Université de Rennes I
UFR Mathématiques

Licence de mathématiques
Année 2008-2009

ALBI : Algèbre bilinéaire

2e session — Corrigé de l'examen

Question de cours
Qu'est-ce qu'une matrice hermitienne ? Donner un exemple de matrice hermitienne qui n'est pas symétrique.

Une matrice hermitienne est une matrice carrée à coefficients complexes qui est égale à la transposée de sa conjuguée : $H = {}^t\overline{H}$. Un exemple de matrice hermitienne non symétrique est $\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 1
Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 - 10x_2x_3 + 2x_1x_3 \ .$$

1. *Écrire la matrice de q dans la base canonique.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Quelle est la signature de q ?*
Décomposons q en carrés. On a

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - 3x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - 3x_2 + x_1)^2 + (x_2 - x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 \ . \end{aligned}$$

La signature de q est donc (2,1).

3. *Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ qui soit orthogonale pour q.*
Une base orthogonale pour q est la base duale de la base de formes linéaires $(x_1 - 3x_2 + x_3,\ x_2 - x_3,\ x_2 + x_3)$ fournie par la décomposition en carrés. L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, dont les lignes sont les coefficients des formes linéaires, est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, dont les colonnes sont les vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$ duale de la base de formes linéaires donnée par la décomposition en carrés de q. Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ forment donc une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q.

Exercice 2
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} .$$

Trouver une matrice unitaire $P \in U_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale (bien vérifier que P est unitaire).

Diagonalisons la matrice A proposée. C'est une matrice hermitienne donc on sait qu'elle est à valeurs propres réelles et diagonalise dans une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien standard. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ et celui associé à la valeur propre 3 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. Les deux vecteurs sont bien orthogonaux pour le produit scalaire hermitien, mais ils ne sont pas de norme 1 puisque celle-ci vaut $\sqrt{2}$. En divisant par la norme on obtient une base orthonormée et donc une matrice de changement de base unitaire

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

On a, pour cette matrice unitaire P, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$. Si f et g sont des éléments de E, on pose

$$(f \mid g) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt .$$

On note F le sous-espace de E formé des restrictions à $[-1,1]$ des fonctions polynomiales de degré ≤ 2.

1. *Expliquer pourquoi $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur E. On considérera toujours dans la suite E muni de ce produit scalaire, et de la norme euclidienne associée.*
   On vérifie que $(f \mid g)$ est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive. Pour ce dernier point, on a toujours $(f \mid f) \geq 0$ et si $(f \mid f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)^2\, dt = 0$, alors comme $f(t)^2 \geq 0$ et que $t \mapsto f(t)^2$ est continue sur $[-1,1]$, f doit être la fonction nulle sur $[-1,1]$.
2. *Calculer la norme euclidienne des fonctions $t \mapsto 1$, $t \mapsto t$, $t \mapsto t^2$.*
   Posons $e_0 : t \mapsto 1$, $e_1 : t \mapsto t$, $e_2 : t \mapsto t^2$. On a $\|e_0\|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dt = 1$ donc $\|e_0\| = 1$; $\|e_1\|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t^2\, dt = 1/3$ donc $\|e_1\| = 1/\sqrt{3}$; $\|e_2\|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t^4\, dt = 1/5$ donc $\|e_2\| = 1/\sqrt{5}$.
3. *Montrer que les fonctions paires (celles qui vérifient $f(-t) = f(t)$) et les fonctions impaires (celles qui vérifient $f(-t) = -f(t)$) forment deux sous-espaces orthogonaux de E.*
   Soit f paire et g impaire. Alors, en utilisant le changement de variable $t = -u$, on obtient :
   $$(f \mid g) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_{1}^{-1} f(-u)\, g(-u)\, (-du) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(u)\, g(u)\, du = -(f \mid g) ,$$
   et donc $(f \mid g) = 0$. Ceci montre que le sous-espace des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont orthogonaux.
4. *Donner une base de F, une base orthogonale de F.*
   (e_0, e_1, e_2) est une base de F. On lui applique le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour la modifier en une base orthogonale. On sait déjà que e_1 est orthogonale à e_0 car e_0 est paire et e_1 impaire. Il suffit donc de remplacer e_2 par
   $$\epsilon_2 = e_2 - \frac{(e_0 \mid e_2)}{\|e_0\|^2}\, e_0 - \frac{(e_1 \mid e_2)}{\|e_1\|^2}\, e_1 .$$
   On a $(e_1 \mid e_2) = 0$ car e_1 est impaire et e_2 paire, et $(e_0 \mid e_2) = 1/3$. Donc $\epsilon_2 = e_2 - e_0/3 : t \mapsto t^2 - 1/3$, et (e_0, e_1, ϵ_2) est une base orthogonale de F.
5. *Calculer la projection orthogonale sur F de la fonction $t \mapsto t^3$*
   Notons $e_3 : t \mapsto t^3$. Puisque (e_0, e_1, ϵ_2) est une base orthogonale de F, la projection orthogonale de e_3 sur F est
   $$p_F(e_3) = \frac{(e_0 \mid e_3)}{\|e_0\|^2}\, e_0 + \frac{(e_1 \mid e_3)}{\|e_1\|^2}\, e_1 + \frac{(\epsilon_2 \mid e_3)}{\|\epsilon_2\|^2}\, \epsilon_2 .$$
   Vu l'orthogonalité des fonctions paires et impaires, on a $(e_0 \mid e_3) = (\epsilon_2 \mid e_3) = 0$; par ailleurs $(e_1 \mid e_3) = 1/5$. Donc $p_F(e_3) = 3e_1/5 : t \mapsto 3t/5$.

6. *Trouver les nombres réels a, b, c tels que*

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t^3 - at^2 - bt - c)^2\,dt$$

soit minimum, et calculer ce minimum.

Posons $v : t \mapsto at^2 + bt + c$. La quantité dont il faut trouver le minimum n'est autre que $\|e_3 - v\|^2$, où v parcourt F. Or on sait par Pythagore que $\|e_3 - v\|^2 = \|e_3 - p_F(e_3)\|^2 + \|p_F(e_3) - v\|^2$. Donc la quantité proposée atteint son minimum pour $v = p_F(e_3) = 3e_1/5$, c.-à-d. pour $a = c = 0,\ b = 3/5$, et la valeur de ce minimum est, toujours d'après Pythagore

$$\|e_3 - p_F(e_3)\|^2 = \|e_3\|^2 - \|3e_1/5\|^2 = \frac{1}{7} - \frac{9}{25} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{175}\ .$$