Sujets de TER proposés – 2012

Michel Coste

2012-01-03

1 17e problème de Hilbert

Une somme de carrés de polynômes en n variables est positive ou nulle sur tout $\mathbb{R}^n$. Mais il existe des polynômes comme $1 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2$ qui est positif ou nul sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et pas somme de carrés de polynômes. Le 17e problème posé par Hilbert en 1900 demande si un polynôme qui ne prend que des valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{R}^n$ peut toujours se représenter comme somme de carrés de fractions rationnelles. Le problème a été résolu positivement par Emil Artin en 1927.

Ce problème a pas mal de prolongements, notamment en ce qui concerne son aspect quantitatif : combien de carrés sont nécessaires ?

Références :
- Les articles originaux d'E. Artin et O. Schreier (des traductions en anglais et en français existent)
- *Géométrie Algébrique Réelle* (J. Bochnak, M. Coste, M-F Roy)

2 Fonctions polynomiales d'une sphère dans une sphère

Y a-t-il des fonctions polynomiales non constantes de la sphère standard $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dans la sphère standard $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$? Un exemple fameux est la fibration de Hopf $S^3 \to S^2$ induite par la multiplication des nombres complexes. D'un autre côté, on montre qu'il n'existe pas de fonction polynomiale non constante $S^n \to S^k$ si n est une puissance de 2 et $k < n$. L'étude de cette question fait intervenir en force la théorie des formes quadratiques.

Références :
- *The Algebraic Theory of Quadratic Forms* (T.Y. Lam)
- *Géométrie Algébrique Réelle* (J. Bochnak, M. Coste, M-F Roy)