il mène à l'introduction de quelques notions importantes de topologie qui, on l'espère, peuvent se comprendre à l'aide de dessins.
- Un exemple, qui sera utilisé tout au long de l'article, permet d'illustrer de manière explicite les résultats présentés. (La lectrice est invitée à faire par elle-même les calculs sur cet exemple.)
- Il s'agit de recherches tout à fait actuelles : le premier résultat (le théorème de Sullivan) date de 1971, et les derniers résultats mentionnés n'ont pas encore eu le temps d'être publiés dans une revue au moment de la rédaction de cet article.

1 Introduction : Position du problème

Les *ensembles algébriques réels* sont les sous-ensembles d'un espace $\mathbf{R}^n$ décrits par un nombre fini d'équations

$$P_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = P_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \ ,$$

où les P_i sont des polynômes en n variables à coefficients réels. Remarquons qu'on obtient le même ensemble de solutions réelles si on remplace les k équations ci-dessus par l'unique

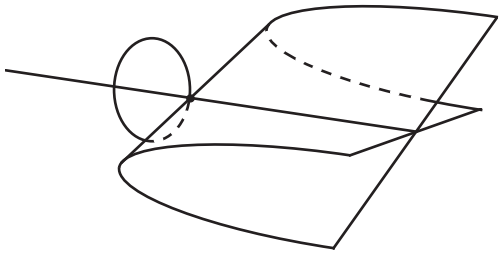


FIG. 1: L'ensemble algébrique V.

équation $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, où $P = P_1^2 + \cdots + P_k^2$; ceci n'est bien sûr pas le cas pour les solutions complexes. La sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}^3$ est un exemple simple d'ensemble algébrique réel. Un exemple un peu plus compliqué est le sous-ensemble V de $\mathbf{R}^3$ d'équation

$$(y^2 + (x^2 + z^2 + x)^2)\,(z^2 - xy^2) = 0\ .$$

Le premier facteur dans le côté gauche est l'équation du cercle dans le plan $y = 0$ de centre $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Le deuxième facteur est l'équation de la surface connue sous le nom de "parapluie de Whitney". La section de cette surface par un plan $x = c$ est une paire de droites pour $c > 0$, la droite $z = 0$ pour $c = 0$, et est réduite à l'origine du plan pour $c < 0$. Le parapluie a donc un manche qui est l'axe des x. L'ensemble algébrique V, représenté dans la figure 1, est la réunion du cercle et du parapluie de Whitney.

La question que nous considérons dans cet article est la suivante : peut-on caractériser topologiquement les ensembles algébriques réels ? Autrement dit : étant donné un sous-ensemble M de $\mathbf{R}^n$, peut-on décider s'il existe un ensemble algébrique réel Z tel que M soit homéomorphe à Z ? Rappelons qu'un homéomorphisme de M sur Z est une bijection continue dont l'inverse est aussi continu ; un homéomorphisme de M sur Z rend explicite le fait que "M et Z ont même topologie".

Nous nous intéresserons en fait aux ensembles algébriques réels *compacts*, c.-à-d. fermés et bornés (remarquer qu'un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{R}^n$ est toujours fermé dans $\mathbf{R}^n$). Ceci n'est pas une restriction très sérieuse, parce que tout sous-ensemble algébrique non borné de $\mathbf{R}^n$ peut être rendu compact par adjonction d'un seul point "à l'infini". Expliquons comment ceci peut se faire. Soit Z un sous-ensemble algébrique propre de $\mathbf{R}^n$, non borné. On peut supposer, quitte à faire une translation, que l'origine de $\mathbf{R}^n$ n'appartient pas à Z. Soit i l'inversion de centre l'origine par rapport à la sphère unité de $\mathbf{R}^n$. Soit $\dot{Z}$ la réunion de l'origine et de l'image $i(Z)$ de Z par l'inversion. Alors $\dot{Z}$ est un ensemble algébrique compact de $\mathbf{R}^n$. L'inversion induit un homéomorphisme de Z sur $\dot{Z}$ privé de l'origine. Du point de vue des équations, la construction que l'on vient d'expliquer consiste à remplacer les coordonnées x_i par $x_i / \sum_{i=1}^n x_i^2$ puis à chasser les dénominateurs.

Si on applique la construction à l'ensemble algébrique V décrit ci-dessus (il faut faire

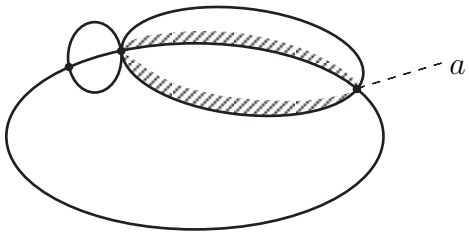


FIG. 2: Le compactifié $\dot{V}$ de V.

une translation pour que l'origine de $\mathbf{R}^3$ n'appartienne plus à V), on obtient un ensemble algébrique $\dot{V}$ représenté dans la figure 2. Le point ajouté pour compactifier est noté a sur cette figure.

Les ensembles algébriques réels compacts sont triangulables. Pour expliquer ce que ceci veut dire, il faut introduire la notion de simplexe et de complexe simplicial fini. Soient $a_0, \ldots, a_d$ $d+1$ points dans $\mathbf{R}^n$, non contenus dans un sous-espace affine de dimension $< d$. Le *d-simplexe* $[a_0, \ldots, a_d]$ est l'enveloppe convexe de ces $d+1$ points, c.-à-d. l'ensemble des points de la forme $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i$ avec $0 \leq \lambda_i \leq 1$ et $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1$. Voir sur la figure 3 quelques dessins de simplexes.

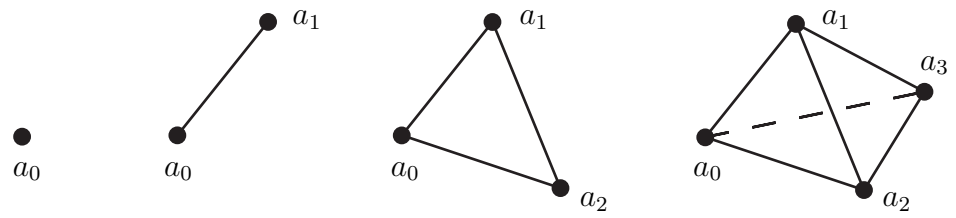


FIG. 3: 0, 1, 2 et 3-simplexes.

Les *faces* du simplexe $[a_0, \ldots, a_d]$ sont tous les simplexes $[a_{i_0}, \ldots, a_{i_k}]$ avec $0 \leq k < d$ et $0 \leq i_0 < \ldots < i_k \leq d$. Ainsi un 3-simplexe (tétraèdre) a 14 faces : 4 sont des 2-simplexes (qu'on appelle communément "faces"), 6 des 1-simplexes (les "arêtes") et 4 des 0-simplexes (les "sommets"). Un simplexe σ privé de ses faces s'appelle un *simplexe ouvert*; on le note σ°.

Un *complexe simplicial fini* dans $\mathbf{R}^n$ est une collection finie $K = (\sigma_i)_{i \in I}$ de simplexes dans $\mathbf{R}^n$ telle que l'intersection $\sigma_i \cap \sigma_j$ de deux simplexes distincts de K soit une face commune de σ_i et σ_j (cf. figure 4).

FIG. 4: À droite, un complexe simplicial. À gauche, ce n'en est pas un.

On note $|K|$ la réunion des σ_i pour σ_i dans K. Le sous-ensemble $|K|$ de $\mathbf{R}^n$ est compact. Un tel sous-ensemble $|K|$ s'appelle un *polyèdre*. Le théorème de triangulation des ensembles algébriques réels compacts est le résultat suivant.

Théorème 1 *Soit $W \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble algébrique compact. Il existe un complexe simplicial fini K dans $\mathbf{R}^n$ et un homeomorphisme $\Phi : |K| \to W$.*

On peut touver une démonstration du théorème de triangulation, ainsi que d'autres faits concernant les ensembles algébriques réels, dans les livres [BR] ou [BCR]. À titre d'exemple, la figure 5 montre un complexe simplicial qui triangule l'ensemble algébrique compact $\dot{V}$ de la figure 2. On voit sur la figure deux tétraèdres creux qui ont une arête en commun.

Le théorème de triangulation dit que tout ensemble algébrique réel compact a la topologie d'un polyèdre. Nous pouvons maintenant formuler le problème de caractérisation topologique des ensembles algébriques réels sous une forme plus précise et maniable :

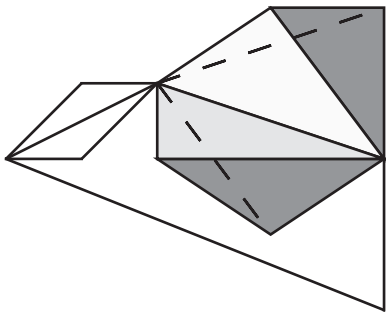


FIG. 5: Une triangulation de $\dot{V}$.

trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur un polyèdre $|K|$ pour qu'il soit homéomorphe à un ensemble algébrique réel.

2 Cas des dimensions 1 et 2

Examinons d'abord le cas de la dimension 1. On se demande si un polyèdre de dimension 1 (c'est un graphe composé de sommets et d'arêtes) est homéomorphe à une courbe algébrique réelle. La réponse est simple : il faut et il suffit qu'en chaque sommet arrivent un nombre *pair* d'arêtes[1].

La raison pour cette parité apparaît dans un cas particulier qui renferme l'essentiel du phénomène. Considérons une courbe algébrique réelle dans le plan de coordonnées (x, y), d'équation

$$P(x, y) = y^d + a_1(x)y^{d-1} + \cdots + a_d(x) = 0 \ ,$$

où $a_1(x), \ldots, a_d(x)$ sont des polynômes en x à coefficients réels, tels que $a_1(0) = \ldots = a_d(0) = 0$. Alors l'origine est le seul point de la courbe sur l'axe des y. L'équation $P(x, y) = 0$, considérée comme équation en y, a p racines réelles pour x petit positif, et n racines réelles pour x négatif et petit en valeur absolue. Comme l'équation est de degré d en y, il y a d racines complexes[2]. Les racines complexes non réelles vont par paires, avec leurs conjuguées. Donc les nombres p et n ont même parité que d. Toutes ces racines tendent vers 0 quand x tend vers 0. Arrivent donc à l'origine, au total, $n + p$ bouts de courbe. Comme n et p ont même parité, la somme $n + p$ est paire (cf. figure 6).

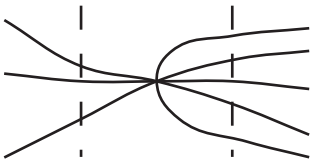


FIG. 6: La parité du nombre de racines réelles est la même des deux côtés.

Comment généraliser cette propriété de parité en dimension supérieure ? Il va falloir utiliser deux notions : celle d'entrelacs et celle de caractéristique d'Euler. Voyons d'abord la notion d'entrelacs.

[1] C'est aussi la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse tracer chaque composante connexe du graphe sans lever le crayon, sans passer deux fois sur la même arête, et en revenant à son point de départ.

[2] On suppose le discriminant de P par rapport à y non nul, de façon à ne pas avoir de problème de racines multiples.

Soit W un ensemble algébrique, ou un polyèdre, dans $\mathbf{R}^n$, a un point de W. Coupons W par une petite sphère $S(a,\varepsilon)$ de dimension $n-1$, de centre a et de rayon ε. L'intersection $W \cap S(a,\varepsilon)$ ne dépend pas, à homéomorphisme près, du rayon ε, pourvu qu'il soit choisi suffisamment petit : tous les $W \cap S(a,\varepsilon)$ ont même topologie. Ceci est assez évident dans le cas où W est un polyèdre, beaucoup moins si W est un ensemble algébrique. On appelle $W \cap S(a,\varepsilon)$ *l'entrelacs de a dans W*, et on le note $\mathrm{lk}(a,W)$ (lk est pour le mot anglais "link").

Si G est un polyèdre de dimension 1, et a un sommet de G, alors $\mathrm{lk}(a,G)$ se compose d'un point pour chaque arête de sommet a. Si on prend pour a un point intérieur d'une arête, $\mathrm{lk}(a,G)$ se compose visiblement de deux points qui sont les intersections de cette arête avec une petite sphère de centre a. Le critère de parité ci-dessus peut se formuler de la manière suivante en terme d'entrelacs : un polyèdre G de dimension 1 est homéomorphe à un ensemble algébrique réel si et seulement si, pour tout point $a \in G$, l'entrelacs $\mathrm{lk}(a,G)$ se compose d'un nombre pair de points.

En dimension plus grande que 1, l'entrelacs ne se compose pas d'un nombre fini de points. La caractéristique d'Euler est ici (comme dans pas mal d'autres situations) la bonne généralisation du comptage des points. Pour un polyèdre $|K|$, on appelle s_d le nombre de d-simplexes qu'il y a parmi les simplexes de K et leurs faces (s_0 est le nombre de sommets, s_1 celui d'arêtes, ...). La *caractéristique d'Euler* de $|K|$, notée $\chi(|K|)$, est la somme alternée $s_0 - s_1 + s_2 - s_3 + \cdots$. Remarquer que si $|K|$ se compose d'un nombre fini de points, sa caractéristique d'Euler est bien le nombre de points. De manière générale, si W est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ pour lequel on a une triangulation $|K| \to W$, la caractéristique d'Euler de W est celle de $|K|$. La caractéristique d'Euler ne dépend pas du choix de la triangulation (on peut en fait la définir de manière intrinsèque). C'est un invariant topologique, ce qui veut dire qu'elle est inchangée par un homéomorphisme. Calculons par exemple $\chi(\dot{V})$ (où $\dot{V}$ est l'ensemble algébrique compact représenté à la figure 2), au moyen de la triangulation décrite par la figure 5. On y voit 10 sommets, 18 arêtes et 8 2-simplexes. On obtient donc $\chi(\dot{V}) = 10 - 18 + 8 = 0$.

En 1971, Sullivan a montré le théorème suivant [S].

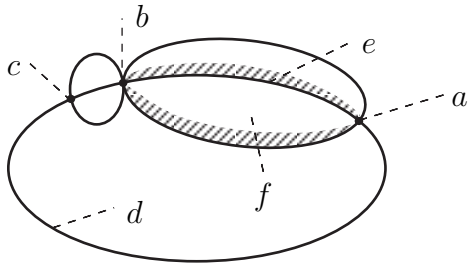
Théorème 2 *Soit W un ensemble algébrique réel de dimension quelconque, a un point de W. Alors la caractéristique d'Euler de l'entrelacs* $\mathrm{lk}(a,W)$ *est paire.*

Illustrons ce théorème, en nous servant toujours de l'ensemble $\dot{V}$. On repère sur la figure 7 six points a, b, c, d, e, f représentant les différentes possibilité d'entrelacs dans $\dot{V}$. Dans chacun de ces cas on dessine l'entrelacs et on indique sa caractéristique d'Euler. Elle est toujours paire. Pour aider au calcul de la caractéristique d'Euler des entrelacs, on peut regarder les triangulations d'entrelacs représentées dans la figure 11.

Le théorème de Sullivan fournit une condition nécessaire pour qu'un polyèdre soit homéomorphe à un ensemble algébrique réel[3]. Nous avons déjà dit que cette condition est suffisante en dimension 1. Elle est aussi suffisante pour les polyèdres de dimension 2. C'est ce que dit le théorème suivant.

Théorème 3 *Soit W un polyèdre de dimension ≤ 2. Alors W est homéomorphe à un ensemble algébrique réel si et seulement si la condition de Sullivan est vérifiée : pour tout $a \in W$, la caractéristique d'Euler de l'entrelacs* $\mathrm{lk}(a,W)$ *est paire.*

[3] Il faut montrer que les homéomorphismes préservent les entrelacs, ou au moins leurs caractéristiques d'Euler.



	a	b	c	d	e	f
lk						
χ	0	2	4	2	-2	0

FIG. 7: Les différentes possibilités d'entrelacs sur $\dot{V}$.

Ce théorème a été démontré indépendamment par Akbulut et King d'une part [AK1], Benedetti et Dedo d'autre part [BD], vers 1981. Il règle entièrement notre problème pour les dimensions 1 et 2. Et après ?

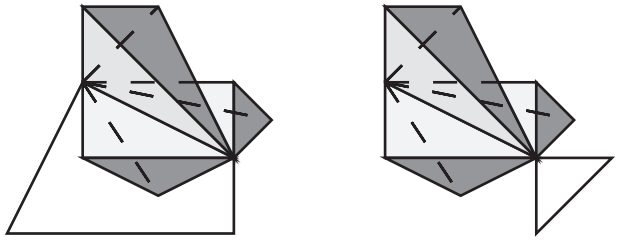


FIG. 8: Lequel de ces deux polyèdres est homéomorphe à un ensemble algébrique ?

3 Dimension 3, et au-delà

Il devient difficile de représenter des objets de dimension 3. Nous allons utiliser un procédé simple pour construire des objets de dimension 3 à partir d'objets de dimension 2 : la *suspension*. Soit W un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$. On considère $\mathbf{R}^n$ plongé dans $\mathbf{R}^{n+1}$ comme l'hyperplan d'équation $x_{n+1} = 0$. Notons P_+ le point $(0, \ldots, 0, 1)$ et P_- le point $(0, \ldots, 0, -1)$ de $\mathbf{R}^{n+1}$. La suspension ΣW de W est le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui est la réunion du cône de sommet P_+ et de base W avec le cône symétrique de sommet P_- et de base W. Les points P_+ et P_- s'appellent les points de suspension. Si $x \in \Sigma W$ n'est pas un point de suspension, il existe un unique point de W, que l'on notera $\pi_W(X)$, tel que x appartienne à un segment joignant $\pi_W(x)$ à un point de suspension. La suspension de W peut aussi se décrire de la manière topologique suivante : on forme le cylindre $W \times [-1, 1]$, puis on écrase le bord supérieur $W \times \{1\}$ en un seul point P_+ et le bord inférieur $W \times \{-1\}$ en un seul point P_-. Dans cette description π_W correspond à la projection le long des génératrices du cylindre.

On peut facilement calculer la caractéristique d'Euler de ΣW en fonction de celle de

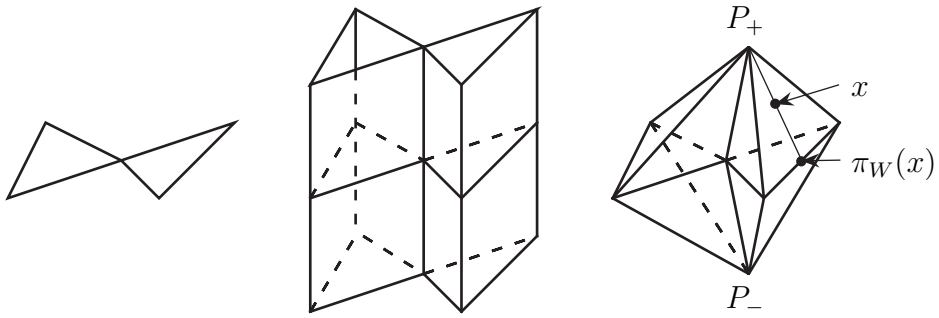


FIG. 9: Un polyèdre W, le cylindre $W \times [-1, 1]$ et la suspension ΣW.

W. Supposons que $W = |K|$ où K est un complexe simplicial fini. Alors ΣW s'obtient en suspendant chaque simplexe $\sigma = [a_1, \ldots, a_d]$ de K. Ceci produit deux nouveaux simplexes $\sigma_+ = [a_1, \ldots, a_d, P_+]$ et $\sigma_- = [a_1, \ldots, a_d, P_-]$ de dimension augmentée de un. En comptant les simplexes de manière alternée suivant la dimension pour calculer la caractéristique d'Euler de la suspension, on obtient :

les simplexes de W :	$\chi(W)$
deux fois plus de nouveaux simplexes, avec dimensions augmentées de 1 :	$-2\chi(W)$
deux nouveaux sommets qui sont les points de suspension :	2
Total pour $\chi(\Sigma W)$:	$2 - \chi(W)$

Par exemple, la caractéristique d'Euler de $\Sigma(\dot{V})$ vaut $2 - 0 = 2$. On peut facilement faire des calculs concernant la suspension, même quand on ne saurait pas la dessiner. On retiendra que la suspension préserve la parité de la caractéristique d'Euler.

La suspension $\Sigma(\dot{V})$ est un exemple important : Akbulut et King ont montré en 1983 que $\Sigma(\dot{V})$ n'est pas homéomorphe à un ensemble algébrique réel, bien qu'elle satisfasse la condition de Sullivan [K, AK2]. Vérifions d'abord que $\Sigma(\dot{V})$ satisfait la condition de Sullivan. Pour cela, il faut savoir comment sont fait les entrelacs dans la suspension. On se convainc assez facilement des faits suivants :

1. Si a est un point de W, $\mathrm{lk}(a, \Sigma W)$ est (homéomorphe à) la suspension de $\mathrm{lk}(a, W)$ (cf. figure 10).
2. Soit x un point de ΣW qui n'est pas un point de suspension, $a = \pi_W(x) \in W$. Alors $\mathrm{lk}(x, \Sigma W)$ est (homéomorphe à) $\mathrm{lk}(a, \Sigma W)$. (Ceci apparaît plus clairement sur le cylindre).
3. L'entrelacs dans ΣW d'un point de suspension est (homéomorphe à) W.

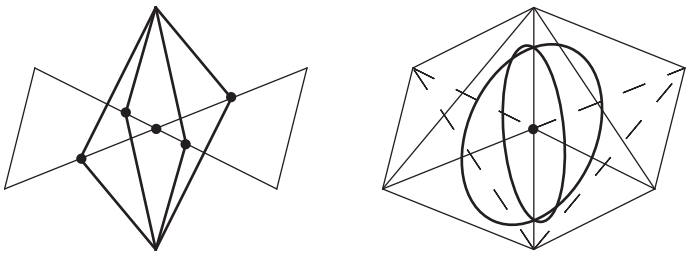


FIG. 10: Suspension de l'entrelacs et entrelacs dans la suspension.

Si x est un point de $\Sigma\dot{V}$ qui n'est pas un point de suspension, la caractéristique d'Euler de son entrelacs dans $\Sigma\dot{V}$ est égale, d'après les faits 1 et 2 ci-desus, à la carac-

téristique d'Euler de la suspension de l'entrelacs de $\pi_{\dot{V}}(x)$ dans $\dot{V}$. Comme la suspension préserve la parité de la caractéristique d'Euler, $\chi(\mathrm{lk}(x, \Sigma\dot{V}))$ est paire. D'après le fait 3, $\chi(\mathrm{lk}(P_\pm, \Sigma\dot{V})) = \chi(\dot{V}) = 0$. Donc $\Sigma(\dot{V})$ satisfait la condition de Sullivan.

Akbulut et King ont établi quatre nouvelles conditions nécessaires pour qu'un polyèdre de dimension 3 soit homéomorphe à un ensemble algébrique réel [K, AK2]. C'est en montrant que la suspension $\Sigma(\dot{V})$ ne vérifie pas l'une d'elles que l'on verra qu'elle n'est pas homéomorphe à un ensemble algébrique réel. Nous allons présenter ces conditions en utilisant la notion de fonction algébriquement constructible sur un ensemble algébrique $W \subset \mathbf{R}^n$. Cette notion a été introduite par McCrory et Parusinski en 1997 [MP1]. Une fonction $\varphi : W \to \mathbf{Z}$ est dite *algébriquement constructible* s'il existe un nombre fini de fonctions polynômes $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, pour $i = 1, \ldots, k$, telles que, pour tout x de W,

$$\varphi(x) = \mathrm{signe}(f_1(x)) + \cdots + \mathrm{signe}(f_k(x)) \ .$$

Dans l'égalité ci-dessus, $\mathrm{signe}(f_i(x))$ vaut 1, 0 ou -1 suivant que $f_i(x)$ est positif, nul ou négatif. Prenons par exemple $W = \mathbf{R}^2$, et soit φ la fonction qui vaut 4 sur le quadrant des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x > 0$ et $y > 0$ et 0 partout ailleurs. Cette fonction φ est algébriquement constructible, car on a

$$\varphi(x, y) = \mathrm{signe}(x^2y^2) + \mathrm{signe}(x^2y) + \mathrm{signe}(xy^2) + \mathrm{signe}(xy) \ .$$

Les fonctions algébriquement constructibles sur un ensemble algébrique W forment un anneau : les fonctions constantes, les sommes et les produits de fonctions algébriquement constructibles sont algébriquement constructibles. Mais la propriété la plus intéressante est relative à un opérateur "d'entrelacs". Soit $\varphi : W \to \mathbf{Z}$ une fonction algébriquement constructible, et x un point de W. On peut trianguler l'entrelacs de x dans W par un homéomorphisme $h : |K| \to \mathrm{lk}(x, W)$ de telle façon que $\varphi \circ h$ soit constant sur chaque simplexe ouvert de K. Soit $m_i \in \mathbf{Z}$ la valeur de $\varphi \circ h$ sur le simplexe ouvert σ_i° de K. On pose

$$\Lambda\varphi(x) = \sum_i (-1)^{\dim(\sigma_i)} m_i \ ,$$

où la somme porte sur tous les simplexes de K et leurs faces. La valeur obtenue ne dépend pas du choix de la triangulation. Ceci définit une fonction $\Lambda\varphi : W \to \mathbf{Z}$. Examinons ce qui se passe si on prend pour φ la fonction constante $\mathbf{1}_W$, qui vaut 1 partout sur W. Pour tout point x de W le calcul de $\Lambda\mathbf{1}_W$ est celui de la caractéristique d'Euler de l'entrelacs $\mathrm{lk}(x, W)$: quand on fait $m_i = 1$ dans la formule ci-dessus, on obtient la somme alternée suivant la dimension du nombre de simplexes d'une triangulation de $\mathrm{lk}(x, W)$. Le théorème de Sullivan nous dit que $\Lambda\mathbf{1}_W$ est une fonction à valeurs paires. McCrory et Parusinski ont montré la généralisation suivante du théorème de Sullivan [MP1].

Théorème 4 *Pour toute fonction algébriquement constructible φ, la fonction $\Lambda\varphi$ est une fonction à valeurs paires, et la fonction $\tilde{\Lambda}\varphi = \frac{1}{2}\Lambda\varphi$, qui est donc à valeurs entières, est algébriquement constructible.*

Ce théorème permet de donner de nouvelles conditions nécessaires pour qu'un polyèdre W soit homéomorphe à un ensemble algébrique réel, qui généralisent la condition de Sullivan. Soit $\tilde{L}(W)$ le sous-anneau de l'anneau des fonctions $W \to \mathbf{Q}$ qui est construit en appliquant les règles suivantes :

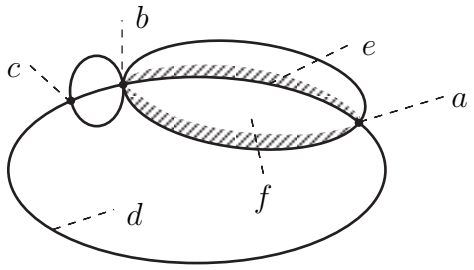
- La fonction constante $\mathbf{1}_W$ est dans $\tilde{L}(W)$.
- Si φ et ψ sont dans $\tilde{L}(W)$, alors $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$ et $\varphi \times \psi$ sont dans $\tilde{L}(W)$.

– Si φ est dans $\tilde{L}(W)$, alors $\tilde{\Lambda}\varphi$ est dans $\tilde{L}(W)$ (où $\tilde{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda$ est défini comme on l'a fait ci-dessus pour une fonction algébriquement constructible sur un ensemble algébrique).

D'après le théorème 4, pour que le polyèdre W soit homéomorphe à un ensemble algébrique réel, il est nécessaire que toutes les fonctions de $\tilde{L}(W)$ soient à valeurs entières[4].

Nous disposons maintenant de l'outil qui va permettre de démontrer que $\Sigma\dot{V}$ n'est pas homéomorphe à un ensemble algébrique. Nous commençons par calculer un certain nombre d'éléments de $\tilde{L}(\dot{V})$. D'après le théorème 4, on va toujours trouver des fonctions à valeurs entières puisque $\dot{V}$ est algébrique. On reprend les notations de la figure 7. On considère toujours les six possibilités a, b, c, d, e, f pour l'entrelacs, et on indique dans la figure 11 une triangulation de l'entrelacs dans chaque cas. Les simplexes ouverts de ces triangulations sont étiquetés suivant l'un des six types (pour alléger, on n'a pas indiqué les étiquettes f). Sur la ligne α figurent les moitiés des caractéristiques d'Euler des entrelacs. Indiquons par exemple comment on calcule $\tilde{\Lambda}\alpha^2$ au point b. On considère la triangulation de l'entrelacs de b.

3 sommets étiquetés d, où α^2 vaut 1	3×1
1 sommet étiqueté e, où α^2 vaut 1	1×1
3 sommets étiquetés f, où α^2 vaut 0	3×0
3 arêtes étiquetées f, où α^2 vaut 0	-3×0
$\tilde{\Lambda}\alpha^2(b)$ est la moitié de la somme	2



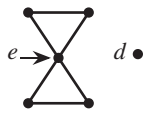
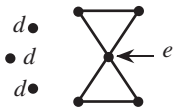
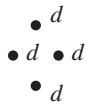
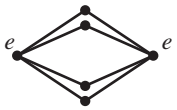
	a	b	c	d	e	f
lk						
$\alpha = \tilde{\Lambda}\mathbf{1}_{\dot{V}}$	0	1	2	1	-1	0
α^2	0	1	4	1	1	0
$\tilde{\Lambda}\alpha^2$	1	2	2	1	1	0
$\alpha \times \tilde{\Lambda}\alpha^2$	0	2	4	1	-1	0

FIG. 11: Calcul de quelques éléments de $\tilde{L}(\dot{V})$.

Nous avons calculé des fonctions de $\tilde{L}(\dot{V})$, mais nous voudrions en fait connaître les fonctions de $\tilde{L}(\Sigma\dot{V})$. Heureusement, il y a des relations étroites entre ces deux anneaux de fonctions. Elles tiennent aux faits suivants :

1. Si φ est une fonction de $\tilde{L}(\Sigma\dot{V})$ et x un point de $\Sigma\dot{V}$ qui n'est pas un point de suspension, alors $\varphi(x) = \varphi(\pi_{\dot{V}}(x))$.

[4]Il faut s'assurer que les homéomorphismes préservent l'opérateur $\tilde{\Lambda}$.

2. Si φ est une fonction de $\tilde{L}(\Sigma\dot{V})$, alors la restriction de φ à $\dot{V}$ est une fonction de $\tilde{L}(\dot{V})$. De plus, toute fonction de $\tilde{L}(\dot{V})$ s'obtient comme restriction d'une fonction de $\tilde{L}(\Sigma\dot{V})$.

Le premier de ces deux faits se comprend assez bien grâce à la description de la suspension comme cylindre avec les bords écrasés. Le deuxième vient de la façon dont sont construits les $\tilde{L}$, et de la propriété suivante. Soit φ une fonction de $\tilde{L}(\Sigma\dot{V})$, ψ sa restriction à $\dot{V}$ et x un point de $\dot{V}$; alors $\tilde{\Lambda}_{\Sigma\dot{V}}\varphi(x)$, calculé dans $\Sigma\dot{V}$, vaut $1-\tilde{\Lambda}_{\dot{V}}\psi(x)$, calculé dans $\dot{V}$. Ceci est une généralisation du fait que la caractéristique d'Euler de l'entrelacs de x dans $\Sigma\dot{V}$ vaut $2-$ la caractéristique d'Euler de l'entrelacs de x dans $\dot{V}$.

Soit maintenant φ une fonction de $\tilde{L}(\Sigma\dot{V})$ dont la restriction à $\dot{V}$ est la fonction $\alpha\times\tilde{\Lambda}\alpha^2$ que nous avons calculée dans le tableau de la figure 11. L'existence de φ est assurée par le fait 2, et le fait 1 entraîne que φ est entièrement déterminée par $\alpha\times\tilde{\Lambda}\alpha^2$, sauf aux points de suspension. Calculons maintenant la valeur de $\tilde{\Lambda}\varphi$ au point de suspension P_+. On travaille sur l'entrelacs de P_+ qui est, nous le savons, homéomorphe à $\dot{V}$. Nous utilisons la triangulation de $\dot{V}$ représentée dans la figure 5. Nous voyons sur cette triangulation :

1 sommet étiqueté a, où φ vaut 0	1×0
1 sommet étiqueté b, où φ vaut 2	1×2
1 sommet étiqueté c, où φ vaut 4	1×4
3 sommets et 7 arêtes étiquetés d, où φ vaut 1	$(3-7)\times 1$
1 arête étiquetée e, où φ vaut -1	$(-1)\times(-1)$
4 sommets, 10 arêtes et 8 2-simplexes étiquetés f, où φ vaut 0	$(4-8+10)\times 0$
$\tilde{\Lambda}\varphi(P_+)$ est la moitié de la somme	$\frac{3}{2}$

Le calcul montre que $\tilde{\Lambda}\varphi$ n'est pas à valeurs entières, et donc que $\Sigma\dot{V}$ n'est pas homéomorphe à un ensemble algébrique.

Nous avons obtenu des conditions nécessaires pour qu'un polyèdre W soit homéomorphe à un ensemble algébrique réel : il faut que toutes les fonctions de $\tilde{L}(W)$ soient à valeurs entières. Il semble que ceci fasse une infinité de conditions (une pour chaque fonction). Mais les propriétés de l'opérateur $\tilde{\Lambda}$ permettent de voir que, si on fixe la dimension de W, il y a en fait une liste finie de conditions dont toutes les autres sont conséquences. En dimensions 1 et 2, on retrouve la condition de Sullivan comme seule condition. En dimension 3, on obtient quatre conditions supplémentaires.

Théorème 5 *Soit W un polyèdre de dimension 3. Alors W est homéomorphe à un ensemble algébrique réel si et seulement si*
1) la fonction $\alpha=\tilde{\Lambda}\mathbf{1}_W$ est à valeurs entières (condition de Sullivan), et
2) les quatre fonctions $\tilde{\Lambda}(\alpha\times\tilde{\Lambda}\alpha^2)$, $\tilde{\Lambda}(\alpha\times\tilde{\Lambda}\alpha^3)$, $\tilde{\Lambda}(\alpha\times\tilde{\Lambda}\alpha^2\times\tilde{\Lambda}\alpha^3)$ et $\tilde{\Lambda}(\tilde{\Lambda}\alpha^2\times\tilde{\Lambda}\alpha^3)$ sont à valeurs entières.

Les cinq conditions sont indépendantes, ce qui veut dire que, pour chacune de ces conditions, on peut construire un polyèdre W qui ne la vérifie pas, mais vérifie toute les autres. Le fait que les cinq conditions soient suffisantes n'est pas une conséquence du théorème 4. C'est un résultat d'Akbulut et King[5] [K, AK2]. La vérification de ces cinq conditions nécessaires et suffisantes peut se faire par un algorithme tout à fait praticable,

[5]Les conditions d'Akbulut et King ne sont par formulées en termes d'opérateur $\tilde{\Lambda}$, mais elles sont équivalentes.

dont l'implantation sur un ordinateur ne poserait pas de problême[6]. Jusqu'en dimension 3, on peut donc effectivement reconnaître les ensembles algébriques réels.

En dimension 4, McCrory et Parusinski [MP2] ont établi la liste correspondante de conditions indépendantes, exprimant que toute fonction de $\tilde{L}(W)$ est à valeurs entières. Il y a $2^{29} - 29$ conditions ! De plus, en utilisant d'autres propriétés de stabilité des fonctions algébriquement constructibles qui apportent des informations supplémentaires à partir de la dimension 4, ils arrivent en fait à une liste de $2^{43} - 43$ conditions nécessaires indépendantes. On ne sait pas si ces conditions sont suffisantes. Mais même si elles l'étaient, leur nombre montre qu'il est en pratique impossible de vérifier qu'un polyèdre de dimension 4 est homéomorphe à un ensemble algébrique réel.

Références

[AK1] S. Akbulut, H. King : *The topology of real algebraic sets.* Enseign. Math. (2), **29**, 221-261 (1983)

[AK2] S. Akbulut, H. King : *Topology of real algebraic sets.* Math. Sci. Research Institute Publ. **25**. Springer-Verlag (1992)

[BD] R. Benedetti, M. Dedò : *The topology of two-dimensional real algebraic varieties.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **127**, 141-171 (1981)

[BR] R. Benedetti, J-J. Risler : *Real algebraic and semialgebraic sets.* Hermann (1990)

[BCR] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy : *Real algebraic geometry.* Ergeb. Math. (3) **36**. Springer-Verlag (1998)

[K] H. King : *The topology of real algebraic sets.* Singularities, Proc. Sympos. Pure Math. **40**, Part 1, 641-654. Amer. Math. Soc. (1983)

[MP1] C. McCrory, A. Parusinski : *Algebraically constructible functions.* Ann. Sci. École Norm. Sup (4) **30**, 527-552 (1997)

[MP2] C. McCrory, A. Parusinski : *Topology of real algebraic sets of dimension 4 : necessary conditions.* Prépub. Dép. Math. Univ. Angers (1998)

[S] D. Sullivan : *Combinatorial invariants of analytic spaces.* Proc. Liverpool Singularities-Sympos. I, Lecture Notes in Math. **192**, 165-168. Springer-Verlag (1971)

Michel Coste
Institut Mathématique de Rennes

[6] À ma connaissance, une telle implantation n'existe pas.