INTEGRALES GENERALISEES

I. Généralités

Dans le chapitre précédent a été définie et étudiée la notion d'intégrale de Riemann pour des fonctions définies sur un intervalle fermé et borné $[a\ ,\ b]$ dites intégrables au sens de Riemann. On va maintenant s'intéresser aux fonctions f à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle $[a\ ,\ b[$ (resp. $]a\ ,\ b]$), b pouvant être $+\infty$ (resp. a pouvant être $-\infty$), et qui ne sont pas nécessairement bornées. On considérera ensuite les fonctions définies seulement sur des intervalles ouverts $]a\ ,\ b[$, éventuellement non bornés.

Exemples : $\dfrac{1}{x^n}$ sur $]0\ ,\ 1]$ ou sur $[1\ ,\ +\infty[$, $\ell n\ x$ sur $]0\ ,\ 1]$ ou $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0\ ,\ 1[$ …

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre seront à valeurs réelles ou complexes, le cas des fonctions complexes pouvant se ramener à celui des fonctions réelles en considérant Ref et Imf.

Définition 1
Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, une application f de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sera dite localement intégrable sur I si sa restriction à tout intervalle fermé et borné contenu dans I est intégrable au sens de Riemann.

Il suffit, par exemple, que f soit continue sur I, ou continue par morceaux, et c'est ce qui arrivera pratiquement toujours dans les exemples considérés.

Définition 2
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a\ ,\ b[$, où $a \in \mathbb{R}$ mais b peut-être $+\infty$ (resp. $]a\ ,\ b]$ où a peut être $-\infty$). On dit que l'intégrale de f sur $[a\ ,\ b[$ est convergente (ou existe) si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ où $x \in [a\ ,\ b[$ (resp. $F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ où $x \in]a\ ,\ b]$) a une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures (resp. quand x tend vers a par valeurs supérieures). Cette limite est alors appelée intégrale généralisée de f sur $[a\ ,\ b[$ (resp. $]a\ ,\ b]$) et notée $\int_a^b f(t)\,dt$.

Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale de f sur $[a\ ,\ b[$ (resp. $]a\ ,\ b]$) est divergente (ou n'existe pas).

Une première méthode pour étudier la convergence d'une intégrale consiste donc à calculer, quand c'est possible, $\int_a^x f(t)\, dt$ (ou $\int_x^b f(t)\, dt$) et à chercher ensuite si elle a une limite quand x tend vers b^- (resp. a^+) .

Exemple 1

On a $\int_0^x e^{-t}\, dt = 1 - e^{-x}$ fonction qui tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale de e^{-t} sur $[0\ ,+\infty[$ est convergente et $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1.$

Exemple 2

On a $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = Arctan\ x$ donc l'intégrale de $\frac{1}{1+t^2}$ sur $[0\ ,+\infty[$ est convergente et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. De même $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Exemple 3

On a $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x}$ donc l'intégrale de $\frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0\ ,1]$ est convergente et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

Exemple 4

La formule $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ell n\ x$ montre que l'intégrale de $\frac{1}{t}$ sur $]0\ ,1]$ ou sur $[1\ ,+\infty[$ est divergente.

Cas des fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$, a pouvant être $-\infty$ et/ou b pouvant être $+\infty$

Définition 3

Soit f localement intégrable sur un intervalle $]a\ ,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que l'intégrale de f sur $]a\ ,b[$ est convergente si, ayant choisi un $c \in\ ]a\ ,b[$, chacune des intégrales de f sur $]a\ ,c]$ et sur $[c\ ,b[$ sont convergentes et on pose alors :

(1) $$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$

Il est clair que cette définition n'a de sens qu'à condition de vérifier que les convergences ne dépendent pas du c choisi et que la somme de la formule (1) est la même quel que soit le c.

Exemple 5

$\dfrac{1}{1+t^2}$ a une intégrale convergente sur $]-\infty\ ,+\infty[$ et on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$ (cf. exemple 2).

Exemple 6

L'intégrale de $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0\ ,+\infty[$ n'est pas convergente car elle ne l'est pas sur $[1\ ,+\infty[$ (cf. exemple 3).

Extension de la définition 3 :

Plus généralement, soit f définie sur $]a\ ,b[$ privé d'un nombre fini de points c_i avec $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$ et f localement intégrable sur chaque intervalle $]c_i\ ,c_{i+1}[$ où $i = 0\ ,1\ ,\ldots\ ,n$ en posant $a = c_0$ et $b = c_{n+1}$. On dit que l'intégrale de f sur $]a\ ,b[$ est convergente si toutes les intégrales de f sur $]c_i\ ,c_{i+1}[$ où $i = 0\ ,\ldots\ ,n$ sont convergentes et on pose alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(t)\,dt$$

Exemples de références :

1) Intégrales de Riemann : soit $\gamma \in \mathbb{R}$.

a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ $(a > 0)$ (resp. $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} \frac{dt}{|t|^\gamma}$ avec $b < 0)$ converge si et seulement si $\gamma > 1$.

b) $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dt}{(t-a)^\gamma}$ $(b > a)$ (resp. $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dt}{(b-t)^\gamma}$) converge si et seulement si $\gamma < 1$.

2) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ell n\, t\, dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^1 \ell n\, t\, dt = -1$.

3) L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t(\ell n\, t)^\gamma}$ $(a > 1$ et $\gamma \in \mathbb{R})$ converge si et seulement si $\gamma > 1$.

Utilisation d'intégrations par parties ou de changements de variables :

Il est inutile d'établir des théorèmes nouveaux pour les intégrales généralisées ; il suffira, comme dans l'exemple précédent, d'effectuer ces opérations sur les intégrales $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ avant de chercher la limite éventuelle de la fonction de x.

Exemple

Par récurrence et intégration par parties, on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ est convergente et vaut $n!$.

Proposition 1
Si f et g ont des intégrales convergentes sur $[a , b[$ (ou $]a , b]$, $]a , b[$) , $f+g$ et λf (λ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ont aussi des intégrales convergentes sur le même intervalle et on a :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\; dt = \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} + \int_a^b g(t)\, dt$$

$$\int_a^b \lambda f(t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt$$

Corollaire 1
Si sur $[a , b[$ (ou $]a , b]$, $]a , b[$) f a une intégrale convergente et g une intégrale divergente, alors $f+g$ a une intégrale divergente.

II. Cas des fonctions réelles de signe constant

Quitte à considérer $-f$, on peut toujours supposer f positive ou nulle. Dans ce cas, sur $[a , b[$ $\int_a^x f(t)\, dt$ est une fonction croissante de x ce qui conduit au résultat :

Théorème
Soit f une fonction de $[a , b[$ dans $\mathbb{R}$, positive et localement intégrable. Pour que l'intégrale de f sur $[a , b[$ converge il faut, et il suffit, qu'il existe un nombre $M>0$ tel que, pour tout $x\in [a , b[$, $\int_a^x f(t)\, dt \le M$.

Remarque 1

Il y a bien sûr un théorème analogue sur $]a , b]$ avec la condition $\int_x^b f(t)\, dt \le M$ pour tout x .

Remarque 2

Comme en prenant $a' \in [a\ ,b[$ on a $\int_a^x f(t)\ dt = \int_a^{a'} f(t)\ dt + \int_{a'}^x f(t)\ dt$, le théorème précédent est encore vrai si f n'est positive que sur $[a'\ ,b[$.

Corollaire

Soient f et g deux fonctions positives, définies sur $I = [a\ ,b[$ (resp. $I =]a\ ,b]$), localement intégrables sur I et telles que $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in I$.

a) Si l'intégrale de g sur I converge, il en est de même de l'intégrale de f sur I .

b) Si l'intégrale de f sur I diverge, il en est de même de celle de g sur le même intervalle.

<u>Exemple</u>

L'inégalité, pour $t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et l'étude déjà faite pour la fonction e^{-t} montre que e^{-t^2} a une intégrale convergente sur $[1\ ,+\infty[$ et aussi sur tout intervalle $[a\ ,+\infty[$.

<u>Exemple</u>

Les inégalités $0 < \sin t \leq t$ sur $]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$ et la divergence de l'intégrale de $\frac{1}{t}$ sur $]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$ fournit la divergence de l'intégrale de $\frac{1}{\sin t}$ sur $]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$.

<u>Exemple</u>

Les inégalités $0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, avec les résultats vus sur les intégrales de Riemann, montrent que $\frac{\sin^2 t}{t^2}$ a une intégrale convergente sur $[1\ ,+\infty[$; il en est de même sur $[0\ ,+\infty[$ après avoir prolongé $\frac{\sin^2 t}{t^2}$ par continuité en 0.

Corollaire

Soient f et g deux fonctions positives, définies sur $I = [a\ ,b[$ (resp. $I =]a\ ,b]$) , localement intégrables sur I et telles que $f(t) \sim g(t)$ $(t \to b^-)$ (resp. $t \to a^+$) .

La fonction f a une intégrale convergente sur I si et seulement si g a une intégrale convergente sur I. On dit aussi que les deux intégrales sont de même nature.

<u>Exemple</u>

Si $a \geq 0$ et $\gamma > 0$, les fonctions $\frac{1}{a + t^\gamma}$ ou $\frac{1}{\ell n\, t + t^\gamma}$ ont une intégrale convergente sur $[1\ ,+\infty[$ si et seulement si $\gamma > 1$.

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes et, lorsqu'elles convergent, les calculer.

$$I_1 = \int_0^1 \ell n(x)\, dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}\, dx$$

$$I_4 = \int_0^{\pi/2} \tan x\, dx \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{e^x}{x}\, dx \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{x\, dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$$

$$I_7 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx \qquad I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^2}\, dx \qquad I_9 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$$

$$I_{10} = \int_1^{+\infty} \frac{\ell n\, x}{x^\alpha}\, dx \;,\; \alpha \in \mathbb{R} \qquad I_{11} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ell n\, x} \qquad I_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$$

$$I_{13} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \qquad I_{14} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2+1})^n}\, dx$$

$$I_{15} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\, dx \qquad I_{16} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right) dx$$

Exercice 2

Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\, dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(\ell n\, x)\sin x}\, dx \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x}\, e^{-x}\, dx \qquad I_5 = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-ax}\, dx \;,\; \alpha > 0 \;,\; a > 0$$

$$I_6 = \int_0^{+\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2+2x+2}\,)\, dx \qquad I_7 = \int_0^{1/2} \ell n\left(\frac{1}{1-3x+2x^2}\right) dx$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{1-e^x + a\sin x}{x^2}\, dx \;,\; a \in \mathbb{R} \qquad I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{\sin(x^\alpha)} \;,\; a \in \mathbb{R}^+$$

$$I_{10} = \int_0^1 \frac{\ell n\, x}{\sqrt{(1+x^2)}}\, dx$$

Exercice 3

Montrer que la convergence de $\int_0^{\pi/2} \ell n(\sin x)\, dx$ et de $\int_0^{\pi/2} \ell n(\cos x)\, dx$.

Calculer ces intégrales.

Exercice 4

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ell n\, t}{1+t^2}\, dt$ est convergente. Calculer sa valeur.

Exercice 5

Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx$ sont convergentes et les calculer en fonction de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ $(= \pi/2)$.

Exercice 6

Prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\pi x) - \arctan x}{x}\, dx$.

La calculer en transformant $\int_0^{A} \frac{\arctan(\pi x) - \arctan x}{x}\, dx$.

Exercice 7

Soient a et b deux réels strictement positifs. Prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$.

La calculer en transformant, pour $0 < \varepsilon < X$, l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$.

Exercice 8

Montrer que l'intégrale de $\frac{1}{(x-i)^2}$ sur $]-\infty\, , +\infty[$ est convergente et la calculer.

III. Cas des fonctions qui ne sont pas réelles de signe constant

1. Critère de Cauchy : Le résultat suivant est surtout utile dans les questions théoriques :

Théorème
Soit f une fonction de $I = [a\ ,\ b[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, localement intégrable. Pour que l'intégrale de f sur I soit convergente, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c \in [a\ ,\ b[$ tel que pour tous x' et x'' dans $[c\ ,\ b[$ on ait $\left| \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \right| \leq \varepsilon$.

Remarque : Théorème analogue sur $]a\ ,\ b]$ avec x' et x'' dans $]a\ ,\ c]$.

2. Convergence absolue

L'idée est de se ramener à l'étude pour des fonctions positives :

Définition 4
Soit f une fonction de $I = [a\ ,\ b[$ (resp. $]a\ ,\ b]$) dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, localement intégrable sur I .
On dit que l'intégrale de f sur I est <u>absolument convergente</u> quand l'intégrale de $|f|$ sur I est convergente.

<u>Exemple</u>
$\dfrac{\sin x}{x^2}$ a une intégrale absolument convergente sur $[1\ ,\ +\infty[$ car $\left| \dfrac{\sin x}{x^2} \right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{x^2}$ a une intégrale convergente sur $[1\ ,\ +\infty[$.

Théorème
Si f a une intégrale absolument convergente sur $I = [a\ ,\ b[$ (resp. $]a\ ,\ b]$) , elle a également une intégrale convergente sur I. De plus, on a :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (a < b)$$

Attention, la réciproque de ce théorème est fausse et une intégrale peut très bien être convergente sans être absolument convergente ; une telle intégrale est dite <u>semi-convergente</u>.

<u>Exemple</u>
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est semi-convergente.

3. Utilisation de développements asymptotiques

Il est parfois possible, en utilisant des développements limités, d'écrire une fonction f, dont on veut étudier la convergence de l'intégrale sur $I = [a\ ,b[$ (resp. $]a\ ,b]$), comme somme de deux (ou plus) fonctions dont la convergence des intégrales est plus simple à étudier.

Si on considère, par exemple, la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x + \cos x}$ continue sur $[1\ ,+\infty[$, on peut écrire $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{\cos x}{x}}$ et avec le développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{1}{1+u}$:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\left[1 - \frac{\cos x}{x}\,(1+\varepsilon(x))\right] \text{ avec } \lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x \cos x}{x^2}\,(1+\varepsilon(x))$$

L'intégrale de $\dfrac{\sin x}{x}$ est semi-convergente sur $I = [1, +\infty[$ et celle de $\dfrac{\sin x \cos x}{x^2}\,(1 + \varepsilon(x))$ est absolument convergente sur I puisque $\left|\dfrac{\sin x \cos x}{x^2}\,(1+\varepsilon(x))\right| \leq \dfrac{2}{x^2}$ pour x supérieur à un A convenable. On peut alors conclure à la convergence de l'intégrale de f sur I avec la proposition du paragraphe I.

Exercice 9

Montrer que les intégrales suivantes sont absolument convergentes.

(a) $\displaystyle\int_0^1 (\ell n\ t)\left(\sin\frac{1}{t}\right) dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos t\, dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\left(t^2 \sin t - \cos\frac{1}{t}\right) dt$ (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ell n\, t)\cos t}{t^{3/2}}\, dt$

Exercice 10

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x \sin\frac{1}{x^2}\, dx$ converge.

Exercice 11

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence et la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$.

En déduire la nature des intégrales de Fresnel $I = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$ et $J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$.

Exercice 12

Soient $f : t \longmapsto \frac{\sin t}{t}\left(1 + \frac{\sin t}{\ell n\, t}\right)$ et $g : t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$.

Montrer que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ et que les intégrales sont de nature différente.

Exercice 13

1) Soit $x \geq 0$ .Justifier l'existence de $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$, sa dérivabilité pour $x > 0$ et calculer $f\,'(x)$.

2) En utilisant des intégrations par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente et vaut 1.

Exercice 14

Reprendre l'exercice précédent avec $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \sin(t^2)\, dt \right) dx$ qui vaut 1/2.

Exercice 15 (Septembre 1998)

1) Déterminer, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} (x-1)^{\alpha} e^{-x^2}\, dx$.

2) Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-t}\, dt$.

Exercice 16 (Septembre 1999)

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\cos(t^2)}{e^t - 1}\, dt$.

Exercice 17 (Novembre 1997)

1) Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{sin^2 x}{x} \, dx$ (on pourra transformer $sin^2 x$).

2) En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{sin\, x}{sin\, x + \sqrt{x}} \, dx$.

Exercice 18 (Novembre 1999)

1) Déterminer la nature, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, de l'intégrale $\int_0^{1} \frac{dx}{(1 - cos\, x)^{\alpha}}$.

2) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{cos\, t}{t^{2/3}} \, dt$ converge.