

**Question de cours I** Donner une formule reliant une matrice carrée  $A$  de taille  $n$ , sa matrice des cofacteurs  $\text{cof}(A)$  et le déterminant  $\det(A)$ .

$${}^t \text{cof}(A) A = A {}^t \text{cof}(A) = \det(A) I_n .$$

**Question de cours II** Donner l'énoncé et une démonstration du lemme de Gauss pour les polynômes.

Soient  $A, B$  et  $C$  trois polynômes. Si  $A$  divise le produit  $BC$  et est premier avec  $B$ , alors  $A$  divise  $C$ . Voici une démonstration. Puisque  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux, d'après Bézout il existe des polynômes  $U$  et  $V$  tels que  $UA + VB = 1$ . Comme  $A$  divise  $UAC$  et  $VBC$ , il divise  $C = UAC + VBC$ .

**Exercice I** On considère le système d'équations

$$\begin{cases} x + m(y + z + t) = a \\ y + m(z + t + x) = b \\ z + m(t + x + y) = c \\ t + m(x + y + z) = d \end{cases}$$

où  $x, y, z, t$  sont les inconnues et  $m, a, b, c, d$  des paramètres réels.

1) Déterminer les nombres réels  $m$  pour lesquels ce système admet une solution unique.

Ce système de 4 équations à 4 inconnues admet une solution unique si et seulement s'il est de Cramer, c'est à dire si et seulement si son déterminant est non nul. Calculons ce déterminant (attention à l'ordre des variables en écrivant le déterminant).

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & m & m & m \\ m & 1 & m & m \\ m & m & 1 & m \\ m & m & m & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & m-1 & m-1 & m-1 \\ m & 1-m & 0 & 0 \\ m & 0 & 1-m & 0 \\ m & 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix} = (m-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 0 & 0 \\ m & 0 & -1 & 0 \\ m & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (m-1)^3 \begin{vmatrix} 1+3m & 0 & 0 & 0 \\ m & -1 & 0 & 0 \\ m & 0 & -1 & 0 \\ m & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(m-1)^3(1+3m) . \end{aligned}$$

La première égalité vient en soustrayant la première colonne de chacune des autres, la deuxième en sortant le facteur  $m-1$  de chacune des trois dernières colonnes, la troisième en ajoutant à la première ligne la somme des trois autres, et la dernière en développant par rapport à la première ligne.

On conclut que le système a une solution unique si et seulement si  $m$  est différent de 1 et de  $-\frac{1}{3}$ .

2) Dans chacun des cas où le système n'a pas une solution unique, donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a, b, c, d$  pour que le système admette des solutions.

Si  $m = 1$ , le système devient  $\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x + y + z + t = b \\ x + y + z + t = c \\ x + y + z + t = d \end{cases}$ , et évidemment il admet des solutions si et

seulement si  $a = b = c = d$ . Si  $m = -\frac{1}{3}$ , la matrice du système s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} .$$

On sait que cette matrice est de rang  $< 4$  puisque son déterminant est nul. Le déterminant fabriqué avec les trois premières lignes et colonnes vaut, d'après Sarrus,

$$1 - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{16}{27} ,$$

et donc le rang du système est 3 et les trois premières lignes sont linéairement indépendantes. Comme la quatrième est l'opposé de la somme des trois premières, le système admet des solutions si et seulement si  $d = -a - b - c$ , ce qui équivaut à  $a + b + c + d = 0$ . On peut aussi utiliser les déterminants : il y a une condition d'existence de solutions qui est donnée par l'annulation du déterminant obtenu en bordant le déterminant  $3 \times 3$  que l'on vient de calculer par la quatrième ligne et la colonne du second membre :

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & a \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & b \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & c \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & a \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & b \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & a + b + c + d \end{vmatrix} = \frac{16}{27} (a + b + c + d).$$

La deuxième égalité vient en ajoutant à la dernière ligne la somme des trois premières, et la troisième en développant suivant la dernière ligne. On retrouve la condition  $a + b + c + d = 0$  nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions.

**Exercice II** On pose  $D_1(X) = 1 - X$  et, pour  $n > 1$ , on définit le déterminant  $D_n(X)$  d'ordre  $n$  par :

$$D_n(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & X & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 - X & X & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1 - X & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 - X \end{vmatrix}.$$

1) Calculer  $D_2(X)$ ,  $D_3(X)$ .

On a  $D_2(X) = (1 - X)^2 + X = 1 - X + X^2$  et, par Sarrus,

$$D_3(X) = (1 - X)^3 + 2X(1 - X) = 1 - X + X^2 - X^3.$$

2) Factoriser  $D_3(X)$  en produit de facteurs irréductibles sur  $\mathbb{R}$ , sur  $\mathbb{C}$  (justifier la réponse).

On voit que 1 est racine de  $D_3(X)$ . En mettant  $X - 1$  en facteur on obtient  $D_3(X) = -(X - 1)(X^2 + 1)$ . Comme  $X^2 + 1$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$ , c'est la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur  $\mathbb{R}$ . La décomposition en produit de facteurs irréductibles sur  $\mathbb{C}$  est  $D_3(X) = -(X - 1)(X - i)(X + i)$ .

3) Déterminer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 - x & x & 0 \\ -1 & 1 - x & x \\ 0 & -1 & 1 - x \end{pmatrix}$$

suites les valeurs du nombre complexe  $x$ .

D'après les résultats de la question précédente, cette matrice est inversible (de rang 3) si et seulement si  $x$  est différent de 1,  $i$  et  $-i$ . Remarquons que le déterminant  $2 \times 2$  fabriqué sur les deux premières lignes et colonnes de la matrice est  $D_2(x) = 1 - x + x^2$ . Ce déterminant ne s'annule ni pour  $x = 1$ , ni pour  $x = i$ , ni pour  $x = -i$ . Donc, dans ces trois cas, le rang de la matrice est 2.

4) Démontrer la formule de récurrence  $D_n(X) = (1 - X)D_{n-1}(X) + XD_{n-2}(X)$  pour tout entier  $n \geq 3$ . Que vaut  $D_n(X) - D_{n-1}(X)$ ? Que vaut  $D_n(X)$ ? (On veut comme réponse un polynôme en  $X$  explicite).

En développant  $D_n(X)$  suivant la première colonne on obtient

$$D_n(X) = (1 - X)D_{n-1}(X) + \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 - X & X & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1 - X & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 - X \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant est de taille  $(n-1) \times (n-1)$ , et en le développant selon sa première ligne on obtient  $D_n(X) = (1 - X)D_{n-1}(X) + XD_{n-2}(X)$ . Cette relation de récurrence peut se réécrire  $D_n(X) - D_{n-1}(X) = (-X)(D_{n-1}(X) - D_{n-2}(X))$  pour  $n \geq 3$ . Comme  $D_2(X) - D_1(X) = X^2 = (-1)^2 X^2$ , une récurrence immédiate donne  $D_n(X) - D_{n-1}(X) = (-1)^n X^n$  pour tout entier  $n \geq 2$ . Comme  $D_1(X) = 1 - X$ , une récurrence tout aussi immédiate donne  $D_n(X) = \sum_{i=1}^n (-1)^i X^i$  pour tout entier  $n \geq 1$ .