UE7 – MA5 : Analyse

SUITES et SERIES DE FONCTIONS

I. Suites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Etant donné un ensemble E, <u>une suite de fonctions numériques définies sur E</u> est la donnée, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'une application de E dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ notée f_n. Pour x fixé dans E, $(f_n(x))$ est une suite de nombres réels ou complexes.

<u>Exemples</u>

$$f_n(x) = x^n \quad , \quad 1 + \frac{x}{n} \quad , \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad , \quad Arctan(nx) \quad , \quad e^{inx} \quad , \ldots$$

Définition de la convergence simple

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques définies sur E :

1) On dit que la suite (f_n) <u>converge en un point $x \in E$</u> lorsque la suite numérique $(f_n(x))$ converge.
2) Si A est un sous-ensemble de E, on dit que la suite (f_n) <u>converge simplement sur A</u> si, pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))$ converge.

Si (f_n) converge simplement sur $A \subset E$ on note, pour tout $x \in A$, $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ et on définit ainsi sur A une fonction $f : x \to f(x)$ appelée <u>limite simple</u> de la suite (f_n) sur A vérifiant :

(1) $\quad \forall x \in A \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geq n_0 \ , \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Cette limite simple sur A est bien sûr unique (si elle existe) puisque pour chaque $x \in A$, la limite de $(f_n(x))$ est unique.

<u>Exemples</u>

1) $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f constante égale à 1.
2) $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1\ ,\ 1]$ vers f définie par $f(x) = 0$ si $x \in\ ]-1\ ,\ 1[$ et $f(1) = 1$. Elle ne converge pas pour les $x \notin\ ]-1\ ,\ 1]$.
3) $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f définie par $f(x) = e^x$.
4) $f_n(x) = \dfrac{x}{\ldots}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle

Définition de la convergence uniforme
Soit (f_n) une suite de fonctions numériques sur E . Soit A un sous-ensemble de E .
On dit que la suite (f_n) converge uniformément sur A s'il existe une fonction f de A dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que :

(2) $$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geq n_0 \ , \ \forall x \in A \ , \ \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon$$

ou, ce qui est équivalent :

(2') $$\lim_{n \to \infty} \left(\operatorname{Sup}_{x \in A} \left| f_n(x) - f(x) \right| \right) = 0$$

Remarque
La différence entre convergence simple et convergence uniforme sur A, c'est-à-dire entre (1) et (2), est que dans (1) le n_0 dépend de ε et de x alors que pour que (2) soit vérifié, il faut un n_0 dépendant de ε mais commun à tous les $x \in A$.

Proposition
Si (f_n) converge uniformément vers f sur A, (f_n) converge simplement vers f sur A .

La définition (2') fournit une méthode pour prouver une convergence uniforme sur A (resp. une convergence non uniforme sur A) :

a) Etude de la convergence simple pour trouver f .

b) Calcul de $a_n = \operatorname{Sup}_{x \in A} \left| f_n(x) - f(x) \right|$.

c) Démonstration que la suite (a_n) converge vers 0 (resp. ne converge pas vers 0).

Il sera parfois plus rapide de majorer (resp. minorer) a_n par une suite a'_n qui tend vers 0 (resp. qui ne tend pas vers 0).

<u>Exemples</u>

1) La suite $f_n(x) = x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,b] \subset]-1 , 1[$ mais ne converge uniformément ni sur [0 , 1] ni même sur [0 , 1[car :

$$\operatorname{Sup}_{x \in [0,1[} \left| x^n \right| = 1 \quad \text{pour tout } n$$

2) La suite $f_n(x) = \frac{x}{\ldots}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$

car f_n est impaire, de dérivée du signe de $1 - n^2 x^2$ et $\underset{x \in \mathbb{R}}{Sup} \left| f_n(x) \right| = \dfrac{1}{2n}$.

3) La suite $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{n}$ converge uniformément sur $[-a , a]$, a quelconque positif, mais pas sur $\mathbb{R}$.

On sait qu'une suite de nombres réels ou complexe converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy, ce qui conduit au résultat :

Théorème
Soit (f_n) une suite de fonctions numériques sur E. Soit A un sous-ensemble de E.
Pour que (f_n) converge uniformément sur A il faut et il suffit qu'elle soit uniformément de Cauchy sur A , c'est-à-dire que :

(3) $\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq n_0 \ , \ \forall p \geq n_0 \ , \ \forall x \in A \ , \ \left| f_n(x) - f_p(x) \right| \leq \varepsilon$

Remarque **sur les notations**
Dans la définition précédente, on peut toujours supposer que $p \geq n$ et écrire $p = n + q$ avec $q \geq 0$ de sorte que (3) s'écrit encore :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq n_0 \ , \ \forall q \geq 0 \ , \ \forall x \in A \ , \ \left| f_n(x) - f_{n+q}(x) \right| \leq \varepsilon$$

II. Continuité, intégration, dérivation de la limite d'une suite de fonctions

L'exemple de $f_n(x) = x^n$ sur $[0 , 1]$ montre que la convergence simple ne suffit pas à assurer la continuité de la limite. Par contre :

Théorème **de continuité**
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Soit $a \in I$. On suppose que :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a (resp. sur I) .

b) (f_n) converge uniformément vers f sur I .

Alors f est continue en a (resp. sur I) .

Remarque
Ce théorème peut permettre de prouver qu'une convergence sur I n'est pas uniforme en

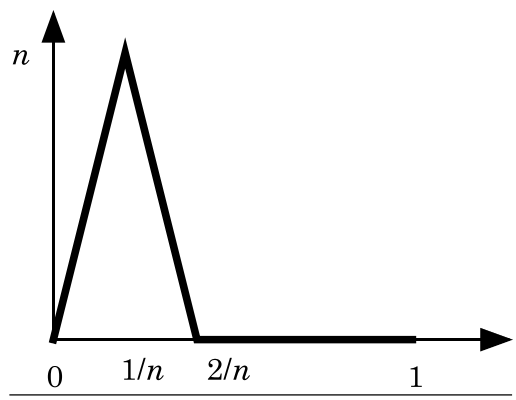
Théorème d'interversion de limite et d'intégration
Soient $[a\ ,\ b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite d'applications continues de $[a\ ,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui converge uniformément sur $[a\ ,\ b]$ vers f (continue d'après ce qui précède). Alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$ a une limite et on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Remarque
On dit aussi que la convergence uniforme de (f_n) sur $[a\ ,\ b]$ permet d'intervertir limite et intégration.

Là encore la convergence simple ne permet pas d'obtenir le résultat précédent :

Contre-exemple
La suite (f_n) de fonctions affines par morceaux représentée ci-contre pour $n \geq 2$ et avec $f_n(x) = 0$ si $x \in [2/n\ ,\ 1]$, converge simplement vers la fonction nulle sur $[0\ ,\ 1]$ mais $\int_0^1 f_n(x)\ dx = 1$ ne converge pas vers 0.



Théorème de dérivation
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On suppose que :
a) Pour tout n , f_n est dérivable (resp. C^1) sur I .
b) La suite (f'_n) converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné $[a\ ,\ b]$ contenu dans I et on note g la limite de la suite (f'_n) sur I .
c) Il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $f_n(x_0)$ converge.

Alors :
1) La suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle fermé borné $[a\ ,\ b]$ contenu dans I . On note f la limite de la suite (f_n) sur I .
2) f est dérivable (resp. C^1) sur I et $f' = g$.

Contre-exemple $\quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$

Les fonctions f_n sont C^1 sur $\mathbb{R}$ et la suite (f_n) converge uniformément vers $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$ car :

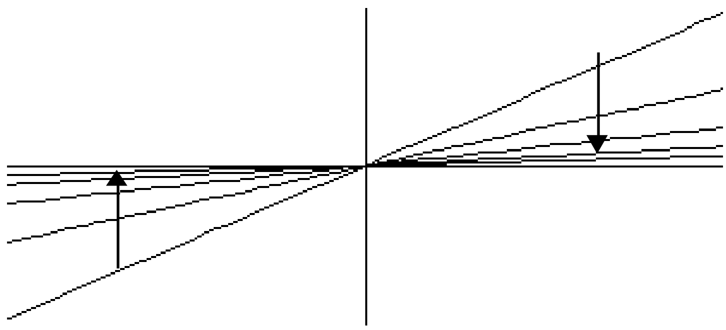
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{\frac{1}{n}}{|x| + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

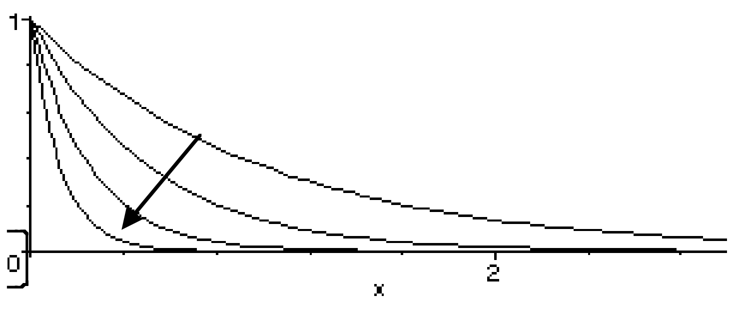
Pourtant f n'est pas dérivable en 0 .

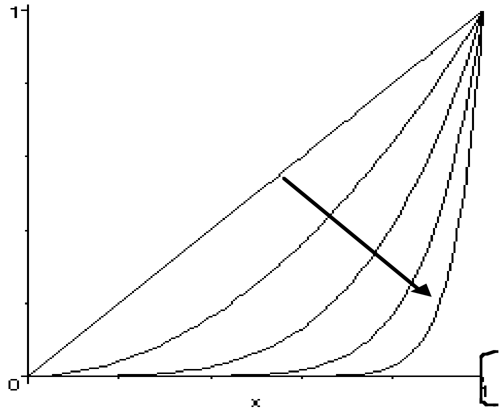
Ici le théorème ne peut être appliqué que sur $I =]0\ , +\infty[$ ou $]-\infty\ , 0[$.

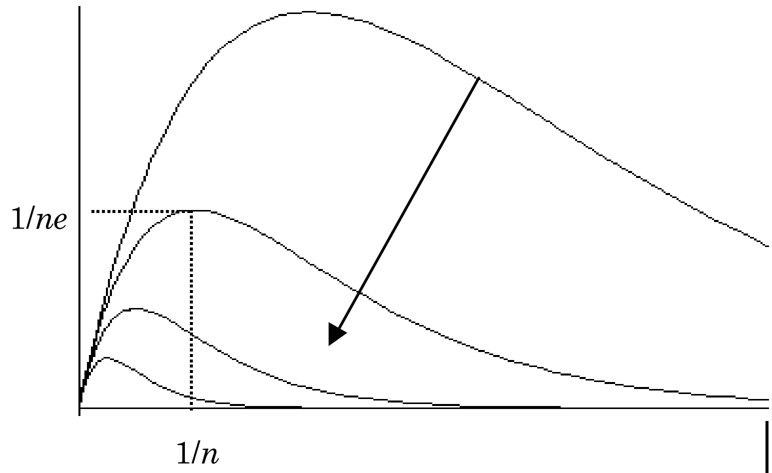
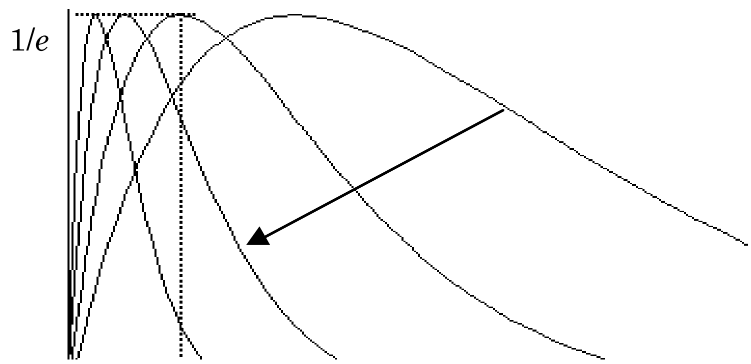
Exercice 1

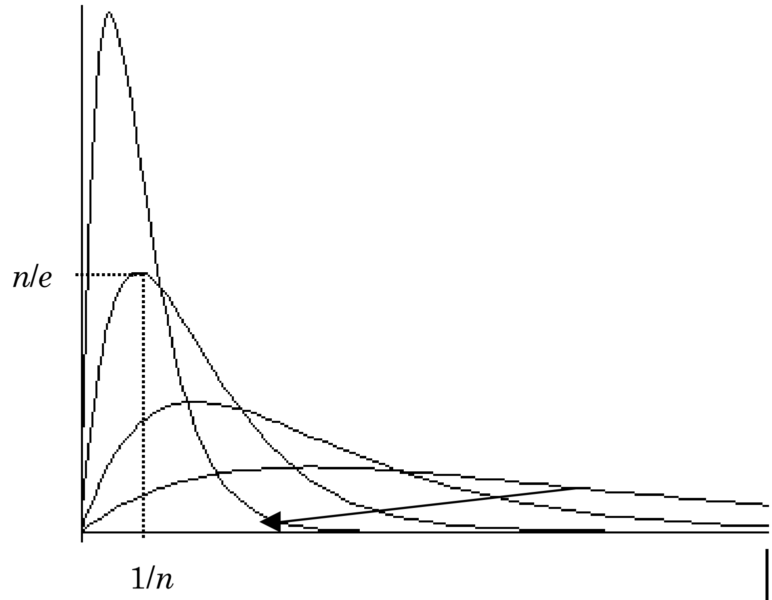
Etudier et justifier les tableaux suivants :

$f_n\ (x)$	E	**Graphique de f_n avec indication de sa borne supérieure (la flèche indique comment évolue le graphique si $n \to \infty$)**	**Convergence uniforme dans tout segment de**
I $\frac{x}{n}$	$]-\infty\ , \infty[$	Convergence non uniforme vers 0 	$]-\infty\ , \infty[$

$f_n\ (x)$	E	**Graphique de f_n avec indication de sa borne supérieure (la flèche indique comment évolue le graphique si $n \to \infty$)**	**Convergence uniforme dans tout segment de**
II e^{-nx}	$]0\ , \infty[$	Convergence non uniforme vers 0 	$]0\ , \infty[$

$f_n\ (x)$	E	Graphique de f_n avec indication de sa borne supérieure (la flèche indique comment évolue le graphique si $n \to \infty$)	Convergence uniforme dans tout segment de
III x^n	$[0\ ,\ 1[$	Convergence non uniforme vers 0 	$[0\ ,\ 1[$

$f_n\ (x)$	E	Graphique de f_n avec indication de sa borne supérieure (la flèche indique comment évolue le graphique si $n \to \infty$)	Convergence uniforme dans tout segment de
IVa $x\, e^{-\,nx}$	$[0\ ,\ \infty[$	Convergence uniforme vers 0 	$[0\ ,\ \infty[$
IVb $nx\, e^{-\,nx}$	$[0\ ,\ \infty[$	Convergence non uniforme vers 0 	$]0\ ,\ \infty[$

IVc $n^2 x\, e^{-nx}$	$[0\ ,\ \infty[$	Convergence non uniforme vers 0 	$]0\ ,\ \infty[$

Exercice 2

On considère pour $n \geq 1$ les fonctions :

$$f_n(x) \;=\; x - \frac{1}{n} \quad , \quad g_n(x) \;=\; x\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad , \quad h_n(x) \;=\; x\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad , \quad \varphi_n(x) = x - \frac{\sin x}{n}$$

Discuter la convergence simple et uniforme de ces suites de fonctions.

Exercice 3

Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions converge uniformément sur chacun des intervalles $[a,b]$ et $]b,c]$.

Montrer qu'elle converge uniformément sur $[a,c]$.

Exercice 4

On considère une fonction f dont la dérivée est uniformément continue sur un intervalle $[a, +\infty[$.

Montrer que la suite de terme général $n\left[f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right]$ converge uniformément vers $f\,'$ sur le même intervalle.

Exercice 5 *(Partiel 1991)*

Montrer que la suite de fonctions définie par $f_n(x) \;=\; n\left[Arctg\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - Arctg\left(x - \dfrac{1}{n}\right)\right]$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Etudier la convergence uniforme sur $]0\,,+\infty[$ de la suite $f_n(x) = min\left(n\,,\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Exercice 7

Convergence simple et uniforme (et sur quels intervalles ?) des suites de terme général :

$$sin\sqrt{x+4\pi^2 n^2} \quad , \quad \frac{x}{1+nx} \quad , \quad \frac{1}{1+nx} \quad , \quad n^2\, x(1-x)1_{[0,\frac{1}{n}]}$$

Exercice 8 *(Partiel 1993)*

On considère la suite de fonctions de $I=[0\,,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = Arctg\left(\dfrac{n+x}{1+nx}\right)$

.

1) Etudier la convergence simple de la suite f_n sur I.
2) Pour tout entier $n \geq 0$ on pose :

$$\forall x \in I \ , \ g_n(x) = f_n(x) + Arctg\, x - \frac{\pi}{2}$$

Montrer que pour tout $n \geq 0$, g_n est une fonction croissante sur I.
En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur I.

Exercice 9

Etudier la convergence de la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{n\,e^{-x}+x^2}{n+x}$, $x \in$ $[0,1]$.

La convergence est-elle simple ? uniforme ?

En déduire la nature de la suite numérique $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{n\,e^{-x}+x^2}{n+x}\,dx$.

Exercice 10

Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_n$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n\,Log\left(1 - \dfrac{1}{nx}\right)} & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > \dfrac{1}{n} \ , \ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{\ } \end{cases}$$

Exercice 11

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{nx} + 1 & \text{pour } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f_n converge uniformément sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, mais ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

III. Séries de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

La série de fonctions $\sum_n f_n$ de terme général f_n est, par définition, la suite de fonctions (S_n) définie par :

$$\forall x \in E \quad , \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

Définition

1) La série $\sum_n f_n$ est dite simplement convergente sur une partie A de E lorsque la suite (S_n) est simplement convergente sur A.

2) La série $\sum_n f_n$ est dite uniformément convergente sur une partie A de E lorsque la suite (S_n) converge uniformément sur A.

Notation

Lorsque la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur A, la limite de la suite (S_n) est appelée somme de la série sur A et notée, pour $x \in A$, $S(x)$ ou encore $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Pour les séries, on dispose d'une autre notion de convergence, souvent d'utilisation

Une série de fonctions $\sum_n f_n$ définie sur E est dite normalement convergente sur $A \subset E$ lorsqu'il existe une série $\sum_n a_n$, à termes réels positifs, telle que :

i) $\forall x \in A$, $|f_n(x)| \leq a_n$

ii) la série $\sum_n a_n$ converge

Remarque

Cette définition équivaut à dire que les f_n sont bornées sur A et que la série numérique $\sum_n \underset{x \in A}{Sup} |f_n(x)|$ est convergente.

Exemples

1) $\sum \frac{sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $\left| \frac{sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) $\sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ car $0 \leq \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$ pour tout $x \geq 0$.

Théorème

Toute série $\sum_n f_n$ normalement convergente sur A est uniformément convergente sur A.

Attention : une série peut être uniformément convergente sur A sans y être normalement convergente.

Contre-exemple

Si $x \in [0\ ,\ 1]$, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ n'est pas normalement convergente sur $[0\ ,\ 1]$ puisque $Sup \left| (-1)^n \frac{x^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ terme général d'une série divergente

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}\ x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \qquad \text{pour tout } x \in [0\ ,\ 1]$$

ce qui signifie que $R_n(x)$ converge uniformément vers zéro sur $[0\ ,\ 1]$.

Les théorèmes vus au paragraphe III peuvent être appliqués aux suites des sommes partielles de séries de fonctions et conduisent aux résultats suivants :

Théorème de continuité

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $\sum_n f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) . Soit $a \in I$. On suppose que :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a (resp. sur I) .

b) $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I .

Alors $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue en a (resp. sur I) .

Théorème d'interversion de $\sum$ et $\int_a^b$

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a\ ,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que la série $\sum_n f_n$ soit uniformément convergente sur $[a\ ,\ b]$.

La série $\sum_n \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right)$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

Théorème de dérivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) . On suppose que :

a) Pour tout n , f_n est dérivable (resp. C^1) sur I .

b) La série $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné $[a\ ,\ b]$

c) Il existe $x_0 \in I$ tel que $\sum_n f_n(x_0)$ converge.

Alors :

1) La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné $[a\ ,\ b]$ contenu dans I.

2) La somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est dérivable (resp. C^1) sur I et on a $S\ '(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f\ '_n(x)$.

Exemples de mise en oeuvre des théorèmes précédents

1) Si $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ on a déjà vu que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, et comme f_n est continue, on en déduit que la fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On a par ailleurs $f\ '_n(x) = -\dfrac{n\,e^{-nx}}{1+n^2}$ et la série $\sum_{n\geq 0} f\ '_n$ (qui diverge en $x = 0$) converge normalement sur tout intervalle $[a\ , +\infty[$ si $a > 0$ car :

$$|f\ '_n(x)| \ \leq\ \frac{n\,e^{-na}}{1+n^2} \qquad \text{pour tout } x \geq a$$

Le théorème de dérivation montre alors que $S(x)$ est de classe C^1 sur $]0\ , +\infty[$ avec

$$S\ '(x) \ =\ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,e^{-nx}}{1+n^2}$$

2) Si $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}\ x^n$ on a vu que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0\ , 1]$ et par suite $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}\ x^n$ est continue sur $[0\ , 1]$.

Les f_n sont C^1, $f\ '_n(x) = (-1)^n\ x^{n-1}$ et la série $\sum_{n\geq 1} f\ '_n$ (qui diverge en $x = 1$) converge normalement sur tout intervalle $[0\ , a]$ avec $a \in\ ]0\ , 1[$ car :

$$|(-1)^n\ x^{n-1}| \ \leq\ a^{n-1} \qquad \text{pour tout } x \in [0\ , a]$$

$$(1) \qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} = \frac{-1}{1+x} \qquad \text{pour tout } x \in [0\,,1]$$

On a donc $S(x) + \ell n(1+x)$ constant sur $[0\,,1[$ et, en regardant $x = 0$:

$$S(x) = -\ell n(1+x) \qquad \text{sur } [0\,,1[$$

Enfin, S étant continue sur $[0\,,1]$ on a :

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} (-\ell n(1+x)) = -\ell n 2$$

Remarque

Si on part de la formule (1) avec convergence normale de la série sur $[0\,,a]$ on peut appliquer le théorème d'intégration des sommes de série et on obtient :

$$\forall a \in]0\,,1[\quad , \int_0^a \frac{-dx}{1+x} = \int_0^a \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^a (-1)^n x^{n-1}\, dx \right)$$

soit $-\ell n(1+a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} a^n$.

Le théorème de continuité sur $[0\,,1]$ donne alors, comme ci-dessus :

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ell n 2$$

Exercice 12

Convergence uniforme de la série de fonctions : $u_n(x) = n^{-\alpha} x^2 e^{-nx^2}$; $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 13

Même question pour : $u_n(x) = x^{\alpha}(1-x)^n$; $\alpha > 1$, $0 \le x \le 1$.

Quelques méthodes pour démontrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme

1) $u_n(x) = x^n (1-x)$, $0 \le x \le 1$

2) $u_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$

On pourra comparer la régularité de la fonction somme avec celle de $u_n(x)$.

Exercice 15

On considère la série de fonctions : $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ de réels telle que la suite numérique de terme général $u_n(a_n)$ ne converge pas vers 0. Convergence simple, uniforme de la série de fonctions.

Continuité – Dérivabilité – Intégrabilité

Exercice 16 *(Partiel 1989)*

Nature de la série de fonction $\sum u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{n^2 e^{-nx^2}}{n^3+1}$.

Etudier la continuité de la somme de cette série sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 17 *(Partiel 1990)*

Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{x}{n\,(1+n^2 x^2)}$, $n \ge 1$.

Montrer que la somme de cette série est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty\,,0[\ \cup\ ]0\,,+\infty[$.

Exercice 18 *(Partiel 1992)*

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$ lorsque la série est convergente.

Montrer que la fonction f est définie continue et dérivable dans l'intervalle $]1\,,\infty[$.

Exercice 19

Convergence simple et uniforme de $f(x) = \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 20

On définit, pour $x \geq 0$, $f(x)$ par : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n\,(1+n^2\,x)}$.

Etudier la dérivabilité de f , notamment en 0 , à droite.

Exercice 21

Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{sin\,(2^n\,x)}{n^n}$ est de classe C^∞ .

Exercice 22

1) Quel est le domaine de définition , Δ , de la fonction $f : x \to \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$?

Montrer que f est continue sur Δ .

2) Quel est le domaine de définition Δ_1 , de la fonction $g : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$?

Montrer que g est de classe C^1 sur Δ_1 .

Exercice 23

Nature et somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} cos^n\,x\,dx$.