ENSEMBLES SEMI-ANALYTIQUES

Stanisław ŁOJASIEWICZ*
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
Bures-sur-Yvette (Seine-et-Oise) France

*En congé de l'Université de Cracovie

Juillet 1965

Avertissement

Ceci est la saisie en LaTeX des notes du cours du Professeur Stanisław ŁOJASIEWICZ à Orsay, polygraphiées par l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques. J'espère que cette saisie rendra plus facilement accessible ce texte de référence.

La saisie en LaTeX modifie considérablement la mise en page. Pour permettre les références faciles au texte original, les numéros de page de celui-ci sont indiqués par des notes marginales.

J'ai introduit des titres (indiqués entre crochets) pour les différents numéros, et ajouté une table des matières ainsi qu'un index. J'ai aussi essayé de corriger quelques coquilles du texte initial ; j'espère ne pas en avoir ajouté trop de nouvelles ! Prière de me signaler les erreurs et d'adresser vos remarques à : `michel.coste@univ-rennes1.fr` Je mettrai à jour ce document en tenant compte des remarques. Ceci est la version du 29 août 2006.

Michel Coste

Table des matières

1 [Fonctions holomorphes]

Soit G un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* (dans G), si pour chaque point $(\mathring{z}_1, \ldots, \mathring{z}_n) \in G$ elle est développable dans un voisinage $U = \{|z_\nu - \mathring{z}_\nu| \leq r_\nu \ , \ \nu = 1, \ldots, n\} \subset G$ (avec $r_\nu > 0$) en un série entière à $(\mathring{z}_1, \ldots, \mathring{z}_n)$:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum a_{\nu_1 \ldots \nu_n} (z_1 - \mathring{z}_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - \mathring{z}_n)^{\nu_n}$$

absolument convergente dans ce voisinage (ce qui est équivalent à $\sum a_{\nu_1 \ldots \nu_n} r_1^{\nu_1} \cdots r_n^{\nu_n} < \infty$). Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que f soit localement bornée[1] et holomorphe par rapport à chaque variable séparément.

En effet, on voit que si f est localement développable en série entière ci-dessus, elle est continue (vu la convergence uniforme) et holomorphe séparément par rapport à chaque variable (comme par exemple $f(\mathring{z}_1, \ldots, \mathring{z}_{n-1}, z) = \sum a_{0 \ldots 0 \nu} (z - \mathring{z}_n)^\nu$). Supposons maintenant que f soit localement bornée et holomorphe séparément par rapport à chaque variable. Nous allons montrer (ce qui suffit), par récurrence sur n , la proposition suivante : si $U = \{|z - \mathring{z}_\nu| \leq r_\nu\} \subset G$, alors f est développable dans U en série entière (comme ci-dessus) absolument convergente dans U . La proposition étant claire pour $n = 1$, supposons la vraie pour $n - 1$. On a $f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(z_1, \ldots, z_{n-1})(z_n - \mathring{z}_n)^\nu$ dans U , la série étant absolument convergente, où

$$A_\nu(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - \mathring{z}_n| = r_n} \frac{f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta)}{(\zeta - \mathring{z}_n)^{\nu+1}} \, \mathrm{d}\zeta \ .$$

La dernière formule définit A_ν dans un voisinage de $W = \{|z_\nu - \mathring{z}_\nu| \leq r_\nu\}$, p. 2
et montre que A_ν est localement bornée (dans ce voisinage) et holomorphe séparément par rapport à chaque variable, ce qui résulte du suivant :

Lemme. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $f : \Omega \times [a, b] \to \mathbb{C}$. Si $f(z, t)$ est bornée, holomorphe par rapport à z , et continue par rapport à t , alors $g(z) = \int_a^b f(z, t) \, \mathrm{d}t$ est holomorphe dans Ω .*

(On le vérifie prenant les sommes de Riemann, et utilisant le théorème de convergence simple d'une suite uniformément bornée de fonctions holo-

[1] Selon le théorème de Hartogs cette condition est superflue.

morphes). Par hypothèse de récurrence, A_ν est développable en série :

$$A_\nu(z_1,\ldots,z_{n-1}) = \sum_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}} a_{\nu_1,\ldots,\nu_{n-1},\nu}(z_1-\overset{\circ}{z}_1)^{\nu_1}\cdots(z_{n-1}-\overset{\circ}{z}_{n-1})^{\nu_{n-1}}$$

absolument convergente dans W . En substituant ceci dans le développement précédent, on obtient le développement cherché.

On a montré en même temps les deux faits suivants.

Toute fonction holomorphe est continue.

Si $V=\{|z_\nu-\overset{\circ}{z}_\nu|<r_\nu\}\subset G$ (ouvert), alors toute fonction holomorphe dans G admet un développement en série entière à $(\overset{\circ}{z}_1,\ldots,\overset{\circ}{z}_n)$ absolument convergente dans V . Ceci résulte du fait suivant :

Les coefficients $a_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ sont bien déterminés par f (et $(\overset{\circ}{z}_1,\ldots,\overset{\circ}{z}_n)$) (En effet, vu qu'on a $f=\sum_{\nu=0}^{\infty}A_\nu(z_1,\ldots,z_{n-1})(z_n-\overset{\circ}{z}_n)^\nu$, où

$$A_\nu(z_1,\ldots,z_{n-1}) = \sum_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}} a_{\nu_1,\ldots,\nu_{n-1},\nu}(z_1-\overset{\circ}{z}_1)^{\nu_1}\cdots(z_{n-1}-\overset{\circ}{z}_{n-1})^{\nu_{n-1}} ,$$

$f\equiv 0$ implique $A_\nu\equiv 0$, et on peut procéder par récurrence sur n).

Si f, g sont holomorphes (dans un ouvert G), il en est de même avec $f+g$, fg , et $\dfrac{f}{g}$ (pourvu que $g\neq 0$ dans G). p. 3

Si f est holomorphe dans un G ouvert et connexe, alors
$\{f\equiv 0$ dans un sous-ouvert non vide de $G\}\Rightarrow\{f\equiv 0$ dans $G\}$; alors
$\{f\equiv 0$ dans un sous-ouvert non vide de $G\cap\mathbb{R}^n\}\Rightarrow\{f\equiv 0$ dans $G\}$. En effet, la première propriété résulte du fait que si s est un segment compact contenu dans G et parallèle à un des axes de x_i ou y_i , alors
$\{f\equiv 0$ au voisinage d'un bout de $s\}\Rightarrow\{f\equiv 0$ au voisinage de $s\}$, et que tous les deux points de G peuvent être joints par une ligne polygonale composée des tels segments ; pour l'autre, en vérifie que si $\{|z_i-\overset{\circ}{x}_i|<\varepsilon\subset G$ ($\overset{\circ}{x}_i$ réels), alors

$$f(z_1,\ldots,z_k,x_{k+1},\ldots,x_n)=0 \text{ pour } \begin{array}{ll} |z_i-\overset{\circ}{x}_i|<\varepsilon & i=1,\ldots,k \\ |x_i-\overset{\circ}{x}_i|<\varepsilon & i=k+1,\ldots,n \end{array}$$

implique

$$f(z_1,\ldots,z_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n)=0 \text{ pour } \begin{array}{ll} |z_i-\overset{\circ}{x}_i|<\varepsilon & i=1,\ldots,k+1 \\ |x_i-\overset{\circ}{x}_i|<\varepsilon & i=k+2,\ldots,n \end{array}$$

d'où $f = 0$ dans un voisinage réel de $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n)$ implique $f = 0$ dans un voisinage complexe de ce point.

Si f est holomorphe dans G , alors $\overline{f}$, donnée par

$$\overline{f}(z_1, \ldots, z_n) = \overline{f(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})} \ ,$$

est holomorphe dans $\{(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}) \in G\}$. Observons que $\overline{fg} = \overline{f}.\overline{g}$. Observons que $f = \overline{f}$ au voisinage de $G \cap \mathbb{R}^n$ si et seulement si la restriction de f à $G \cap \mathbb{R}^n$ est réelle ; on dira alors que f est "réelle" ,

Si f est holomorphe dans G , il en est de même avec $\dfrac{\partial f}{\partial z_i}$. (En effet, on a par exemple

$$\frac{\partial f}{\partial z_n}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - \mathring{z}_n| = r} \frac{f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta)}{(\zeta - \mathring{z}_n)^2} \, \mathrm{d}\zeta \ ,$$

pourvu que $\{|z_i - \mathring{z}_i| \leq r\} \subset G$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial z_n}$ est localement bornée, et (lemme) holomorphe séparément par rapport à chaque variable). Il en résulte que : p. 4

Toutes les dérivées d'une fonction holomorphe, sont holomorphes. Comme on a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial z_i}, \ \dfrac{\partial f}{\partial y_i} = i \, \dfrac{\partial f}{\partial z_i}$ on obtient par récurrence :

Toute fonction holomorphe est C^∞ comme une fonction de $2n$ variables réelles.

Si f est holomorphe dans un ouvert $G \subset \mathbb{C}^n$, et si $\varphi_\nu, \ \nu = 1, \ldots, n$, sont holomorphes dans un ouvert $B \subset \mathbb{C}^k$ et telles que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(B) \subset G$, alors $h = f \circ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est holomorphe dans B et on a

$$\frac{\partial h}{\partial t_s} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_\nu} \circ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \right) \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_s} \ .$$

En effet, comme h est continue, il suffit de considérer le cas $k = 1$. Soit $\mathring{z}_\nu = \varphi_\nu(t_0), t_0 \in B$. Comme f est continûment dérivable comme une fonction de $2n$ variables réelles, on vérifie facilement (en utilisant $\dfrac{\partial f}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial f}{\partial z_\nu}, \ \dfrac{\partial f}{\partial y_\nu} = i \, \dfrac{\partial f}{\partial z_\nu}$) que

$$f(z_1, \ldots, z_n) - f(\mathring{z}_1, \ldots, \mathring{z}_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(\mathring{z}_1, \ldots, \mathring{z}_n)(z_\nu - \mathring{z}_\nu) + o(\sum |z_\nu - \mathring{z}_\nu|)$$

d'où $\dfrac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}$ converge vers $\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_\nu}(\mathring{z}_1,\ldots,\mathring{z}_n)\varphi'_\nu(t_0)$ lorsque $t\to t_0$.

Si f est holomorphe dans un voisinage de $(\mathring{z}_1,\ldots,\mathring{z}_k,\mathring{W})$, $f(\mathring{z}_1,\ldots,\mathring{z}_k,\mathring{W})=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial W}(\mathring{z}_1,\ldots,\mathring{z}_k,\mathring{W})\neq 0$, alors il existe $\varepsilon>0$ et $\delta>0$ tels que $\{f=0\ ,\ |z_\nu-\mathring{z}_\nu|<\delta\ ,\ |W-\mathring{W}|<\varepsilon\}$ est le graphe d'une fonction φ holomorphe dans $\{|z_\nu-\mathring{z}_\nu|<\delta\}$; $f(z_1,\ldots,z_k,\varphi((z_1,\ldots,z_k))=0$ dans p. 5
$\{|z_\nu-\mathring{z}_\nu|<\delta\}$. En effet, comme f est continûment dérivable et comme le jacobien de l'application $W\to f(z_1,\ldots,z_k,W)$ est égal à $\left|\dfrac{\partial f}{\partial w}\right|^2$, il résulte que pour certains $\varepsilon>0$ et $\delta>0$ $\{f=0\ ,\ |z_\nu-\mathring{z}_\nu|<\delta\ ,\ |W-\mathring{W}|<\varepsilon\}$ est le graphe d'une fonction continûment dérivable dans $\{|z_\nu-\mathring{z}_\nu|<\delta\}$; on calcule facilement qu'elle satisfait aux conditions de Cauchy : $\dfrac{\partial f}{\partial x_\nu}+i\dfrac{\partial f}{\partial y_\nu}=0$, donc est holomorphe.

Soit B un ouvert connexe de $\mathbb{C}^k$, V un sous-ouvert de B , $0\leq r<R$. Alors chaque fonction holomorphe dans $G=(B\times\{r<|w|<R\})\cup(V\times\{|w|<R\})$ admet une extension sur $B\times\{|w|<R\}$.

En effet, soit f holomorphe dans G , et soit $r<\rho<R$. Alors la fonction $\widetilde{f}(z,w)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|s|=\rho}\dfrac{f(z,s)}{s-w}\,\mathrm{d}s$ est holomorphe dans $B\times\{|w|<\rho\}$ (lemme) et coïncide avec f dans $V\times\{|w|<\rho\}$. Comme $G\cap(B\times\{|w|<\rho\})$ est connexe et contient $V\times\{|w|<\rho\}$, f et $\widetilde{f}$ y coïncident, donc $f\cup\widetilde{f}$ est une extension cherchée.

2 [Théorème de préparation]

On appelle *polynôme distingué* (à $(0,\ldots,0)\in\mathbb{C}^{m+1}$) toute fonction de la forme $H(z;w)=w^k+a_1(z)w^{k-1}+\cdots+a_k(z)$ où a_ν sont holomorphes dans un ouvert B de C^m contenant 0 et $a_\nu(0)=0$, $\nu=1,\ldots,k$ (ce qui est équivalent que $H(z;w)$ est une fonction holomorphe dans $B\times\mathbb{C}$, polynôme unitaire en w , et telle que $H(0,w)=w^k$ ou bien $H(0,w)$ a un zéro unique 0). Alors pour chaque $\varepsilon>0$ il existe un $\delta>0$ tel que p. 6

$$|z_\nu|<\delta\ ,\ H(z_1,\ldots,z_m;w)=0\quad\Rightarrow\quad|w|<\varepsilon\ .$$

(En effet, si $|w| \geq \epsilon$, alors $H(z,w) = w^k(1 + \dfrac{a_1(z)}{w} + \cdots + \dfrac{a_k(z)}{w^k}) \neq 0$ lorsque $a_\nu(z)$ sont suffisamment petits, donc, lorsque $|z_\nu| < \delta$ avec un $\delta > 0$ suffisamment petit.)

Théorème de préparation de Weierstrass. *Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de $0 = (0,\ldots,0) \in \mathbb{C}^{m+1}$, telle que $f(0,\ldots,0,w) \not\equiv 0$ au voisinage de 0 . Alors $f = H\,E$ dans un voisinage de 0 où H est un polynôme distingué et E est une fonction holomorphe dans un voisinage de 0 , et telle que $E(0) \neq 0$. Le couple $H,\ E$ est déterminé au voisinage de 0 par ces conditions.*

Démonstration. *Unicité*. Soit $f = H\,E$ pour $|z_\nu| < \varepsilon$, $|w| < \varepsilon$; en faisant $\varepsilon > 0$ suffisamment petit nous avons $E \neq 0$ dans $\{|z_\nu| < \varepsilon\ ,\ |w| < \varepsilon\}$; alors il existe un $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$ tel que $H(z,w) = 0$, $|z_\nu| < \delta \Rightarrow |w| < \varepsilon$; il en résulte que pour $|z_\nu| < \delta$, les zéros de $H(z,w)$ (avec leur multiplicités) sont précisément ceux de $f(z,w)$ dans $\{|w| < \varepsilon\}$; comme $H(z,w)$ est unitaire, il est déterminé par ses zéros, pour $|z_\nu| < \delta$; ainsi $H,\ E$ sont déterminés dans $\{|z_\nu| < \delta\ ,\ |w| < \varepsilon\}$.

Existence. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que f soit holomorphe dans $\{|z_\nu| < \varepsilon\ ,\ |w| < \varepsilon\}$ et te1 que $f(0,w)$ n'ait pas de zéros dans $\{0 < |w| \leq \varepsilon\}$. Soit r la multiplicité de zéro de $f(0,w)$ en 0 . Selon le théorème de Rouché
il existe un $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$ tel que pour $|z_\nu| < \delta$, $f(z,w) \neq 0$ sur $|w| = \varepsilon$ p. 7
et $f(z,w)$ a précisément r zéros $w_1(z),\ldots,w_r(z)$ dans $\{|w| < \varepsilon\}$; on a alors (théorème des résidus) :

$$b_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\varepsilon} w^j\,\frac{f_w(z,w)}{f(z,w)}\,\mathrm{d}w = w_1(z)^j + \cdots + w_r(z)^j$$

et on voit (lemme) que $b_j(z)$ est holomorphe dans $\{|z_\nu| < \delta\}$. Posons

$$H(z;w) = (w - w_1(z))\cdots(w - w_r(z)) = w^r + a_1(z)w^{r-1} + \cdots + a_r(z)\ ;$$

alors $a_\nu(0) = 0$; or, a_ν s'expriment comme des polynômes en b_j (aux coefficients numériques), donc a_ν sont holomorphes dans $\{|z_\nu| < \delta\}$, et $H(z,w)$ est un polynôme distingué. Comme, pour $|z_\nu| < \delta$, $f(z,w)$ et $E(z,w)$ ont les mêmes zéros dans $\{|w| \leq \varepsilon\}$ (et $H(z,w) \neq 0$ sur $|w| = \epsilon$), $E(z,w) = \dfrac{f(z,w)}{H(z,w)}$ est bien définie, $\neq 0$, et holomorphe en w dans un voisinage de $\{|w| \leq \varepsilon\}$; on a donc

$$E(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\varepsilon}\frac{f(z,s)}{H(z,s)(s-w)}\,\mathrm{d}s\ ,$$

ce qui prouve (lemme) que E est holomorphe dans $\{|z_\nu| < \delta\ ,\ |w| < \varepsilon\}$

3 [Fonctions analytiques]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite *analytique* (dans Ω), si pour chaque point $(\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_n) \in \Omega$ elle est développable dans un voisinage $U = \{|x_\nu - \mathring{x}_\nu| \le r_\nu\} \subset \Omega$ (avec $r_\nu > 0$) en une série entière à $(\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_n)$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{\nu_1 \dots \nu_n} (x_1 - \mathring{x}_1)^{\nu_1} \cdots (x_n - \mathring{x}_n)^{\nu_n}$$

absolument convergente dans ce voisinage, ce qui est équivalent à $\sum a_{\nu_1 \dots \nu_n} {r_1}^{\nu_1} \cdots {r_n}^{\nu_n} < \infty$; alors, par conséquent, la série $f(z_1, \dots, z_n) =$ p. 8
$\sum a_{\nu_1 \dots \nu_n} (z_1 - \mathring{x}_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - \mathring{x}_n)^{\nu_n}$ est absolument convergente dans le voisinage complexe $\widetilde{U} = \{|z_\nu - \mathring{x}_\nu| \le r_\nu\}$. On voit donc que pour que f soit analytique dans Ω il faut et il suffit qu'elle admette une extension holomorphe sur un voisinage complexe de Ω (c'est-à-dire, sur un ouvert dans $\mathbb{C}^n$ qui contient Ω). (Suffisance est claire ; nécessité : on prend, pour chaque $x \in \Omega$, un $\widetilde{U}_x = \{|z_\nu - x_\nu| \le r_\nu\}$ et $\widetilde{f}_x : \widetilde{U}_x \to \mathbb{C}$ holomorphe, donné par série ci-dessus ; comme on a $\widetilde{f}_{x'} = \widetilde{f}_{x''}$ dans $\mathbb{R}^n \cap \widetilde{U}_{x'} \cap \widetilde{U}_{x''}$, $\widetilde{U}_{x'} \cap \widetilde{U}_{x''}$ étant connexe, on a $\widetilde{f}_{x'} = \widetilde{f}_{x''}$ dans $\widetilde{U}_{x'} \cap \widetilde{U}_{x''}$; il en résulte que $\bigcup \widetilde{f}_x$ est une extension holomorphe de f sur $\bigcup \widetilde{U}_x$).

Les coefficients $a_{\nu_1 \dots \nu_n}$ sont bien déterminés par f .

Si f est holomorphe, elle est analytique comme une fonction de $2n$ variables réelles ; par conséquent sa partie réelle et imaginaire est analytique. En effet, il suffit de considérer $f(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$, où $x_1, \dots, y_n$ sont complexes.

Si $f,\ g$ sont analytiques (dans Ω) il en est de même avec $f + g$, fg ,et $\dfrac{f}{g}$ (pourvu que $g \neq 0$ dans Ω).

Si f est analytique, elle est C^∞ et toutes ses dérivées sont analytiques.

Si f est analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et si φ_ν, $\nu = 1, \dots, n$, sont analytiques réelles dans un ouvert $\Delta \subset \mathbb{R}^k$, et telles que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(\Delta) \subset \Omega$ alors $h = f \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est analytique dans Δ et on a p. 9

$$\frac{\partial h}{\partial t_s} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} \circ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \right) \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_s} \ .$$

(pour vérifier les trois dernières propositions il suffit de prendre des restrictions aux variables réelles dans les propositions correspondantes pour fonctions holomorphes).

Si f est analytique réelle dans un voisinage de $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y)$, $f(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y) = 0$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y) \neq 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\{f = 0,\ |x_\nu - \mathring{x}_\nu| < \delta,\ |y - \mathring{y}| < \varepsilon\}$ est le graphe d'une fonction φ analytique réelle dans $\{|x_\nu - \mathring{x}_\nu| < \delta\}$; $f(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ dans $\{|x_\nu - \mathring{x}_\nu| < \delta\}$. (On prend la restriction à x_ν réelles dans la proposition complexe correspondante, et on observe que $f(x_1, \ldots, x_n, \overline{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)) = 0$, d'où $\varphi = \overline{\varphi}$).

On appelle polynôme distingué réel (à $(0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$) tout fonction de la forme $H(x; y) = y^k + a_1(x) y^{k-1} + \cdots + a_k(x)$, où $a_\nu(x)$ sont analytiques réels dans un voisinage de 0 et $a_\nu(0) = 0$ (ce qui est équivalent à ce que $H(x, y)$ est analytique dans $\Delta \times \mathbb{R}$, polynôme unitaire en y et telle que $H(0, y) = y^k$).

C'est la restriction d'un polynôme distingué H tel que $H = \overline{H}$.

Théorème de préparation de Weierstrass (réel). *Soit f une fonction analytique réelle dans un voisinage de $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{k+1}$, telle que $f(0, \ldots, 0, y) \not\equiv 0$ au voisinage de 0. Alors $f = H\,E$ dans un voisinage de 0, où H est un polynôme distingué réel et E est une fonction analytique réelle dans un voisinage de 0, telïe que $E(0) \neq 0$. (Le couple H, E est déterminé au voisinage de 0). Dans le théorème de Weierstrass complexe : si f est “réelle” , E et H sont “réelles” aussi.* p. 10

(On applique le théorème de préparation de Weierstrass à l'extension holomorphe de f : $f = H\,E$, d'où $\overline{f} = \overline{H}\,\overline{E}$, mais $f = \overline{f}$ et $\overline{H}$ est aussi un polynôme distingué, donc (unicité) $H = \overline{H}$ et $E = \overline{E}$, et les restrictions de H et E au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{k+1}$ sont réelles).

4 [Outils algébriques]

4.a [Discriminant et résultant]

Considérons le polynôme $\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. Comme il est symétrique, selon le théorème de fonctions symétriques il existe un polynôme unique $D_n \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_n]$ tel que

$$\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 = D_n(s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n))$$

où $s_j(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^j \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} x_{\nu_1} \cdots x_{\nu_j}$.

Considérons le polynôme $\prod_{i,j}(x_i - y_j) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$. Comme il est symétrique par rapport à $\{x_i\}$ et $\{y_j\}$ séparément, il existe un polynôme $R_{n,m} \in \mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m]$ tel que

$$\prod_{i,j}(x_i - y_j) = R_{n,m}(s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n), \\ s'_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, s'_m(y_1, \ldots, y_m)) \ ,$$

où $s_i = (-1)^i \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_i} x_{\nu_1} \cdots x_{\nu_i}$, $i = 1, \ldots, n$, et
$s'_j = (-1)^j \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} y_{\nu_1} \cdots y_{\nu_j}$, $j = 1, \ldots, m$.[2] p. 11

Soit A un anneau commutatif et ayant un élément unité. Pour chaque polynôme unitaire $p = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in A[x]$ on appelle $D_n(a_1, \ldots, a_n)$ le *discriminant* de p. Si p admet la décomposition $p = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_n)$ (avec $\xi_i \in A$), alors

$$D_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i<j}(\xi_i - \xi_j)^2 = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} p'(\xi_i)$$

(comme on a $a_j = s_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $p'(\xi_i) = \prod_{j \neq i}(\xi_i - \xi_j)$).

[2] Si (A étant un anneau commutatif) $s \in A[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] = A[x_1, \ldots, x_n][y_1, \ldots, y_m]$ est symétrique par rapport à $\{x_i\}$ et $\{y_j\}$ séparément, alors on a $s = q(s'_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, s'_m(y_1, \ldots, y_m))$ pour un $q = \sum b_\nu v_1^{\nu_1} \cdots v_m^{\nu_m} \in A[x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_m]$ avec $b_\nu \in A[x_1, \ldots, x_n]$ symétriques, donc $b_\nu = a_\nu(s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n))$ avec $a_\nu \in A[u_1, \ldots, u_n]$; on a donc $s = p((s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n), s'_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, s'_m(y_1, \ldots, y_m))$ où $p = \sum a_\nu(u_1, \ldots, u_n) v_1^{\nu_1} \cdots v_m^{\nu_m} \in A[u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m]$.

Pour chaque couple de polynômes unitaires $p = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $q = x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m \in A[x]$ on appelle $R_{n,m}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ le *résultant* de $p,\ q$. Si $p,\ q$ admettent les décompositions $p = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_n)$, $q = (x - \eta_1) \cdots (x - \eta_m)$, (avec $\xi_i,\ \eta_j \in A$), alors :

$$R_{n,m}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = \prod_{i,j} (\xi_i - \eta_j)$$

4.b [Anneaux factoriels]

Soit A un *anneau factoriel*[3]. On dit qu'un polynôme $g \in A[x]$ est *primitif*, si ses coefficients admettent 1 pour p g c d . Chaque $q \neq 0 \in A[x]$ peut être écrit sous la forme $q = c q_1$ avec $c \in A$ et q_1 primitif ; alors c est p g c d des coefficients de q .

Lemme de Gauss. *Le produit de deux polynômes primitifs est primitif.* p. 12

Corollaire. *Soit K le corps de fractions de A ; si un $g \in A[x]$ primitif divise un $p \in A[x]$ dans $K[x]$, il en est de même dans $A[x]$.*

En effet, on peut écrire $b\,p = g\,q = c\,g\,q_1$, avec $b \in A$, $q \in A[x]$, $q_1 \in A[x]$ primitif ; comme (lemme de Gauss) $g\,q_1$ est primitif, c est un p g c d des coefficients de $b\,p$, d'où b divise c et on a $p = c_1\,g\,q_1$ avec $c_1 \in A$, donc g divise p dans $A[x]$.

Théorème de Gauss. *Si A est un anneau factoriel, il en est de même avec $A[x]$.*

Un corps est trivalement un anneau factoriel, donc il en est de même avec anneau de polynômes sur un corps. Nous allons démontrer la suivante :

Proposition. *Soit p un polynôme unitaire de $A[x]$. Pour que p et p' aient un diviseur commun de degré positif il faut et il suffit que le discriminant de p soit nul.*

En effet, soit K le corps de fractions de A , et soit $\widetilde{K}$ une extension de K telle que p admette dans $\widetilde{K}[x]$ une décomposition $p = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_n)$ avec

[3] C'est-à-dire, un anneau d'intégrité qui satisfait : 1° chaque élément non inversible et $\neq 0$ est produit d'un nombre fini d'éléments irréductibles (un élément est dit irréductible s'il n'est pas inversible et s'il n'est pas produit de deux éléments non inversibles), 2° cette décomposition est unique jusqu'à l'ordre et facteurs inversibles. 2° peut être remplacée par : 2°° si p est irréductible, et divise $a\,b$, alors il divise a ou b.

$\xi_\nu \in \widetilde{K}$. Si $p,\ p'$ ont un diviseur commun dans $A[x]$ de degré positif, alors un ξ_r est une racine de ce diviseur et on a $p'(\xi_r) = 0$, d'où le discriminant $= 0$. Réciproquement, si le discriminant $= 0$, on a $p'(\xi_r) = 0$ pour un r ; alors le p. 13
polynôme minimal $g \in K[x]$ de ξ_r divise p et p' dans $K[x]$; en multipliant g par un élément convenable de A on obtient un $g_0 \in A[x]$ primitif (de degré positif) qui divise p et p' dans $K[x]$, donc (Corollaire du lemme de Gauss) dans $A[x]$.

Proposition. *Soient $p,\ q$ des polynômes unitaires de $A[x]$. Pour que p et q aient un diviseur commun (de degré positif) il faut et il suffit que leur résultant soit nul.*

Démonstration. En effet, soit K le corps de fractions de A, et soit $\widetilde{K}$ une extension de K telle que $p,\ q$ admettent dans $\widetilde{K}[x]$ des décompositions $p = (x - \xi_1)\cdots(x - \xi_n)$, $q = (x - \eta_1)\cdots(x - \eta_m)$ avec $\xi_i, \eta_j \in \widetilde{K}$. Si $p,\ q$ ont un diviseur commun (de degré positif) dans $A[x]$, alors il est divisé par un $(x - \xi_i)$, donc ξ_i est une racine η_j de q , d'où le résultant $= 0$.

Réciproquement, si le résultant $= 0$, on a $\zeta = \xi_i = \eta_j$ avec certains $i,\ j$; alors le polynôme minimal $g \in K[x]$ de ζ divise p et q dans $K[x]$; en multipliant g par un élément convenable de A on obtient un $g_0 \in A[x]$ primitif (de degré positif) qui divise p et q dans $K[x]$, donc (Corollaire du lemme de Gauss) dans $A[x]$.

5 [Anneau de germes]

Les raisonnements de ce n° restent valables sans aucun changement si l'on remplace "holomorphe" et "$\mathbb{C}$" par "analytique réelle" et "$\mathbb{R}$" .

Soit $\mathcal{O}_n$ l'anneau de *germes de fonctions holomorphes* à $0 \in \mathbb{C}^n$ c'est-à-dire l'ensemble quotient de l'ensemble de fonctions holomorphes au voisinage p. 14
de 0 par la relation d'équivalences " $f = g$ dans un voisinage de 0" (on appelle f_0 - germe de f - la classe d'équivalence de f), avec addition et multiplication bien définies par $f_0 + g_0 = (f+g)_0$, $f_0\, g_0 = (fg)_0$. C'est un anneau d'intégrité. En effet, il est un anneau commutatif ayant un élément unité ; si $f_0\, g_0 = 0$, alors $f\, g = 0$ dans un voisinage connexe V de 0 , donc $V = \{f = 0\} \cup \{g = 0\}$, d'où (Baire) par exemple $f = 0$ dans un sous-ouvert de V , et par conséquent $f = 0$ dans V , et $f_0 = 0$.

Soit $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{O}_n$ le sous-anneau de germes de polynômes en z_n . Observons que l'application ;

$$(*) \qquad \mathcal{O}_n[z] \ni (a_0)_0 z^k + \cdots + (a_k)_0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (a_0(z_1, \ldots, z_n) z_{n+1}^k + \cdots + a_k(z_1, \ldots, z_n))_0 \in \mathcal{P}_{n+1}$$

est un isomorphisme.

Nous allons démontrer le suivant :

Théorème. $\mathcal{O}_n$ *est un anneau factoriel.*

Les éléments inversibles dans $\mathcal{O}_n$ sont précisément f_0 avec $f(0) \neq 0$; en effet, si $f(0) \neq 0$, $f_0(\frac{1}{f})_0 = 1$; si $f_0 g_0 = 1$, alors $f(0)g(0) = 1$, d'où $f(0) \neq 0$.

Appelons *élément régulier* (de $\mathcal{O}_n$) tout f_0 avec $f(0, \ldots, 0, z_n) \not\equiv 0$ au voisinage de 0 . Si $a_1 \cdots a_r$ est régulier, alors chaque a_ν est régulier. Si $a \neq 0$, il existe un automorphisme h de $\mathcal{O}_n$ tel que $h(a)$ soit régulier ; en effet, si L est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$ vectoriel complexe, alors $h : \mathcal{O}_n \ni f_0 \to (f \circ L)_0 \in \mathcal{O}_n$ est un automorphisme de $\mathcal{O}_n$, et, si $f \not\equiv 0$ (au voisinage de 0), on peut toujours choisir L de manière que l'on ait $(f \circ L)(0, \ldots, 0, z_n) \not\equiv 0$ au voisinage de 0 (il suffit de prendre un L qui applique l'axe de z_n dans p. 15
une droite complexe (par 0) sur laquelle $f \not\equiv 0$ au voisinage de 0).

Appelons *élément normal* (de $\mathcal{O}_n$) tout H_0 où H est un polynôme distingué (en z_n , à 0) . On voit que le produit des éléments normaux est normal. Si $c = c_1 \cdots c_r$ avec c normal et $c_\nu \in \mathcal{P}_n$, alors $c = c'_1 \cdots c'_r$ avec c'_ν normal et équivalent à c_ν dans $\mathcal{P}_n$. En effet, on a $c = (H)_0$, H distingué, $c_\nu = (H_\nu)_0$, $H_\nu = a_\nu(z_1, \ldots, z_n) z^{r_\nu} + \cdots$ et $H = H_1 \cdots H_r$; on a $1 = a_1 \cdots a_r$ donc $a_\nu(0) \neq 0$, d'où $H'_\nu = \dfrac{H_\nu}{a_\nu}$ unitaire et $H = H'_1 \cdots H'_r$, d'où H_ν distingué comme 0 est un zéro unique de $H_\nu(0, z_n)$; si l'on prend $c' = (H'_\nu)_0$, $c = c'_1 \cdots c'_r$, c'_ν est normal et $c_\nu = (a_\nu)_0 c'_\nu$, $(a_\nu)_0$ inversible dans $\mathcal{P}_n$.

Chaque élément régulier $a \in \mathcal{O}_n$ s'écrit de manière unique sous la forme $a = e\,p$ avec e inversible et p normal (théorème de préparation de Weierstrass).

Pour qu'un élément normal c (de $\mathcal{O}_n$) soit irréductible dans $\mathcal{O}_n$ il faut et il suffit qu'il soit irréductible dans $\mathcal{P}_n$.

En effet, on peut exclure le cas $c = 1$ et alors c n'est inversible ni dans $\mathcal{O}_n$ ni dans $\mathcal{P}_n$. Si $c = c_1 c_2$ avec c_i non inversible dans $\mathcal{O}_n$, c_i sont alors réguliers et on a (Weierstrass) $c = e\gamma_1\gamma_2$, avec e inversible et γ_i normales, et non inversibles dans $\mathcal{O}_n$, donc dans $\mathcal{P}_n$; alors (l'unicité dans Weierstrass) $e = 1$. Réciproquement, si $c = \gamma_1\gamma_2$ avec γ_i non inversibles dans $\mathcal{P}_n$, on a $c = \gamma'_1\gamma'_2$, avec γ'_i normal et équivalent dans $\mathcal{P}_n$ à γ_i , donc non inversible dans $\mathcal{P}_n$, d'où $\gamma'_i = (H_i)_0$, H_i distingué de degré > 0, donc $H_i(0) = 0$ et γ'_i n'est pas inversible dans $\mathcal{O}_n$. p. 16

Montrons que si $\mathcal{P}_n$ est factoriel, il en est de même avec $\mathcal{O}_n$. En effet, soit $a \neq 0$ non inversible en $\mathcal{O}_n$; on peut supposer que a soit régulier ; selon théorème de Weierstrass $a = e\,c$ avec e inversible, c normal et non inversible dans $\mathcal{O}_n$, donc dans $\mathcal{P}_n$; selon l'hypothèse $c = c_1 \cdots c_k$ avec c_i irréductibles dans $\mathcal{P}_n$ donc dans $\mathcal{O}_n$, donc $a = (e\,c_1)c_2 \cdots c_k$; si $a = b_1 \cdots b_\ell$ avec b_j irréductibles dans $\mathcal{O}_n$, alors b_j sont réguliers et (Weierstrass) $b_j = e_j d_j$ avec e_j inversibles et d_j normaux, irréductibles dans $\mathcal{O}_n$ donc dans $\mathcal{P}_n$; on a alors $a = e_1 \cdots e_\ell\, d_1 \cdots d_\ell$, d'où (l'unicité dans Weierstrass) $c_1 \cdots c_k = d_1 \cdots d_\ell$, et par l'hypothèse c_i ne diffère de d_j que par ordre et facteurs inversibles (dans $\mathcal{P}_n$ donc dans $\mathcal{O}_n$), donc il en est de même avec $ec_1, c_2, \ldots, c_k$. et $b_1, \ldots, b_\ell$.

Observons que $\mathcal{P}_1$ est factoriel comme isomorphe à $\mathbb{C}[x]$ (isomorphisme $\mathbb{C}[x] \ni a_0x^m + \cdots + a_m \to (a_0z^m + \cdots + a_m)_0 \in \mathcal{P}_1$). Par conséquent $\mathcal{O}_1$ est factoriel. En supposant que $\mathcal{O}_n$ soit factoriel, il en est de même (Gauss) avec $\mathcal{O}_n[z]$ qui est isomorphe à $\mathcal{P}_{n+1}$, donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est factoriel, d'où $\mathcal{O}_{n+1}$ est factoriel. Le théorème est ainsi démontré par récurrence.

Soit $\mathcal{A}_n$ l'anneau de germes de fonctions analytiques réelles à $0 \in \mathbb{R}^n$ (on le définit de manière analogue). Nous avons de même isomorphisme

$$(**) \qquad \mathcal{A}_n[x] \ni (a_0)_0x^k + \cdots + (a_k)_0 \longrightarrow \\ \longrightarrow (a_0(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1}^k + \cdots + a_k(x_1, \ldots, x_n))_0 \in \mathcal{P}_{n+1}$$

et le suivant

Théorème. $\mathcal{A}_n$ *est un anneau factoriel.* p. 17

6 [Polynôme associé]

Soit $P(z, w) = w^k + a_1(z)w^{k-1} + \cdots + a_k(z)$ un polynôme aux coefficients a_j holomorphes dans un ouvert $B \subset \mathbb{C}^m$. On appelle $D(z) = D_k(a_1(z), \ldots, a_k(z))$ (qui est donc holomorphe dans B) le discriminant de P ; on a

$$D(z) = \prod (w_i - w_j)^2 = (-1)^{\binom{k}{2}} \prod_{j=1}^{k} \frac{\partial P}{\partial w}(z, w_j)$$

où $w_1, \ldots, w_k$ sont les zéros de $P(z,w)$, pour $z \in B$.

Observons que si P est "réel" ce qui a lieu si et seulement si les a_j sont "réels", son discriminant est "réel" aussi.

Nous allons montrer le suivant :

Soit $P(z,w)$ un polynôme distingué (aux coefficients holomorphes dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^m$), de degré k , ayant le discriminant $D(z) \equiv 0$. Alors il existe un polynôme distingué $P_1(z,w)$ de degré $< k$ et un voisinage $V \subset \mathbb{C}^m$ de 0 tel que :

$$(\nabla) \qquad \{P = 0\} \cap (V \times \mathbb{C}) = \{P_1 = 0\} \cap (V \times \mathbb{C}) \; ;$$

On peut avoir P_1 "réel" si P est "réel".

Ecrivons, à cet effet, $P(z,w) = w^k + a_1(z)w^{k-1} + \cdots + a_k(z)$; alors $p = x^k + (a_1)_0 x^{k-1} + \cdots + (a_k)_0 \in \mathcal{O}_m[x]$ a pour discriminant

$$D_m((a_1)_0, \ldots, (a_m)_0) = (D_m(a_1(z), \ldots, a_m(z)))_0 = D_0 = 0 \; ,$$

donc p et p' ont un diviseur commun r de degré > 0 : $p = p_1 r$, $p' = p_2 r$, p_1 étant de degré $< k$. Par isomorphisme $(*)$ entre $\mathcal{O}_m[x]$ et $\mathcal{P}_{m+1}$, p, p', r, p_1, p_2 correspondent à P_0, $(\dfrac{\partial P}{\partial w})_0$, R_0, $(P_1)_0$, $(P_2)_0$ avec certains R, P_1, P_2 (polynômes en w aux coefficients holomorphes au voisinage de 0), P_1 étant de degré $< k$, et on a

$$(\sharp) \qquad P = P_1\, R \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial w} = P_2\, R$$

au voisinage de 0 ; comme le coefficient dominant de P est égal à 1 , celui de p. 18
P_1 ne s'annule pas, donc (en divisant P_1 et multipliant R par ce coefficient) on peut supposer que P_1 soit unitaire. Dans le cas de P "réel" on peut répéter ce raisonnement pour la restriction de P en réel, et on obtient P_1 , P_2, R en variables réelles ; on les étend sur un voisinage complexe de 0 , et $(\sharp)$ reste valable dans un voisinage complexe de 0 . Par conséquent $(\sharp)$ subsiste dans $V \times \mathbb{C}$ où V est un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^m$. Maintenant, l'inclusion $\supset$ dans (∇) est évidente. Supposons que $z \in V$, $P(z,w) = 0$, l'ordre du zéro w étant ρ ; si l'on avait $P_1(z,w) \neq 0$, alors w serait un zéro de $R(z,w)$ d'ordre ρ , donc il serait un zéro d'ordre $\geq \rho$ de $\dfrac{\partial P}{\partial w}$, ce qui est impossible ; on a donc $P_1(z,w) = 0$. Ainsi nous avons vérifié (∇). Comme P_1 est unitaire et

0 est un zéro unique de $P_1(0, w)$ (d'où $P_1(0, w) = w^k$), P_1 est un polynôme distingué.

Il en résulte qu'il existe un polynôme distingué P_0 "réel" si P est "réel", ayant le discriminant $\not\equiv 0$, et un voisinage $V \subset \mathbb{C}^m$ de 0 , tel que

$$\{P = 0\} \cap (V \times \mathbb{C}) = \{P_0 = 0\} \cap (V \times \mathbb{C}) .$$

En combinant ceci avec le théorème de préparation de Weierstrass nous arrivons au suivant

Théorème. *Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{m+1}$ telle que $f(0, \ldots, 0, w) \not\equiv 0$ au voisinage de 0 . Alors il existe un polynôme distingué H , "réel" si f est "réelle" , ayant le discriminant $\not\equiv 0$ au voisinage de 0 , tel que $f = 0 \iff H = 0$ dans un voisinage de 0 .*

Nous appellerons H un polynôme associé à *f.*

Soient $P(x, t) = t^k + a_1(x)t^{k-1} + \cdots + a_k(x)$, $Q(x, t) = t^e + b_1(x)t^{e-1} + \cdots + b_e(x)$ des polynômes aux coefficients analytiques (réels) dans un ouvert p. 19
$G \subset \mathbb{R}^n$. On appelle $R(x) = R_{k,e}(a_1(x), \ldots, a_k(x), b_1(x), \ldots, b_k(x))$ (qui est analytique dans G) le résultant de P et Q ; on a

$$R(x) = \prod_{i,j} (\tau_i - \sigma_j)$$

où $\tau_1, \ldots, \tau_k$ est la suite des zéros (complexes) de $P(x, \tau) = 0$ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_e$ celle de $Q(x, \sigma) = 0$.

7 [Homéomorphismes locaux]

Soient M, N deux espaces topologiques, séparés. Une application $f : M \to N$ est un *homéomorphisme local* si pour chaque $a \in M$ la restriction de f à un voisinage de a est un homéomorphisme sur un voisinage de $f(a)$. Alors f est une application ouverte (c'est-à-dire, l'image de tout sous-ouvert de M est ouvert).

Soit $f : M \to N$ un homeomorphisme local.

Si $h_i : V \to M$, $i = 1, 2$, continues, V étant un voisinage d'un $b \in N$, vérifient $f(h_i(x)) = x$ dans V , alors $h_1(b) = h_2(b)$ implique $h_1(x) = h_2(x)$ dans un voisinage de b . (En effet, f_U est injective pour un voisinage U de

$h_1(b)$, donc si l'on prend un voisinage V_0 de b tel que $h_i(V_0) \subset U$, $i = 1, 2$, on a $h_1(x) = h_2(x)$ dans V_0).

Si $h_i : \Omega \to M$, $i = 1, 2$, continues, Ω étant un sous-ouvert connexe de N , vérifient $f(h_i(x)) = x$ dans Ω , alors $h_1(x) = h_2(x)$ dans Ω ou bien $h_1(x) \neq h_2(x)$ dans Ω . (Ceci résulte du fait que $\{h_1(x) = h_2(x)\}$ est fermé et ouvert dans Ω).

Si $h : N \to M$, continue, vérifie $f(h(x)) = x$ dans N , alors $h(N)$ est ouvert et fermé ; si, en outre, M est connexe, $h(N) = M$ et f est un p. 20
homéomorphlsme (h étant l'homéomorphisme inverse). (En effet, $h(N) = \{h(f(x)) = x\}$ est fermé ; si $b \in h(N)$, on a $b = h(a)$ avec $a \in N$, f_V est un homéomorphisme d'un voisinage V de b sur un voisinage de $f(b) = a$, on a ensuite $h(a) = b = f_V^{-1}(a)$, d'où $h = f_V^{-1}$ dans un voisinage U de a , et $h(U) = f_V^{-1}(U)$ est un voisinage de b , contenu dans $h(N)$; $h(N)$ est donc ouvert).

Soient $f : M \to N$ une application continue, $g : N \to L$ une application dans un autre espace topologique L . Si g et $g \circ f : M \to L$ sont des homéomorphismes locaux, il en est de même avec f . (En effet, prenons un $a \in M$; soit V un voisinage de $b = f(a)$ tel que g_V soit un homéomorphisme et $g(V)$ soit un voisinage de $c = g(b)$; soit U un voisinage de a tel que $f(U) \subset V$ et que $(g \circ f)_U = g_{f(U)} \circ f_U$ soit un homéomorphisme sur $W = g(f(U)) = g_V(f(U))$ – voisinage de c ; alors $f(U) = g_V^{-1}(W)$ est un voisinage de b et $f_U = g_{f(U)}^{-1} \circ (g \circ f)_U$ est un homéomorphisme).

8 [Applications propres]

Soient M, N deux espaces topologiques séparés et localement compacts. Une application continue $f : M \to N$ est *propre* si l'image inverse de tout sous-compact de N est compact. Alors f est fermée (c'est-à-dire, l'image de tout sous-fermé de M est fermée). En effet, si E est un sous-fermé de M , alors, pour tout sous-compact U de N, $\overline{U \cap f}(E) = f(\overline{f^{-1}(U) \cap E})$ est compact, d'où $f(E)$ est fermé (car, si $x \in \overline{f(E)}$ on a $x \in \overline{U \cap f(E)}$ lorsque U est un voisinage de x, et on peut prendre pour U un voisinage compact).

Soient $f : M \to N$, $g : N \to L$ deux applications continues (L étant un espace topologique séparé et localement compact). Si $g \circ f$ est propre, il en p. 21
est de même avec f . En effet, si E est un sous- compact de N , alors $f^{-1}(E)$ est fermé, mais (comme $E \subset g^{-1}(g(E))$) $f^{-1}(E) \subset (g \circ f)^{-1}(g(E))$ compact,

donc $f^{-1}(E)$ est compact.

9 [Revêtements]

Soient M, N deux espaces topologiques. Une application $f : M \to N$ est un *revêtement*, si chaque point a de N possède un voisinage V pour lequel $f^{-1}(V)$ soit réunion des ouverts disjoints U et tels que f_U soit un homeomorphisme de U sur V . Le nombre des U s'appelle *l'ordre du revêtement en* a[4] ; s'il est partout fini, on dit que le revêtement est *fini*. Observons que l'ensemble des a , où l'ordre du revêtement est égal à k , est ouvert ; il est aussi fermé, comme son complémentaire est ouvert. Par conséquent, si N est connexe, l'ordre du revêtement est constant.

Lemme 1. *Soient M, N deux espaces topologiques, séparés, et localement compacts. Alors $f : M \to N$ est un revêtement fini $\Longleftrightarrow$ f est un homeomorphisme local, propre.*

Démonstration. ($\Longrightarrow$). Soit $a \in M$; prenons un voisinage V de $b = f(a)$ selon la définition ; on a alors $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_s$, U_j disjoints ouverts, d'où $a \in U_k$ pour un k , et f_{U_k} est un homéomorphisme sur V ; f est donc un homeomorphisme local. Chaque $b \in N$ a un voisinage V avec $f^{-1}(V)$ compact ; en effet, si l'on prend pour V un sous-voisinage compact d'un voisinage choisi selon la définition, on aura $f^{-1}(V) = K_1 \cup \cdots \cup K_s$ avec K_i homéomorphes à V , donc compacts, d'où $f^{-1}(V)$ sera compact. Si E est un sous-compact de N , on a donc $E \subset V_1 \cup \cdots V_r$ avec V_i choisis de la manière précédente, d'où $f^{-1}(E)$, comme fermé et contenu dans $f^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup$ p. 22
$f^{-1}(V_r)$ compact est compact. Ainsi f est propre.

($\Longleftarrow$). Soit $b \in N$. Alors $f^{-1}(b)$ est compact et discret (car, si $f(a) = b$, f_U est injective pour un voisinage U de a, d'où il n'y a pas d'autre $a' \in U$ avec $f(a') = b$), donc fini : $f^{-1}(b) = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Il existe des voisinages U_i de a_i , ouverts et disjoints, tels que f_{U_i} soit un homéomorphisme, et $f(U_i)$ soit un voisinage de b . Soit V^* un voisinage compact de b ; alors $T = f(f^{-1}(V^*) \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_r))$ est compact et ne contient pas b . Il existe donc un voisinage ouvert V de b tel que $V \cap T = \emptyset$ et $V \subset V^* \cap \bigcap f(U_i)$. On a alors $f^{-1}(V) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r$ (sinon, $x \notin U_1 \cup \cdots \cup U_r$ pour un $x \in f^{-1}(V)$, d'où $x \in f^{-1}(V^*) \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_r)$ et $f(x) \in V \cap T$ ce qui est contradictoire).

[4] on peut vérifier qu'il ne dépend pas de V . (Si $V_1 \subset V$, on raisonne avec une composante connexe de V_1).

On a donc $f^{-1}(V) = U'_1 \cup \dots \cup U'_r$ avec $U'_i = U_i \cap f^{-1}(V)$ ouverts disjoints, $f_{U'_i}$ est un homeomorphisme et, en vertu de $V \subset f(U_i)$, $f(U'_i) = V$.

Il en résulte le suivant :

Lemme 2. *Soient M, N, L des espaces topologiques, localement compacts, soient $f : M \to N$, $g : N \to L$ deux applications continues, Si $g : N \to L$ et $g \circ f : M \to L$ sont des revêtements finis, il en est de même avec f .*

Lemme 3. *Soit $f : M \to N$ un revêtement, avec M connexe. S'il existe une fonction continue $\xi : M \to \mathbb{R}$ telle que $(f, \xi) : M \to N \times \mathbb{R}$ soit injective, f* p. 23
est trivial (c'est-à-dire, de degré un et un homéomorphisme de M sur N).

Démonstration. Soit $x \in N$; comme $f^{-1}(x)$ est fini et (f, ξ) est injective, il y a dans $f^{-1}(x)$ un élément $h(x)$ unique pour lequel $\xi(h(x))$ soit le plus petit. Soit $a \in N$. Soit V un voisinage de a , tel que $f^{-1}(V) = U_1 \cup \dots \cup U_k$, où U_j sont des ouverts disjoints et f_{U_j} est un homéomorphisme sur V ; alors $h_i = {f_{U_i}}^{-1}$ applique V sur U_i , donc pour $x \in V$, $f^{-1}(x) = \{h_1(x), \dots, h_k(x)\}$ où $h_j(x)$ sont distincts entre eux ; on peut donc supposer que $\xi(h_1(a)) < \dots < \xi(h_k(a)$, et, par conséquent, on a $\xi(h_1(x)) < \dots < \xi(h_k(x)$ dans un voisinage $V_0 \subset V$ de a , d'où il vient $h(x) = h_1(x)$ dans V_0 . Ceci prouve que h est continue dans N . Comme on a $f(h(x)) = x$ dans N, $h(N)$ est ouvert et fermé dans M , d'où $h(N) = M$, f est un homéomorphisme de M sur N , et donc de degré 1.

Lemme 4. *Si $f : M \to N$ est un revêtement, avec M connexe et N homéomorphe à une boule (ouverte dans $\mathbb{R}^n$), alors f est trivial.*

Démonstration. On peut admettre $N = \{|x| < 1\}$, et (comme dans la démonstration du lemme 3) il suffit de trouver un $h : N \to M$ continu, vérifiant $f(h(x)) = x$ dans N . Prenons un $a \in M$ tel que $f(a) = 0$. Il y a un $\rho > 0$ tel qu'il existe un $h : B(\rho) = \{|x| < \rho\} \to M$ continu, vérifiant $h(0) = a$ et $f(h(x)) = x$ dans $B(\rho)$. Soit r la borne supérieure de ces ρ . Alors, comme on a $h_\rho = h_{\rho'}$ dans $B(\rho)$ (lorsque $\rho < \rho'$), $h = \bigcup h_\rho : B(r) \to M$ est continue et vérifie $h(0) = a$ et $f(h(x)) = x$ dans $B(r)$. Il suffit donc de prouver que $r = 1$. p. 24

Supposons que $r < 1$. Prenons un c avec $|c| = r$; alors, pour une boule B_c de centre c , on a $f^{-1}(B_c) = U_1 \cup \dots \cup U_p$, f_{U_i} étant un homéomorphisme sur B_c ; prenons un $b \in B(r) \cap B_c$; comme $f(h(b)) = b$, on a $h(b) \in U_i$ pour un i , et, en posant $h_c = {f_{U_i}}^{-1}$ ainsi que $f(h_c(x)) = x$ dans B_c , on a $h(b) = h_c(b)$, d'où (comme $B(r) \cap B_c$ est connexe) $h = h_c$ dans $B(r) \cap B_c$.

Prenons $B_{c_1} \cup \cdots \cup B_{c_k} \supset \{|x| = r\}$ avec c_i distincts entre eux. Si l'ensemble $B_{c_i} \cap B_{c_j}$ $(i \neq j)$ n'est pas vide, il contient $d = \frac{1}{2}(c_i + c_j) \in B(r)$, et on a $h_{c_i}(d) = h(d) = h_{c_j}(d)$, d'où $h_{c_i} = h_{c_j}$ dans $B_{c_i} \cap B_{c_j}$. On a donc l'application continue

$$h^* = h \cup h_{c_1} \cup \cdots \cup h_{c_k} : B(r) \cup B_{c_1} \cup \cdots \cup B_{c_k} \longrightarrow M \ ,$$

et comme $B(r) \cup B_{c_1} \cup \cdots \cup B_{c_k}$ contient un $B(\rho)$ avec $\rho > r$, l'application continue $h' = h^*_{B(\rho)} : B(\rho) \to M$ vérifie $h'(0) = a$ et $f(h'(x)) = x$ dans $B(\rho)$, ce qui fait une contradiction.

10 [Un lemme d'ouverture]

Soient $U = \{|z - z_0| < \delta\} \subset \mathbb{R}^p$, $V = \{|w - w_0| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^q$, $\Gamma : U \to \{|w - w_0| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ une application continue, Ω un soûs-ouvert non vide de $(U \times V) \setminus \Gamma$. Alors $F = (\overline{\Omega} \setminus \Omega) \cap (U \times V) \subset \Gamma$ implique $F = \Gamma$.

En effet, Ω est alors ouvert et fermé dans $(U \times V) \setminus \Gamma$, donc Ω est une réunion des composantes connexes de l'ensemble $(U \times V) \setminus \Gamma$. Or, celui-ci étant connexe dans le cas $q > 1$:

$$\begin{aligned}(U \times V) \setminus \Gamma &= \{(z, w) \in U \times V \ : \ w \neq \Gamma(z)\} \\ &= U \times \{|w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \bigcup_U \{z\} \times (V \setminus \{\Gamma(z)\})\end{aligned}$$

(les membres de la réunion étant connexes, le premier rencontrant tout les autres), ou, dans le cas $q = 1$, étant la réunion de deux ouverts disjoints connexes :

$$\{(z, w) \in U \times V \ : \ w > \Gamma(z)\} = U \times \{w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \bigcup_U \{z\} \times]\Gamma(z), w_0 + \varepsilon[\ ,$$

et $\{(z, w) \in U \times V \ : \ w < \Gamma(z)\}$ (pareillement), on voit que $F = \Gamma$. p. 25

Lemme 5. *Soient G, H, J des ouverts de $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^r$ respectivement (où il se peut $r = 0$), et soient $\pi_1 : G \times H \times J \to G$, $\pi_2 : G \times H \times J \to G \times H$ les projections. Supposons que $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G \times H \times J$ satisfassent aux conditions :*

(1) $\pi_2(\Gamma_1) \cap \pi_2(\Gamma_2) = \emptyset$, (2) $(\pi_2)_{\Gamma_2} : \Gamma_2 \to G \times H$ *est ouverte,*

(3) $(\pi_1)_{\Gamma_1} : \Gamma_1 \to G$ *est un homéomorphisme local.*

Posons $\Theta = (\overline{\Gamma_2} \setminus \Gamma_2) \cap G \times H \times J$. *Alors,* $\Theta \cap \Gamma_1$ *ouvert dans* $\Theta \implies \Theta \cap \Gamma_1$ *ouvert dans* Γ_1

Démonstration. Supposons que $\Theta \cap \Gamma_1$ soit ouvert dans Θ et prenons un $(a, b, c) \in \Theta \cap \Gamma_1$. Alors il existe un voisinage $Q = U \times V \times W \subset G \times H \times J$, où $U = \{|x - a| < \delta\}$, $V = \{|y - b| < \varepsilon\}$, $W = \{|z - c| < \eta\}$, tel que $Q \cap \Theta \subset \Gamma_1$ et que $(\pi_1)_{\Gamma_1 \cap Q}$ est un homéomorphisme de $\Gamma_1 \cap Q$ sur un voisinage de a. En choisissant $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petits, on peut exiger que l'on ait

$$\Gamma_2 \cap (U \times V \times \{\frac{\eta}{3} \leq |z - c| \leq \frac{\eta}{2}\}) = \emptyset\ . \tag{4}$$

(Sinon, l'ensemble $\{(a, b)\} \times \{\frac{\eta}{3} \leq |z - c| \leq \frac{\eta}{2}\}$ contiendrait un point $(a, b, z^1) \in \overline{\Gamma_2}$, et alors, d'après (1), on aurait $(a, b, z^1) \in (\overline{\Gamma_2} \setminus \Gamma_2) \cap Q = \Theta \cap Q \subset \Gamma_1 \cap Q$, d'où forcément $z^1 = c$, comme $(\pi_1)_{\Gamma_1 \cap Q}$ est injective).

En diminuant encore $\delta > 0$, on peut supposer que $\Gamma_1 \cap Q = (\varphi, \psi)$, où $\varphi : U \to \{|y - b| < \frac{\varepsilon}{2}\}$, $\psi : U \to W_0 = \{|z - c| < \frac{\eta}{2}\}$ soient continues. L'ensemble $\Omega = \pi_2(\Gamma_2 \cap Q_0)$, où $Q_0 = U \times V \times W_0$, est d'après (1) et (2) , p. 26
un sous-ouvert de $(U \times V) \setminus \varphi$.

Montrons que $F = (\overline{\Omega} \setminus \Omega) \cap (U \times V) \subset \pi_2(Q \cap \Theta) \subset \varphi$. En effet, soit $(x, y) \in F$; alors il existe une suite $(x_\nu, y_\nu) \to (x, y)$, $(x_\nu, y_\nu) \in \Omega$, d'où $(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \in \Gamma_2 \cap Q_0$ avec un z_ν , donc, d'après (4), $|z_\nu - c| < \frac{\eta}{3}$; on a alors, pour une suite extraite, $(x_{\alpha_\nu}, y_{\alpha_\nu}, z_{\alpha_\nu}) \to (x, y, z) \in \overline{\Gamma}_2 \cap Q_0$; on a, de plus, $(x, y, z) \notin \Gamma_2$ (sinon, on aurait $(x, y) \in \Omega$), donc, comme $(\overline{\Gamma}_2 \setminus \Gamma_2) \cap Q_0 \subset \Theta \cap Q$, il vient $(x, y) \in \pi_2(\Theta \cap Q)$, ce qui prouve la première inclusion. Comme on a $\Theta \cap Q \subset \Gamma_1 \cap Q$, on obtient $\pi_2(\Theta \cap Q) \subset \varphi$.

D'après l'observation que nous avons faite au début de ce N°, il en résulte que $F = \varphi$, d'où $\pi_2(Q \cap \Theta) = \varphi$. Comme $Q \cap \Theta \subset Q \cap \Gamma_1$ et $(\pi_2)_{Q \cap \Gamma_1}$ est une bijection sur φ , il vient $Q \cap \Theta = Q \cap \Gamma_1$, d'où $Q \cap \Gamma_1 \subset \Theta \cap \Gamma_1$, ce qui termine la démonstration.

11 [Voisinage normal]

On appelle *système normal de polynômes distingués* toute famille $\{H_\ell^k\}_{0 \leq k < \ell \leq n}$, où $H_\ell^k(x_1, \ldots, x_k; x_\ell)$ est un polynôme distingué réel (à $(0, \ldots, 0)$; à coefficients analytiques réels) de discriminant $D_\ell^k(x_1, \ldots, x_k) \neq$

0 ,[5] vérifiant [6]

(1) $H_k^{k-1} = H_\ell^k = 0 \Longrightarrow H_\ell^{k-1} = 0$,

(2) $D_\ell^k = 0 \Longrightarrow H_k^{k-1} = 0$,

$1 \leq k < \ell \leq n$, dans un voisinage de l'origine *dans* $\mathbb{C}^n$ (c'est-à-dire, il existe un voisinage V de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ tel que si $(z_1, \ldots, z_n) \in V$ et p. 27
$1 \leq k < \ell \leq n$, alors

$$H_k^{k-1}(z_1, \ldots, z_{k-1}; z_k) = H_\ell^k(z_1, \ldots, z_k; z_\ell) = 0$$

implique $H_\ell^{k-1}(z_1, \ldots, z_{k-1}; z_k) = 0$, et $D_\ell^k(z_1, \ldots, z_k) = 0$ implique $H_k^{k-1}(z_1, \ldots, z_{k-1}; z_k) = 0$).

Observons qu'on a nécessairement $H_\ell^0(z_\ell) = z_\ell$ ou $H_\ell^0(z_\ell) = 1$.

Un voisinage (de l'origine dans $\mathbb{R}^n$)

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x_i| < \delta_i, \ , i = 1, \ldots, n\}$$

est dit *normal*, si H_ℓ^k sont holomorphes pour $|z_i| \leq \delta_i$ et vérifient les conditions (1), (2) pour $z \in \widetilde{Q} = \{z \in \mathbb{C}^n \ : \ |z_i| < \delta_i\}$, et si 1'on a de plus

$$z_1, \ldots, z_k, z_\ell \in \mathbb{C} \, , \ |z_i| < \delta_i \, , \ (i = 1, \ldots, k), \ H_\ell^k(z_1, \ldots, z_k; z_\ell) = 0 \Longrightarrow |z_\ell| < \delta_\ell \, ,$$

lorsque $0 \leq k < \ell \leq n$.

Chaque voisinage V de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ contient un voisinage normal. En effet, on définit δ_i par récurrence (descendante) : on prend $\delta_n > 0$ tel que $\{|x_i| < \delta_n\} \subset V$ et que H_ℓ^k soient holomorphes et vérifient (1), (2) dans $\{z \in \mathbb{C}^n \ : \ |z_i| < \delta_i\}$; étant choisis $\delta_n \geq \ldots \geq \delta_{k+1} > 0$, on prend $\delta_k > 0$, $\leq \delta_{k+1}$ tel que pour $\ell = k+1, \ldots, n$ on ait

$$|z_1|, \ldots, |z_k| < \delta_k \ , \ H_\ell^k(z_1, \ldots, z_k; z_\ell) = 0 \Longrightarrow |z_\ell| < \delta_\ell \ .$$

Observons que la condition (2) peut être remplacée par

$$(2') \qquad H_\ell^k = \frac{\partial H_\ell^k}{\partial z_\ell} = 0 \Longrightarrow H_k^{k-1} = 0 \ ;$$

elle est satisfaite dans chaque $\widetilde{Q}$ (comme ci-dessus). En effet, admettons les conditions précédentes ; en prenant un $\widetilde{Q}$ comme ci-dessus, si $z \in \widetilde{Q}$ et $H_\ell^k(z_1, \ldots, z_k; z_\ell) = \dfrac{\partial H_\ell^k}{\partial z_\ell}(z_1, \ldots, z_k; z_\ell) = 0$, alors $D_\ell^k(z_1, \ldots, z_k) = 0$,

d'où $H_k^{k-1}(z_1,\ldots,z_{k-1};z_k) = 0$. Réciproquement, admettons ces conditions avec (2') au lieu de (2) ; en prenant un $\widetilde{Q}$ comme ci-dessus avec (2') p. 28
au lieu de (2) , si $|z_1| < \delta_1,\ldots,|z_k| < \delta_k$ et $D_\ell^k(z_1,\ldots,z_k) = 0$, alors $\dfrac{\partial H_\ell^k}{\partial z_\ell}(z_1,\ldots,z_k;z_\ell) = 0$ pour un z_ℓ vérifiant $H_\ell^k(z_1,\ldots,z_k;z_\ell) = 0$, d'où $|z_\ell| < \delta_\ell$ et $H_k^{k-1}(z_1,\ldots,z_{k-1};z_k) = 0$.

Soit M une sous-variété analytique de dimension k de $\mathbb{R}^n$ .On dira que M est *topographique*, si elle est de la forme

$$\{x_\ell = \varphi_\ell(x_1,\ldots,x_k),\ \ell = k+1,\ldots,n\ ,\ (x_1,\ldots,x_k) \in G\}\ ,$$

où G est un sous-ouvert de $\mathbb{R}^k$ et φ_k sont analytiques dans G ; alors la "projection"

$$\pi : M \ni (x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow (x_1,\ldots,x_k) \in G$$

est un homéomorphisme. On dira que M est *localement topographique* si chaque point de M possède un voisinage dans M qui est topographique ; alors la "projection" $\pi : M \ni (x_1,\ldots,x_n) \to (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k$ est un homéomorphisme local,

Soit $\{H_\ell^k\}_{0\le k<\ell\le n}$ un système normal de polynômes distingués, et soit Q un voisinage normal. Posons :

$$V^k = \{x \in Q\ :\ H_n^{n-1} = \ldots = H_{k+1}^k = 0\ ,\ H_k^{k-1} \neq 0\}\ , k = 0,\ldots,n$$

(c'est-à-dire $V^n = \{x \in Q\ :\ H_n^{n-1} \neq 0\}$ et $V^0 = \{x \in Q\ :\ H_n^{n-1} = \ldots = H_1^0 = 0\}$). On a alors :

$$Q = V^n \cup \cdots \cup V^0\ , \quad V^j \text{ étant disjoints.}$$

Observons que chaque $V^k \cup \cdots \cup V^0 = \{x \in Q\ :\ H_n^{n-1} = \ldots = H_{k+1}^k = 0\}$ est fermé dans Q et que V^k est ouvert dans $V^k \cup \cdots \cup V^0$.

Posons $C^k = \{x \in Q\ :\ H_{k+1}^k = \ldots = H_n^k = 0\ ,\ H_k^{k-1} \neq 0\}$, $k = 0,\ldots,n$
(c'est-à-dire $C^n = V^n$, $C^{n-1} = V^{n-1}$, $C^0 = \{H_1^0 = \ldots = H_n^0 = 0\}$ est vide p. 29
ou $\{0\}$). En vertu de (2'), C^k est une sous-variété analytique de dimension k, localement topographique. D'après (1), on a $V^k \subset C^k$. Nous allons démontrer la suivante

[5]Ceci résulte de la condition (2) pour $k = 1$.

[6]ici on note encore H_ℓ^k l'extension de H_ℓ^k sur un voisinage complexe de l'origine.

Proposition 1. *V^k est ouvert dans C^k . Par conséquent, V^k est une sous-variété analytique de dimension k, localement topographique,*

Démonstration. Prenons

$$\widetilde{V}^k = \{x \in \widetilde{Q} \ : \ H_n^{n-1} = \ldots = H_{k+1}^k = 0 \ , \ H_k^{k-1} \neq 0\}$$

et

$$\widetilde{C}_k = \{x \in \widetilde{Q} \ : \ H_{k+1}^k = \ldots = H_n^k = 0 \ , \ H_k^{k-1} \neq 0\} \ .$$

Comme on a alors $V^k = \widetilde{V}^k \cap \mathbb{R}^n$ et $C^k = \widetilde{C}^k \cap \mathbb{R}^n$, il suffit de prouver que $\widetilde{V}^k$ est ouvert dans $\widetilde{C}^k$. Observons que de même, en vertu de (2'), $\widetilde{C}^k$ est une sous-variété localement topographique (c'est-à-dire localement de la forme $\{z_\ell = \varphi_\ell(z_1, \ldots, z_k), \ \ell = k+1, \ldots, n\}$) donc $\pi_{\widetilde{C}^k} : \widetilde{C}^k \to \mathbb{C}^k$, où $\pi : (z_1, \ldots, z_n) \to (z_1, \ldots, z_k)$, est un homéomorphisme local. II suffit de vérifier que $\pi_{\widetilde{V}^k} : \widetilde{V}^k \to \mathbb{C}^k$ est ouvert (comme alors chaque $z \in \widetilde{V}^k$ possède un voisinage U tel que $\pi_{\widetilde{C}^k \cap U}$ soit un homéomorphisme et $\pi(\widetilde{V}^k \cap U)$ soit un voisinage de $\pi(z)$, donc $\widetilde{V}^k \cap U$ est un voisinage de z dans $\widetilde{C}^k$).

Or ceci résulte du fait que $\pi_{\widetilde{V}^k} : \widetilde{V}^k \to \{H_k^{k-1} \neq 0\}$ est la composée des applications

$$\{ \ H_\ell^{\ell-1} = \ldots = H_{k+1}^k = 0 \ , \ H_k^{k-1} \neq 0\} \ni (z_1, \ldots, z_\ell) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (z_1, \ldots, z_{\ell-1}) \in \{ \ H_{\ell-1}^{\ell-2} = \ldots = H_{k+1}^k = 0 \ , \ H_k^{k-1} \neq 0\}, \ \ell = n, \ldots, k+1$$

qui sont ouvertes grâce au suivant p. 30

Lemme. *Supposons que $z_0^r + a_1 z_0^{r-1} + \cdots + a_r = 0$. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que si $|c_i - a_i| < \delta$, $i = 1, \ldots, r$, le polynôme $z^r + c_1 z^{r-1} + \cdots + c_r$ a un zéro dans $\{|z - z_0| < \delta\}$.*

Ainsi les composantes connexes Γ_n^k de V^k sont sous-variétés analytiques de dimension k et $\mathcal{N} = \{\Gamma_n^k\}_{k,n}$ est une partition de Q : .

$$Q = \bigcup \Gamma_n^k \ , \quad \Gamma_n^k \text{ disjoints,}$$

qu'on appellera *partition normale* de Q suivant $\{H_\ell^k\}_{0 \le k < \ell \le n}$, les Γ_n^k seront appelés *membres* de la partition.

Remarque. Comme V^k est aussi fermé dans C^k , les Γ_n^k sont des composantes connexes de C^k .

Observons qu'on a toujours $V^0 = \{0\}$ ou $\emptyset$. Par conséquent, dans le cas $n = 1$, la partition normale est toujours de la forme $\{]-\delta,\delta[\}$ ou $\{]-\delta,0[,\{0\},]0,\delta[\}$

Proposition 2. *Chaque Γ_n^k est une variété topographique, donc de la forme*

$$\{x_j = \varphi_j(x_1,\dots,x_k),\ j = k+1,\dots,n\ ,\ (x_1,\dots,x_k) \in \Delta\}\ ,$$

où φ_j sont analytiques dans Δ (sous-ouvert de $\mathbb{R}^k$) et vérifient

$$H_j^k(x_1,\dots,x_k;\varphi_j(x_1,\dots,x_k)) = 0$$

dans Δ ; on a $D_k^j \neq 0$ dans Δ .

Remarque. On a $\Gamma_\nu^0 = \{0\}$ et Γ_ν^n sont des sous-ouverts de Q .

Soit $0 < m < n$. Observons que $\{H_\ell^k\}_{0\leq k<\ell\leq m}$ est aussi un système normal de polynômes distingués, et que $Q_* = \pi(Q)$, où $\pi : (x_1,\dots,x_n) \to$ p. 31
$(x_1,\dots,x_m)$, est un voisinage normal pour ce système. On a la suivante

Proposition 3. *Chaque $\pi(\Gamma_n^k)$, avec $k \leq m$, est un membre de dimension k de la partition normale $\mathcal{N}_*$ de Q_* suivant $\{H_\ell^j\}_{0\leq j<\ell\leq m}$.*

Démonstration des propositions 2 et 3. Commençons par la proposition 3. Posons

$$V_*^k = \{x \in Q_*\ :\ H_m^{m-1} = \ldots = H_{k+1}^k = 0\ ,\ H_k^{k-1} \neq 0\}\ .$$

On a donc $\pi(V^k) \subset V_*^k$; montrons que

$$\pi_0 = \pi_{V^k} : V^k \ni (x_1,\dots,x_n) \longrightarrow (x_1,\dots,x_m) \in V_*^k$$

est un revêtement fini. A cet effet posons $\Omega = \{(x_1,\dots,x_k)\ :\ H_k^{k-1} \neq 0\}$; en prenant

$$\pi_1 : V^k \ni (x_1,\dots,x_n) \longrightarrow (x_1,\dots,x_k) \in \Omega$$

et

$$\pi_2 : V_*^k \ni (x_1,\dots,x_m) \longrightarrow (x_1,\dots,x_k) \in \Omega\ ,$$

on a $\pi_2 = \pi_1 \circ \pi_0$; donc il suffit (lemme 2) de montrer que π_1 et π_2 sont des revêtements finis ; or, π_1 est un homeomorphisme local ; vérifions qu'il est propre : si E est un sous-compact de Ω , on a, en vertu de la définition d'un voisinage normal,

$$\pi_1^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ (x_1,\dots,x_k) \in E,\ H_n^{n-1} = \ldots = H_{k+1}^k = 0\}\ ,$$

donc $\pi_1^{-1}(E)$ est compact (comme fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$) ; pareillement pour π_2 . Maintenant π_0 , comme un revêtement fini, est ouvert et fermé, donc l'image d'une composante connexe Γ de V^k est un composante connexe $\Gamma_* = \pi(\Gamma)$ de V_*^k , et ainsi la proposition 3 est démontrée. Il s'ensuit, en même temps, que alors

$$\pi_* : \Gamma \ni (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1, \dots, x_m) \in \Gamma_*$$

est un revêtement fini (comme un homéomorphisme local, propre). Admettons pour le moment que $m = n - 1$; comme $\xi : \Gamma \ni (x_1, \dots, x_n) \to x_n \in \mathbb{R}$ est continue et $(\pi_*, \xi) : \Gamma \to \Gamma_* \times \mathbb{R}$ est injective, donc selon le lemme 3, π_* est un homéomorphisme de Γ sur Γ_* . Il en résulte par récurrence qu'il en est de même dans le cas général ($k \leq m < n$). En particulier, lorsque $m = k$, p. 32
on a $V_*^k = \Omega$, donc Γ_* est un sous-ouvert de R^k , d'où il vient que Γ est topographique :

$$\Gamma = \{x_j = \varphi_j(u),\ j = k+1, \dots, n,\ u \in \Gamma_*\} ,$$

où φ_j sont analytiques dans Γ_* ; comme $\Gamma \subset C^k$, on a $H_k^j(u, \varphi_j(u)) = 0$ dans Γ_* ; $D_k^j \neq 0$ dans Γ_* d'après (2) et la définition de V_*^k . Les cas où $k = 0$ ou n étant triviaux, la démonstration est terminée.[7]

Corollaire. *Soient m et $\mathcal{N}_*$ comme dans la proposition 3. Alors chaque ensemble de la forme*

$$\Gamma = \{x_j = \varphi(x_1, \dots, x_m),\ j = m+1, \dots, n,\ (x_1, \dots, x_m) \in \Gamma_*\}$$

avec $\Gamma_* \in \mathcal{N}_*$ de dimension m et φ_j analytiques, vérifiant

$$H_j^{j-1}(x_1, \dots, x_m, \varphi_{m+1}(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_j(x_1, \dots, x_m)) = 0 \ \textit{dans}\ \Gamma_* ,$$

est un membre de dimension m de $\mathcal{N}$, et vice versa.

En effet, soient $\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(s)}$ tous les membres de dimension m de $\mathcal{N}$ vérifiant $\pi(\Gamma^{(i)}) = \Gamma_*$ on a alors $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^s \Gamma^{(i)}$, donc (connexité de Γ) $\Gamma \subset \Gamma^{(j)}$ pour un j, d'où $\Gamma = \Gamma^{(j)}$ [8]. p. 33

[7] Les proposition 2 et 3 restent valables pour les composantes connexes de C^k ; dans la proposition 3 : si Γ est une composante connexe de C^k , $\pi(\Gamma)$ est celle de $C_*^k = \{u \in Q_* : H_{k+1}^k = \ldots = H_m^k = 0,\ H_k^{k-1} \neq 0\}$. Dans la démonstration on remplace V^k et V_*^k par C^k et C_*^k et le raisonnement va sans changements.

[8] Si $\varphi : E \to F$, $\psi : E \to F$, alors $\varphi \subset \psi \ \Rightarrow\ \varphi = \psi$.

Soit $\pi : (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{n-1})$; on a $Q = Q_* \times \Delta$ avec $Q_* = \pi(Q)$ et $\Delta = \,]-\delta, \delta[$. Prenons un membre quelconque Γ_* de dimension k de la partition normale de Q_*. Chaque membre Γ de la partition normale de Q, vérifiant $\pi(\Gamma) = \Gamma_*$, est le graphe d'une application de Γ_* dans Δ ; on peut écrire $\Gamma : \Gamma_* \to \Delta$ et on a $H_n^k(x_1 \ldots, x_k; \Gamma(u)) = 0$ pour $u = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Gamma_*$ (car on a $\Gamma(u) = \varphi_n(x_1, \ldots, x_k)$ pour $u \in \Gamma_*$, Γ étant de la forme comme dans la proposition 2). Comme ces Γ sont disjoints entre eux, $\Gamma \neq \Gamma'$ implique $\Gamma(u) \neq \Gamma'(u)$ dans Γ_*, et, par conséquent, leur nombre s ne surpasse pas le degré de H_n^k ; soient $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ tous ces Γ, on peut admettre que $\Gamma_1(u) < \ldots < \Gamma_s(u)$ dans Γ_*, et on a alors :

$$(\Gamma_* \times \Delta) \cap V^n = \bigcup_{\nu=0}^{s} \Gamma_*^{(\nu)} \quad \text{avec}$$
$$\Gamma_*^{(\nu)} = \{(u,t) : \; u \in \Gamma_*, \; \Gamma_\nu(u) < t < \Gamma_{\nu+1}(u)\} \text{ connexes,}$$

où on a posé $\Gamma_0(u) = -\delta$ et $\Gamma_{s+1}(u) = \delta$. Comme Q_* est la réunion des Γ_*, il s'ensuit que V^n est la réunion des $\Gamma_*^{(\nu)}$. Par conséquent, chaque composante connexe de V^n est une réunion de certains $\Gamma_*^{(\nu)}$.

II en résulte d'abord, (comme $\pi(\Gamma_*^{(\nu)}) = \Gamma_*$) que chaque $\pi(\Gamma_n^k)$ est une réunion de membres de la partition normale de Q_*. Par récurrence, on en déduit :

Proposition 4. *Soient m, π et $\mathcal{N}_*$ comme dans la proposition 3. Si $k > m$. alors $\pi(\Gamma_n^k)$ est une réunion de membres de $\mathcal{N}_*$.* p. 34

II en résulte ensuite que le nombre de membres de dimension n de la partition normale de Q ne surpasse pas celui des $\Gamma_*^{(\nu)}$, donc il est $\leq N(1 + \max_{k=0,\ldots,n-1}$ degré de $H_n^k)$, où N est le nombre de membres de la partition normale de Q_* ; enfin, le nombre de membres de dimension $< n$ de la partition normale de Q est $\leq N \max_{k=0,\ldots,n-1}$ degré de H_n^k. Par récurrence, on en déduit :

Proposition 5. *Chaque partition normale est finie. Le nombre de membres admet un majorant qui ne dépend pas du voisinage normal.*

Proposition 6. *Toute partition normale d'un voisinage Q est une stratification (dans Q) : $(\overline{\Gamma_n^k} \setminus \Gamma_n^k) \cap Q$ est une réunion de membres de dimension $< k$, quel que soit le membre Γ_n^k.*

Démonstration. On va démontrer la dernière assertion par récurrence sur k. Elle étant triviale pour $k = 0$, supposons qu'elle soit vraie pour $0, 1, \ldots, k$

avec un $k < n$. Prenons un Γ_ν^{k+1} et posons $\Theta = (\overline{\Gamma_\nu^{k+1}} \setminus \Gamma_\nu^{k+1}) \cap Q$ alors Θ est fermé dans Q (car Γ_ν^{k+1} est localement fermé [9]). Comme $V^{k+1} \cup \cdots \cup V^0$ est fermé dans Q et comme $\overline{\Gamma_\nu^{k+1}}$ est fermé dans V^{k+1}, on a

$$\Theta \subset (V^{k+1} \cup \cdots \cup V^0) \setminus V^{k+1} = V^k \cup \cdots \cup V^0 \ .$$

Il suffit donc de prouver que $\Gamma_\sigma^s \cap \Theta \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma_\sigma^s \subset \Theta$ lorsque $0 \leq s \leq k$. Supposons que ceci soit vrai lorsque $r < s \leq k$ pour un r tel que $0 \leq r \leq k$. Alors (récurrence descendante) il suffit de montrer que $\Gamma_\rho^r \cap \Theta \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma_\rho^r \subset \Theta$. p. 35

Supposons que $\Gamma_\rho^r \cap \Theta \neq \emptyset$. Si $\Gamma_\rho^r \cap \Psi \neq \emptyset$ où $\Psi = \bigcup\{\Gamma_\sigma^s : \Gamma_\sigma^s \subset \Theta,\ r < s \leq k\}$, alors (l'hypothèse de la première récurrence) pour un Γ_σ^s on a $\Gamma_\rho^r \subset \overline{\Gamma_\sigma^s} \cap Q \subset \Theta$ (comme Θ est fermé dans Q). Reste à considérer le cas où $\Gamma_\rho^r \cap \Psi = \emptyset$. Or, Γ_ρ^r est ouvert dans $V^r \cup \cdots \cup V^0$ (comme V^r l'est), et $\Theta \setminus \Psi \subset V^r \cup \cdots \cup V^0$ (comme, d'après l'hypothèse de récurrence descendante, $\Theta \cap (V^k \cup \cdots \cup V^{r+1}) \subset \Psi$), donc $\Gamma_\rho^r \cap \Theta = \Gamma_\rho^r \cap (\Theta \setminus \Psi)$ est ouvert dans $\Theta \setminus \Psi$, et, par conséquent (comme Ψ est fermé), $\Gamma_\rho^r \cap \Theta$ est ouvert dans Θ. En supprimant le cas trivial $r = 0$, on peut appliquer le lemme 5 à Γ_ρ^r et Γ_ν^{k+1} dans $Q = Q_1 \times Q_2 \times Q_3$, où $Q_1 = \{|x_i| < \delta_i,\ i = 1, \ldots, r\}$, $Q_2 = \{|x_i| < \delta_i,\ i = r+1, \ldots, k+1\}$, $Q_3 = \{|x_i| < \delta_i,\ i = k+2, \ldots, n\}$[10].), et on en conclut que $\Gamma_\rho^r \cap \Theta$ est ouvert dans Γ_ρ^r. Mais $\Gamma_\rho^r \cap \Theta$ est aussi fermé dans Γ_ρ^r, donc $\Gamma_\rho^r \cap \Theta = \Gamma_\rho^r$, d'où $\Gamma_\rho^r \subset \Theta$, ce qui termine la démonstration.

Proposition 7. *Soient m et π comme dans la proposition 3. Si Γ est un membre de dimension $\leq m$ de la partition normale de Q et $\Gamma_* = \pi(\Gamma)$ alors $\pi((\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap Q) = (\overline{\Gamma_*} \setminus \Gamma_*) \cap Q_*$.*

En effet, posons $\widehat{Q} = Q_* \times \overline{Q_0}$ où $Q = Q_* \times Q_0$. On a

$$\widehat{Q} \cap \overline{\Gamma} \subset \{\pi(x) \in Q_*,\ H_{k+1}^k = \ldots = H_n^k = 0\} \subset Q$$

(grâce à la définition d'un voisinage normal), donc $\overline{\Gamma} \cap Q = \overline{\Gamma} \cap \widehat{Q}$, d'où $\pi(\overline{\Gamma} \cap Q) = \pi(\overline{\Gamma} \cap \widehat{Q}) = \overline{\Gamma_*} \cap Q_*$, car $\pi_{\widehat{Q}} : \widehat{Q} \to Q_*$ est propre. Or, $\pi(\overline{\Gamma} \cap Q) = \pi((\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap Q) \cup \Gamma_*$ est une partition (comme $\pi((\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap Q)$ est une réunion de membres de dimension $<$ que celui de Γ_*), d'où p. 36

$$\pi((\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap Q) = \pi(\overline{\Gamma} \cap Q) \setminus \Gamma_* = (\overline{\Gamma_*} \cap Q_*) \setminus \Gamma_* \ .$$

[9] Toute sous-variété est localement fermée. Si F est localement fermé, $\overline{F} \setminus F$ est fermé, puisque alors F est fermé dans un ouvert G, c'est-à-dire $\overline{F} \cap G = F$, d'où $\overline{F} \setminus F = \overline{F} \setminus (\overline{F} \cap G) = \overline{F} \setminus G$.

[10] Q_3 se réduit à un point lorsque $k = n - 1$

On appelera la dimension minimale de la partition normale l'entier k tel que $V^0 = \ldots = V^{k-1} = \emptyset$ et $V^k \neq \emptyset$; ceci a lieu si et seulement si $H_k^{k-1} \equiv 1$ et $H_{k+1}^k, \ldots, H_n^{n-1}$ sont de degré > 0 (comme $V^0 \cup \cdots \cup V^j = \{H_n^{n-1} = \ldots = H_{j+1}^j = 0\}$ est non vide si et seulement si $H_n^{n-1}, \ldots, H_{j+1}^j$ sont de degré > 0). Par conséquent, $H_{k+1}^k, \ldots, H_n^k$ sont alors de degré 1, et $V^k = \{x \in Q \ : \ H_{k+1}^k = \ldots = H_n^k = 0\}$ est le membre unique de dimension k ; il contient 0.

Observons que la dimension minimale ne dépend que de $\{H_\ell^k\}$.

Proposition 8. *On a $0 \in \overline{\Gamma}$ pour chaque membre Γ. Si k est la dimension minimale de la partition, alors $V^k \subset \overline{\Gamma}$ pour chaque membre Γ.*[11]

Démonstration. Il suffit de prouver la seconde assertion. Soit Γ un membre ; si $(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap Q = \emptyset$, alors, d'après la proposition 7 appliquée avec $m = \dim \Gamma$, $(\overline{\Gamma_*} \setminus \Gamma_*) \cap Q_* = \emptyset$, donc, comme Γ_* est ouvert et fermé dans Q_*, on a $\Gamma_* = Q_*$, et $\Gamma(0) = 0$, car $\Gamma \subset \{H_{m+1}^m = \ldots = H_n^m = 0\}$, c'est-à-dire $0 \in \Gamma$. On en déduit que $(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap Q \neq \emptyset$ pour chaque membre Γ de dim. $> k$ (comme il ne p. 37
peut pas contenir 0). Il en résulte (par récurrence) que $V^k \subset \overline{\Gamma}$ pour chaque membre Γ.

Remarque 1. On a $\lim_{u \to 0} \Gamma(u) = 0 \quad (u = (x_1, \ldots, x_k),\ k = \dim \Gamma)$ quel que soit le membre Γ.

En effet, on a

$$\overline{\Gamma} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) \subset (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap \{H_{k+1}^k = \ldots = H_n^k = 0\} = \{(0, 0)\} .$$

Remarque 2. II existe un voisinage normal Q_0 tel que si Q est un sous-voisinage normal de Q_0 et $\{\Gamma_i^j\}$ est la partition normale de Q_0, alors $\{\Gamma_i^j \cap Q\}$ est celle de Q. Par conséquent, les partitions normales des voisinages normaux suffisamment petits ont les mêmes germes en 0 .

En effet, si $Q' \subset Q''$ sont deux voisinages normaux, chaque membre de la partition normale de Q' est contenu dans un seul membre de la partition normale de Q'' et (proposition 8). chaque membre de la partition normale

[11] La proposition 8 reste valable pour des composantes connexes de C^m avec $m \geq k$. En effet, soit Γ une composante connexe de C^m et soit $\pi : (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_m)$. Alors (cf. la note 7) $\pi(\Gamma)$ est une composante connexe de $C_*^m = V_*^m$, et, comme k est encore la dimension minimale pour $\{H_j^i\}_{0 \leq i < j \leq m}$, on a $V_*^k \subset \overline{\pi(\Gamma)} \subset \pi(\overline{\Gamma})$ (puisque Γ est borné). D'après la condition (1) et la définition d'un voisinage normal, on a ensuite $(V_*^k \times \mathbb{R}^{n-m}) \cap \overline{\Gamma} \subset V^k$, d'où, comme $\pi(V^k) = V_*^k \subset \pi((V_*^k \times \mathbb{R}^{n-m}) \cap \overline{\Gamma})$ et comme π_{V^k} est injective, il vient $V^k \subset \overline{\Gamma}$.

de Q'' contient un de la partition normale de Q', donc le nombre $N(Q)$ de membres de la partition normale de Q est une fonction décroissante de Q. Par conséquent, en vertu de la proposition 5, il existe un voisinage normal Q_0 tel que $N(Q) = N(Q_0)$ pour $Q \subset Q_0$, et alors il subsiste ce qu'affirme la première assertion.

Soit maintenant Q un voisinage normal, et soit $a \in Q$. D'après le théorème de préparation de Weierstrass, on a

$$(*) \qquad H_\ell^k = E_\ell^k \, h_\ell^k \ , \quad E_\ell^k \neq 0 \text{ dans un voisinage de } a,$$

où E_ℓ^k sont analytiques dans un voisinage de a et h_ℓ^k sont des polynômes p. 38
distingués (réels) au point a. On vérifie aussitôt que la famille $\{h_\ell^k\}_{0 \le k < \ell \le n}$ satisfait aux conditions (1) et (2'), donc elle est un système normal des polynômes distingués au point a (c'est-à-dire $\{h_\ell^k(a+x)\}$ est un système normal de polynômes distingués), et on l'appelera le *système* (normal de polynômes distingués) *induit* en a.

Soit Q_a un voisinage normal de a (pour $\{h_\ell^k\}$), contenu dans Q et tel que $(*)$ subsistent dans Q_a. La partition normale $Q_a = V_a^n \cup \cdots \cup V_a^0$, $V_a^k = \bigcup \Gamma_{a,x}^k$ sera appelée une *partition normale induite* en a. On a alors : $V_a^k = V^k \cap Q_a$, donc pour chaque membre Γ de la partition normale de Q les composantes connexes de $\Gamma \cap Q_a$ sont des membres de la partition induite (de Q_a) de la même dimension.

On voit que si $a \in V^k$, la dimension minimale d'une partition normale induite en a est égale à k. (En effet, on peut choisir Q_a de manière que $Q_a \cap (V^0 \cup \cdots \cup V^{k-1}) = \emptyset$).

12 [Sous-variétés topographiques dans un voisinage normal]

Soient $S = \{H_j^i\}_{0 \le i < j \le n}$ un système normal de polynômes distingués, Q – un voisinage normal, $\mathcal{N}$ – la partition normale de Q suivant S. Fixons un ℓ tel que $0 < \ell < n$.

Pour chaque $E \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$ notons E_a le germe de E en a[12]. Soient p. 39

[12] C'est la classe d'équivalence de E suivant la relation d'équivalences "$A \cap V = B \cap V$ pour un voisinage V de a" dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, ($a$ fixé). Alors inclusion, l'union, l'intersection, la différence et le complémentaire sont compatibles avec cette relation d'équivalence, et ils induisent les relations et les opérations correspondantes dans l'ensemble de germes en a.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{la famille des sous-variétés analytiques topographiques,} \\ \text{de dimension } \ell, \text{ contenues dans } V^\ell \cup \cdots \cup V^0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{la famille de } \eta = (\eta_{\ell+1}, \ldots, \eta_n) \subset Q \text{ avec } \eta_j \text{ analytique} \\ \text{et vérifiant } H_j^{j-1}(u, \eta_{\ell+1}(u), \ldots, \eta_j(u)) = 0,\ j = \ell+1, \ldots, n \end{array} \right\} \\
\mathcal{F} &= \{\eta_x \ :\ \eta \in \mathcal{H},\ x \in \eta\}\ ; \\
\gamma &:\ \mathcal{F} \ni \eta_x \longmapsto x \in Q\ .
\end{aligned}$$

Pour chaque $E \subset Q$ posons $\Lambda_E = \{\xi \in \mathcal{F} \ :\ E_x \subset \xi \text{ pour un } x \in E\}$. On voit que si $\eta \in \mathcal{H}$, on a simplement $\Lambda_\eta = \{\eta_x \ :\ x \in \eta\}$[13] ; par conséquent $\mathcal{F} = \bigcup\{\Lambda_\eta \ :\ \eta \in \mathcal{H}\}$. Soit $\pi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_\ell)$. Toutes les $\varphi_\eta = \pi \circ \gamma_{\Lambda_\eta} : \Lambda_\eta \to \pi(\eta)$ avec $\eta \in \mathcal{H}$ forment un système analytique de cartes pour $\mathcal{F}$; en effet, elles sont bijectives (car $\varphi_\eta = \pi_\eta \circ \gamma_{\Lambda_\eta}$ et $\pi_\eta : \eta \to \pi(\eta)$, $\gamma_{\Lambda_\eta} : \Lambda_\eta \to \eta$ sont bijectives), et, quelles que soient $\eta, \eta' \in \mathcal{H}$, comme on a $\varphi_{\eta'} : \Lambda_{\eta'} \ni \eta_x \mapsto \pi(x) \in \pi(\eta')$ et $\varphi_\eta^{-1} : \pi(\eta) \ni u \mapsto \eta_{(u,\eta(u))} \in \Lambda_\eta$, $\varphi_{\eta'} \circ \varphi_\eta^{-1}$ est l'identité de l'ouvert

$$\{u \in \pi(\eta) \ :\ \eta_{(u,\eta(u))} \in \Lambda_{\eta'}\} = \{u \in \pi(\eta) \cap \pi(\eta') \ :\ \eta = \eta' \text{ au voisinage de } u\}$$

de $\mathbb{R}^\ell$. p. 40

La topologie qu'il définit sur $\mathcal{F}$[14] a pour base $\{\Lambda_\eta \ :\ \eta \in \mathcal{H}\}$, puisque, quel que soit $\eta \in \mathcal{H}$, $\Lambda_{\eta_V} = \varphi_\eta^{-1}(V)$ parcourt l'ensemble de sous-ouverts de Λ_η lorsque V parcourt celui de $\pi(\eta)$. Vérifions qu'elle est séparée : soient $\eta_a \neq \eta'_b$ (avec $\eta, \eta' \in \mathcal{H},\ a \in \eta\ ,\ b \in \eta'$) ; si $a \neq b$, on peut prendre η, η' disjoints et alors $\Lambda_\eta \cap \Lambda_{\eta'} = \emptyset$; si $a = b$, on peut prendre η, η' avec $\pi(\eta) = \pi(\eta')$ connexe et alors $\Lambda_\eta \cap \Lambda_{\eta'} = \emptyset$ (sinon, on aurait $\eta = \eta'$, comme η, η' sont analytiques). Ainsi $\{\varphi_\eta\}_{\eta \in \mathcal{H}}$ définit sur $\mathcal{F}$ une structure de variété analytique réelle.

Observons que pour le système engendré en un $a \in Q$ et pour un voisinage

[13]Si η_1, η_2 sont des sous-variétés de la même dimension et $\eta_1 \subset \eta_2$, alors η_1 est un sous-ouvert de η_2 (Pour des sous-variétés topographiques ceci résulte du fait que $\pi_{\eta_2} : \eta_2 \to \pi(\eta_2)$ est un homéomorphisme).

[14]C'est la topologie unique sur $\mathcal{F}$ pour laquelle Λ_η (où $\eta \in \mathcal{H}$) soient ouverts et $\varphi_\eta : \Lambda_\eta \to \pi(\eta)$, ou, ce qui revient au même, $\gamma_{\Lambda_\eta} : \Lambda_\eta \to \eta$ soient homeomorphismes. (Soit $F = \bigcup \Omega_i$; et soient $\varphi_i : \Omega_i \to \varphi_i(\Omega_i) \subset \mathbb{R}^\ell$ des bijections telles que $\varphi_k(\Omega_i \cap \Omega_k)$ soient ouverts de $\mathbb{R}^\ell$ et $\varphi_i \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(\Omega_i \cap \Omega_k) \to \varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_k)$ soient homéomorphismes. Soit τ_i la topologie sur Ω_i, transportée de $\varphi_i(\Omega_i)$ par φ_i^{-1} ; alors $\Omega_i \cap \Omega_k = \varphi_k^{-1}(\varphi_k(\Omega_i \cap \Omega_k)) \in \tau_k$ (et de même $\in \tau_i$) et les topologies induites sur $\Omega_i \cap \Omega_k$ par τ_i et τ_k coïncident (comme l'identité de $\Omega_i \cap \Omega_k$ s'écrit comme la composée des homeomorphismes : $(\varphi_i|_{\Omega_i \cap \Omega_k})^{-1} \circ (\varphi_i \circ \varphi_k^{-1}) \circ (\varphi_k|_{\Omega_i \cap \Omega_k})$) ; par conséquent (Bourbaki, Top.I,2,prop..8) $\bigcup \tau_i$ est une base d'une topologie unique sur F induisant τ_i sur Ω_i).

normal Q_a, la variété correspondante $\mathcal{F}_a$ est le sous-ouvert $\gamma^{-1}(Q_a)$ de $\mathcal{F}$ avec la topologie induite.

Observons que si U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^\ell$, il n'y a qu'un nombre fini de $\eta \in \mathcal{H}$ avec $\pi(\eta) = U$. En effet, on prend un $b \in U$ tel que $D^\ell_j(b) \neq 0,\ j = \ell+1, \ldots, n$, et alors $\eta(b) = \eta'(b) \Rightarrow \eta = \eta'$, donc on voit que 1e nombre de ces η ne surpasse pas celui de $(x_{\ell+1}, \ldots, x_n)$ vérifiant $H^\ell_j(b, x_j) = 0,\ j = \ell+1, \ldots, n$. Il en résulte que pour chaque $a \in Q$ l'ensemble $\gamma^{-1}(a)$
est fini. p. 41

Observons que si A est un sous-ouvert de B , $\Lambda_A = \Lambda_B \cap \gamma^{-1}(A)$.

Lemme 1. *Si $\eta \in \mathcal{H}$, alors $\gamma_{\Lambda_\eta} : \Lambda_\eta \to \eta$ est un homéomorphisme (même isomorphisme analytique), et, pour chaque $E \subset \eta$, on a $\gamma(\Lambda_E \cap \Lambda_\eta) = E$.*

En effet, on a alors $\gamma_{\Lambda_\eta} = (\pi_\eta)^{-1} \circ \varphi_\eta$, et $\Lambda_E \cap \Lambda_\eta = \{\eta_x \ :\ x \in E\}$.

Remarque. Si $\Gamma \subset Q$ est une sous-variété analytique de dim. k, alors Λ_Γ est une sous-variété analytique de dim. k de $\mathcal{F}$, et $\gamma_{\Lambda_\Gamma} : \Lambda_\Gamma \to \Gamma$ est localement isomorphisme analytique[15]

En effet, si $\xi \in \Lambda_\Gamma$, on a $\xi = \eta_x$ (avec $x \in \eta \in \mathcal{H}$) et $x \in \Gamma \cap V \subset \eta$ pour un voisinage ouvert V de x, donc $\Lambda_{\eta\cap V}$ est un voisinage de $\xi = \eta_x$ et $\Lambda_\Gamma \cap \Lambda_{\eta\cap V} = \Lambda_{\Gamma\cap V} \cap \Lambda_\eta = \gamma^{-1}_{\Lambda_\eta}(\Gamma \cap V)$ est une sous-variété analytique de $\mathcal{F}$ de dim. k.

Proposition 9. *Pour tout $\Gamma \in \mathcal{N}$ de dim. $\leq \ell$, $\gamma_{\Lambda_\Gamma} : \Lambda_\Gamma \to \Gamma$ est un revêtement fini. Si* $\dim \Gamma = \ell$, *γ_{Λ_Γ} est de degré* 1 *(c'est-à-dire, un homéomorphisme).*

Nous allons prouver d'abord deux lemmes. p. 42

Lemme 2. *Si Γ', Γ sont des sous-variétés analytiques d'un ouvert $G \subset \mathbb{R}^n$, Γ' connexe, Γ fermé dans G , alors $\Gamma'_x \subset \Gamma_x$ pour un $x \in \Gamma' \cap \Gamma$ entraîne $\Gamma' \subset \Gamma$.*

En effet, il suffit de vérifier que $\Theta = \{a \in \Gamma' \cap \Gamma \ :\ \Gamma'_x \subset \Gamma_x\}$ est ouvert et fermé dans Γ' ; or, si $a \in \Gamma'$, alors on a $\Gamma \cap V = \{x \in V \ :\ \psi(x) = 0\}$

[15]Observons encore, que si $\Gamma \in \mathcal{N}$ est un membre de dim. $k \leq \ell$, on a simplement $\Lambda_\Gamma = \gamma^{-1}(\Gamma)$. En effet, on a $\Lambda_\Gamma \subset \gamma^{-1}(\Gamma)$. Supposons que $\eta_a \in \gamma^{-1}(\Gamma)$, c'est-à-dire $a \in \Gamma \cap \eta$ et $\eta \in \mathcal{H}$; considérons la partition normale engendrée en a, d'un Q_a tel que $\overline{Q_a} \cap \eta$ soit fermé ; on voit que η intersecte C^ℓ_a (il suffit de prendre un point$(u, \eta(u))$ tel que $h^{\ell-1}_\ell(u) \neq 0$) ; soit Γ_1 une composante connexe de C^ℓ_a qui intersecte η ; alors, comme $\eta \cap \Gamma_1$ est ouvert et fermé dans Γ_1, on a $\Gamma_1 \subset \eta$ d'où $\overline{\Gamma_1} \subset \eta$; mais (prop.8) $\Gamma \cap Q_a = V^k_a \subset \overline{\Gamma_1}$, donc $\Gamma \cap Q_a \subset \eta$, ce qui donne $\Gamma_a \subset \eta_a$, d'où $\eta_a \in \Lambda_\Gamma$.

avec un voisinage V de a et $\psi : V \to \mathbb{R}^p$ analytique, et a possède dans Γ' un voisinage de la forme $\eta(U) \subset V$ avec U ouvert, connexe dans $\mathbb{R}^q$ et $\eta : U \to \mathbb{R}^n$ analytique ; on a alors $\eta(U) \subset \Gamma' \setminus \Theta$ ou $\eta(U) \subset \Theta$; en effet, si $\eta(U) \cap \Theta \neq \emptyset$, on a $\Gamma'_{x_0} \subset \Gamma_{x_0}$ avec un $x_0 = \eta(u_0)$, $u_0 \in U$ d'où $\psi(\eta(u)) = 0$ dans un voisinage de u_0, donc dans U, ce qui donne $\eta(U) \subset \Gamma$, d'où $\eta(U) \subset \Theta$.

Appelons *h-revêtement* au-dessus d'un ouvert $G \subset \mathbb{C}^k$ toute sous-variété complexe localement topographique N de dim k de $G \times \mathbb{C}$ (c'est-à-dire, qui est localement graphe d'une fonction holomorphe) telle que $N \ni (z, w) \mapsto z \in G$ est un revêtement. Si G est homéomorphe à une boule, alors (lemme 4 du N° 9) chaque h-revêtement connexe au-dessus de G est une fonction holomorphe dans G .

Lemme 3. *Soient D_0, D des disques ouverts de $\mathbb{C}$, K un disque fermé, tels que $K \subset D_0 \subset D$, et soient B_0, B des ouverts de $\mathbb{C}^k$ homéomorphes à une boule et tels que $B_0 \subset B$. Soit N un h-revêtement au-dessus de $G = B \times (D \setminus K)$. Alors chaque $f : G_0 = B_0 \times (D_0 \setminus K) \to \mathbb{C}$ holomorphe et tel que $f \subset N$ admet une extension holomorphe sur G .*

Démonstration du lemme 3. Soient $\lambda_1,\ \lambda_2 \subset \mathbb{C}$ deux demi-droites fermées, p. 43
distinctes, ayant pour l'origine un point intérieur de K, posons $P^1 = \mathbb{C} \setminus \lambda_1$, $P^2 = \mathbb{C} \setminus \lambda_2$,et notons $P^3,\ P^4$ les composantes connexes de $P^1 \cap P^2$. Alors, chacun des ouverts : $G^i = B \times (D \cap P_i \setminus K),\ G_0^i = B_0 \times (D_0 \cap P_i \setminus K),\ i = 1, 2, 3, 4$ est homéomorphe à une boule. Comme $f_{G_0^i}$, où $i = 1, 2$, est connexe, elle est contenue dans une composante connexe f_i de $N \cap (G^i \times \mathbb{C})$ qui est un h-revêtement au-dessus de G^i, donc une fonction holomorphe dans G^i. On a alors $f^1 = f = f^2$ dans $G_0^1 \cap G_0^2 = G_0^3 \cup G_0^4$, d'où (comme G^i est connexe et contient $G_0^i, i = 3, 4$) $f^1 = f^2$ dans $G^3 \cup G^4 = G^1 \cap G^2$; il s'ensuit que $f_3 = f_1 \cup f_2 \supset f_{G_0^1} \cup f_{G_0^2} = f$ (comme $G_0^1 \cup G_0^2 = G_0$) est holomorphe dans $G^1 \cup G^2 = G$.

Démonstration de la proposition 9. Soit $k = \dim \Gamma$. Le cas $k = 0$ est trivial, et celui de $k = \ell$ est contenu dans le lemme 1. Supposons donc que $0 < k < \ell$. Soit $a \in \Gamma$. Il suffit de prouver qu'il existe un voisinage ouvert Γ_1 de a dans Γ et un voisinage ouvert connexe U de $\pi(a)$ dans $\pi(Q)$ tel que.

$$(*) \qquad \left.\begin{array}{c} \xi \in \mathcal{F} \\ \gamma(\xi) = x \in \Gamma_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Il existe un } \eta : U \to \mathbb{R}^{n-\ell} \\ \text{analytique, avec } \eta_x = \xi \ . \end{array}\right.$$

En effet, on peut supposer que Γ_1 soit connexe et que $\pi(\Gamma_1) \subset U$. Il n'y a qu'un nombre fini de $\eta_1, \ldots, \eta_s \in \mathcal{H}$, vérifiant $\pi(\eta_i) = U$ et $\Gamma_1 \subset \eta_i,\ i =$

$1, \ldots, s$; on peut supposer qu'elles sont distinctes, et alors Λ_{η_i} sont disjoints. D'après le lemme 1, $\gamma_{\Lambda_{\Gamma_1} \cap \Lambda_{\eta_i}} : \Lambda_{\Gamma_1} \cap \Lambda_{\eta_i} \to \Gamma_1$ est un homéomorphisme, donc il reste à montrer que $\gamma_{\Lambda_\Gamma}^{-1}(\Gamma_1) = \bigcup_{i=1}^s \Lambda_{\Gamma_1} \cap \Lambda_{\eta_i}$. On a $\gamma_{\Lambda_\Gamma}^{-1}(\Gamma_1) = \{\xi \in \mathcal{F} : \Gamma_x \subset \xi$ pour un $x \in \Gamma_1\}$ et $\Lambda_{\Gamma_1} \cap \Lambda_{\eta_i} = \{(\eta_i)_x : x \in \Gamma_1\}$, d'où résulte p. 44
l'inclusion $\supset$. Si maintenant $\xi \in \gamma_{\Lambda_\Gamma}^{-1}(\Gamma_1)$ on a $\Gamma_x \subset \xi$ pour un $x \in \Gamma_1$, donc, en prenant η selon $(*)$, on a (vu la définition d'un voisinage normal) $\eta \in \mathcal{H}$ et $\xi \in \Lambda_{\Gamma_1} \cap \Lambda_\eta$, mais, comme $(\Gamma_1)_x \subset \eta_x$, on a (lemme 2 appliqué dans $U \times \mathbb{R}^{n-\ell}$) $\Gamma_1 \subset \eta$, d'où $\eta = \eta_i$ pour un i, et $\xi \in \Lambda_{\Gamma_1} \cap \Lambda_{\eta_i}$; ceci montre l'inclusion $\subset$.

Passons à la démonstration de $(*)$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $c = (a_1, \ldots, a_k)$. On a $\Gamma = (\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n)$ avec φ_i analytique dans un ouvert contenant c , et $\varphi_j(c) = a_j$. Or, φ_j admettent des extensions holomorphes ψ_j vérifiant $H_j^{j-1}(w, \psi_{k+1}(w), \ldots, \psi_j(w)) = 0$ et $H_j^k(w; \psi_j(w)) = 0$, $j = k+1, \ldots, n$, dans un voisinage de c dans $\mathbb{C}^k$. Posons $b = (a_1, \ldots, a_{\ell-1})$; il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $H_\ell^{\ell-1}(b; z_\ell) \neq 0$ et $H_\ell^k(c, z_\ell) \neq 0$ lorsque $|z_\ell - a_\ell| = \varepsilon$, $(z \in \mathbb{C})$, et que a_ℓ soit un zéro unique de $H_\ell^k(c, \cdot)$ dans le disque $D = \{z_\ell \in \mathbb{C} : |z_\ell - a_\ell| < \varepsilon\}$. 0n a alors, pour un $K = \{z_\ell \in \mathbb{C} : |z_\ell - a_\ell| \leq \varepsilon_1\}$ et un $B = \{v \in \mathbb{C}^{\ell-1} : |v - b| < \delta\}$ avec $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ et $\delta > 0$,

(i) $$H_\ell^{\ell-1} \neq 0 \text{ dans } B \times (D \setminus K) .$$

Comme a_ℓ est un zéro simple de $H_\ell^k(c; \cdot)$, (car $a \in \Gamma$ et, par conséquent, $D_\ell^k(c) \neq 0$), et $\psi_\ell(c) = a_\ell$, on peut exiger (en diminuant δ) que pour chaque $w \in \mathbb{C}^k$ tel que $|w - c| < \delta$, $\psi_\ell(w)$ soit un zéro unique de $H_\ell^k(w; \cdot)$ dans D, et que ψ_j soient holomorphes et vérifient $H_j^{j-1}(w, \psi_{k+1}(w), \ldots, \psi_j(w)) = 0$, $j = k+1, \ldots, n$ dans $\{w \in \mathbb{C}^k : |w - c| < \delta\}$. On a alors :

(ii) $H_\ell^{\ell-1} \neq 0$ dans $\{\Gamma_0(w)\} \times (D \setminus \{\psi_\ell(w)\})$ lorsque $|w - c| < \delta$, $(w \in \mathbb{C})$,

où $\Gamma_0(w) = (w, \psi_{k+1}(w), \ldots, \psi_{\ell-1}(w))$; sinon, on aurait $H_\ell^{\ell-1} = \ldots =$ p. 45
$H_{k+1}^k = 0$ pour un $(\Gamma_0(w), z_\ell)$ avec $|w - c| < \delta$ et $z_\ell \in D \setminus \{\psi_\ell(w)\}$, ce qui donne (en vertu de la condition (1)) $H_\ell^k(w, z_\ell) = 0$ contrairement au fait que $\psi_\ell(w)$ est un zéro unique de $H_\ell^k(w; \cdot)$ dans D.

Il existe un $\delta_* > 0$ tel que $\Gamma_0(w) \in B$, $\psi_\ell(w) \in D$ et (ii) subsiste lorsque $w \in V = \{y \in \mathbb{R}^k : |y - c| < \delta_*\}$. Alors Γ_V est un voisinage de a dans Γ (on peut exiger que V soit contenu dans le domaine de définition de Γ). Posons $U = (B \times D) \cap \mathbb{R}^\ell$; c'est un voisinage ouvert connexe de $\pi(a) = (b, a_\ell)$ dans $\mathbb{R}^\ell$. Supposons que $\xi \in \mathcal{F}$ et $\gamma(\xi) = x \in \Gamma_V$. On a alors $x = (\Gamma_0(w), \psi_\ell(w), \ldots, \psi_n(w))$ avec un $w \in V$ et $\xi = \eta_x^*$ avec un

$\eta^* \in \mathcal{H}$ (tel que $x \in \eta^*$) qui admet une extension holomorphe η' sur un voisinage $B_1 \times D_1$ de $\pi(x) = (\Gamma_0(w), \psi_\ell(w))$, où $B_1 = \{|v - \Gamma_0(w)| < \delta_1\}$ et $D_1 = \{|z_\ell - \psi_\ell(w)| < \delta_1\}$; comme $\psi_\ell(w) \in D$, on peut exiger que $D_1 \subset D$. Soit $0 < \delta' < \delta_1$; on a alors $K' = \{|z_\ell - \psi_\ell(w)| \leq \delta'\} \subset D_1$; d'après (ii) on a $H_\ell^{\ell-1} \neq 0$ dans $B_0 \times (D \setminus K')$ pour un $B_0 = \{|v - \Gamma_0(w)| < \delta_0\} \subset B_1$; comme $\Gamma_0(w) \in B$, on peut exiger que $B_0 \subset B$. On a alors (d'après la condition (2)) $D_j^\ell \neq 0$ dans $G' = B_0 \times (D \setminus K')$ ainsi que, d'après (i), dans $G = B \times (D \setminus K)$, $j = \ell+1, \ldots, n$. Par conséquent, $N_j' = \{H_j^\ell(u, z_j) = 0,\ u \in G'\}$ et $N_j = \{H_j^\ell(u, z_j) = 0,\ u \in G\}$ sont des h-revêtements, au-dessus de G' ou G respectivement, $j = \ell+1, \ldots, n$. Soit $\eta' = (\eta'_{\ell+1}, \ldots, \eta'_n)$; comme $\eta'_j|_{B_0 \times (D \setminus K')} \subset N_j'$, on voit, en utilisant le lemme 3, que $\eta'_{B_0 \times D}$ admet une extension holomorphe sur $G_0 = B_0 \times D$, $G_0 \cup G = (B_0 \times D) \cup (B \times (D \setminus K))$ et $B \times D$ successivement ; prenons enfin les restrictions η_j à U et $\eta = (\eta_{\ell+1}, \ldots, \eta_n)$; comme $\pi(x) = (\Gamma_0(w), \psi_\ell(w)) \in B_0 \times D_1$, on a $x \in \eta'' = \eta'_{(B_0 \times D_1) \cap \mathbb{R}^\ell} \subset \eta$, d'où $\xi = \eta_x^* = \eta_x'' = \eta_x$, ce qui termine la démonstration. p. 46

Pour tout $\Gamma \in \mathcal{N}$ notons $\mathcal{L}_\Gamma$ l'ensemble de composantes connexes de Λ_Γ ; alors chaque $\Lambda \in \mathcal{L}_\Gamma$ est une sous-variété de $\mathcal{F}$ de la même dimension que Γ, et $\gamma_\Lambda : \Lambda \to \Gamma$ est un revêtement fini. Posons $\mathcal{L} = \bigcup\{\mathcal{L}_\Gamma\ :\ \Gamma \in \mathcal{N}\}$ alors $\mathcal{L}$ est fini et ses éléments sont disjoints.

Proposition 10. *Si $\Lambda \in \mathcal{L}$, alors $\overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{L}$ de dim. $< \dim \Lambda$.*[16]

Démonstration. Il suffit de prouver que pour chaque $\alpha \in \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ il existe un voisinage Λ_η de α , avec $\eta \in \mathcal{H}$, et un $\Lambda_1 \in \mathcal{L}$ de dim. $< k = \dim \Lambda$, tels que

$$\alpha \in \Lambda_\eta \cap \Lambda_1 \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$$

(comme ceci montre à la fois que $\overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ est contenu dans la réunion d'élément de $\mathcal{L}$ de dim. $< k$, et que, pour tout $\Lambda_1 \in \mathcal{L}$, $\Lambda_1 \cap (\overline{\Lambda} \setminus \Lambda)$ est ouvert et fermé dans Λ_1 , donc $\Lambda_1 \cap (\overline{\Lambda} \setminus \Lambda) = \emptyset$ ou $\Lambda_1 \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$).

Soit $\alpha \in \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$. On a $\alpha = \eta_a$ avec $a \in \eta \in \mathcal{H}$ et on peut exiger que η soit un sous-fermé d'un voisinage normal Q_a pour le système S_a engendré en a . Comme Λ_η est un voisinage de α , on a $\Lambda_\eta \cap \Lambda \neq \emptyset$, d'où $\eta_b \in \Lambda_\eta \cap \Lambda$ avec un $b \in \eta \cap \Gamma_2$, où $\Gamma_2 = \gamma(\Lambda)$ est un membre de dim k de $\mathcal{N}$; donc Λ est la composante connexe de η_b dans Λ_{Γ_2} ; on a alors $\Gamma_b'' = (\Gamma_2)_b \subset \eta_b$ où Γ'' est la composante connexe de b dans $\Gamma_2 \cap Q_a$ (donc Γ'' est un membre de la p. 47

[16]On a, en vertu de la note 15, $\mathcal{F} = \bigcup\{\Lambda\ :\ \Lambda \in \mathcal{L}\}$; selon la prop.10, c'est une stratification de $\mathcal{F}$. En outre, $\gamma : \mathcal{F} \to G$ est une application stratifiée.

partition de Q_a suivant S_a) ; il s'ensuit (lemme 2) que $\Gamma'' \subset \eta$. D'autre part, $a \in \Gamma_1$ pour un $\Gamma_1 \in \mathcal{N}$, et (prop.8) $\Gamma' = \Gamma_1 \cap Q_a \subset \overline{\Gamma''}$ d'où $\Gamma' \subset \eta$.

D'après le lemme 1, $\Lambda_{\Gamma''} \cap \Lambda_\eta$ est connexe, donc, comme il est contenu dans Λ_{Γ_2} et contient η_b, on a $\Lambda_{\Gamma''} \cap \Lambda_\eta \subset \Lambda$. I1 en résulte que $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ (si $\Gamma_1 = \Gamma_2$, on aurait $\Gamma'' = \Gamma'$, d'où $\alpha = \eta_a \in \Lambda$). Le lemme 1 donne ensuite $\Lambda_{\Gamma'} \cap \Lambda_\eta \subset \overline{\Lambda_{\Gamma''} \cap \Lambda_\eta}$, d'où $\Lambda_{\Gamma'} \cap \Lambda_\eta \subset \overline{\Lambda}$. Comme $\Lambda_{\Gamma_1} \cap \Lambda_\eta = \Lambda_{\Gamma'} \cap \Lambda_\eta$ et $\Lambda_{\Gamma_1} \cap \Lambda_{\Gamma_2} = \emptyset$ (puisque $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$), on a $\Lambda_{\Gamma_1} \cap \Lambda_\eta \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$, d'où $\alpha \in \Lambda_1 \cap \Lambda_\eta \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ où Λ_1 est la composante connexe de α dans Λ_{Γ_1}. Enfin, $\dim \Lambda_1 = \dim \Gamma_1 < k$, comme $\Gamma_1 \subset \overline{\Gamma_2}$ et $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, et la démonstration est terminée.

Pour tout $\Lambda \in (L)$, posons $\beta(\Lambda) = \bigcup\{(\overline{\gamma(E)} \setminus \gamma(E)) \cap Q \ : \ E \subset \Lambda\}$.

Proposition 11. *Si $\Lambda \in \mathcal{L}$, alors $\beta(\Lambda)$ est une réunion de membres de $\mathcal{N}$ contenus dans $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$, où $\Gamma = \gamma(\Lambda)$.*

Démonstration. Comme $\gamma_\lambda : \Lambda \to \Gamma$ est propre, on a, pour chaque $E \subset \Lambda$, $\overline{\gamma(E)} \cap \Gamma = \gamma(\overline{E} \cap \Lambda)$, donc $\overline{\gamma(E)} \setminus \gamma(\overline{E}) \subset \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$; par conséquent, $\beta(\Lambda) \subset \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$. Soit Γ_1 un membre de $\mathcal{N}$, contenu dans $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$; il suffit donc de prouver que $\beta(\Lambda) \cap \Gamma_1$ est ouvert et fermé dans Γ_1. Soit $a \in \Gamma_1$. On a

$$(*) \qquad \gamma^{-1}(a) = \{(\eta_1)_a, \dots, (\eta_s)_a\}$$

avec $\eta_i \in \mathcal{H}$ et on peut exiger que η_i soient des sous-fermés d'un voisinage p. 48
normal Q_a pour le système S_a engendré en a. Alors la variété $\mathcal{F}_a = \gamma^{-1}(Q_a)$ correspond à S_a et Q_a. Vérifions que chaque Λ_{η_i} est fermé dans $\mathcal{F}_a$: si $\xi \in \overline{\Lambda_{\eta_i}} \cap \mathcal{F}_a$, on a $\xi = \eta_x$ avec $x \in \eta \in \mathcal{H}$ et η connexe et contenu dans Q_a ; alors $\Lambda_\eta \cap \Lambda_{\eta_i} \neq \emptyset$, donc $\eta_c = (\eta_i)_c$ pour un $c \in \eta \cap \eta_i$, d'où (lemme 2) $\eta \subset \eta_i$ et $\xi = \eta_x = (\eta_i)_x \in \Lambda_{\eta_i}$. Par conséquent, $\Theta = \Lambda_{\eta_1} \cup \dots \cup \Lambda_{\eta_s}$ est fermé et ouvert dans $\mathcal{F}_a$. Maintenant, il suffit de prouver que

$$Q_a \cap \beta(\Lambda) = \emptyset \quad \text{ou} \quad \Gamma_1^* = \Gamma_1 \cap Q_a \subset \beta(\Lambda)$$

(comme ceci montrera que $\Gamma_1 \setminus \beta(\Lambda)$ et $\Gamma_1 \cap \beta(\Lambda)$ sont ouverts dans Γ_1). Or, il en est ainsi suivant les cas :

Cas 1, où $\Lambda \cap \mathcal{F}_a \subset \Theta$. L'application $\gamma_\Theta : \Theta \to Q_a$ est propre, comme η_i sont fermés dans Q_a et comme $\gamma_{\Lambda_{\eta_i}} : \Lambda_{\eta_i} \to \eta_i$ sont des homéomorphismes. Il s'ensuit que pour chaque $E \subset \Lambda$, $\overline{\gamma(E \cap \mathcal{F}_a)} \setminus \gamma(\overline{E}) = \emptyset$, mais $\gamma(E \cap \mathcal{F}_a) = \gamma(E \cap \gamma^{-1}(Q_a)) = Q_a \cap \gamma(E)$ et $Q_a \cap \overline{Q_a \cap \gamma(E)} = Q_a \cap \overline{\gamma(E)}$, donc $Q_a \cap \overline{\gamma(E)} \setminus \gamma(\overline{E}) = \emptyset$; par conséquent, $Q_a \cap \beta(\Lambda) = \emptyset$.

Cas 2, où $\Lambda\cap\mathcal{F}_a\backslash\Theta \neq \emptyset$. Prenons un $\beta \in \Lambda\cap\mathcal{F}_a\backslash\Theta$ et soit Γ^* la composante connexe de $b = \gamma(\beta)$ dans $\Gamma \cap Q_a$. Comme $\beta \in \Lambda_{\Gamma^*} \subset \Lambda_\Gamma$ et comme Λ est la composante connexe de β dans Λ_Γ, donc Λ contient la composante connexe Λ_* de β dans Λ_{Γ^*}. Il suffit de prouver que $\Gamma_1^* \subset \overline{\gamma(\Lambda_*)} \setminus \gamma(\overline{\Lambda_*})$, ou bien, comme (prop.8) $\Gamma_1^* \subset \overline{\Gamma^*} = \overline{\gamma(\Lambda_*)}$, que $\Gamma_1^* \cap \gamma(\overline{\Lambda_*}) = \emptyset$, puisque alors $\Gamma_1^* \subset \beta(\Lambda)$. Or, 1'ensemble $\overline{\Lambda_*} \cap \mathcal{F}_a$ est connexe et contient β, tandis que Θ, qui est ouvert et fermé, ne contient pas β, donc $\overline{\Lambda_*} \cap \mathcal{F}_a \cap \Theta = \emptyset$. Il en résulte $a \notin \gamma(\overline{\Lambda_*} \cap \mathcal{F}_a)$ comme, d'après $(*)$, $\gamma^{-1}(a) \subset \Theta$. Mais, en vertu de la
proposition 10, $\gamma(\overline{\Lambda_*} \cap \mathcal{F}_a)$ est une réunion des membres de la partition de p. 49
Q_a suivant S_a, donc, comme $a \in \Gamma^*$, on a $\Gamma_1^* \cap \gamma(\overline{\Lambda_*}) = \Gamma_1^* \cap \gamma(\overline{\Lambda_*} \cap \mathcal{F}_a) = \emptyset$.

Proposition 12. *Soit A réunion d'une sous-famille de $\mathcal{N}$. Alors le sous-«nsemble suivant de A :*

$$\begin{aligned} B \;=\; \{x \in A \;:\; & U \cap A \textit{ est une sous-variété analytique topographique} \\ & \textit{de dim. } \ell, \textit{ pour un voisinage } U \textit{ de } x\} \end{aligned}$$

est aussi réunion d'une sous-famille de $\mathcal{N}$.

Nous allons démontrer d'abord quelques lemmes.

Lemme 4. *Soit $\Lambda_0 \in \mathcal{L}$ et $\Omega = \bigcup\{\Lambda \in \mathcal{L} \;:\; \overline{\Lambda} \supset \Lambda_0\}$. Si $\eta'_a \in \Lambda_0$ avec $a \in \eta' \in \mathcal{H}$, on a $a \in \eta \subset \eta' \cap \gamma(\Omega)$ pour un $\eta \in \mathcal{H}$.*[17]

Démonstration, On peut choisir un $\eta \in \mathcal{H}$ tel que $a \in \eta \subset \eta'$ et que η soit un sous-fermé d'un voisinage normal Q_a pour le système S_a engendré en a ; soit $\mathcal{N}_a$ la partition normale correspondante. Alors η est réunion d'une sous-famille de $\mathcal{N}_a$. En effet, si $x \in \eta \cap \{H_\ell^{\ell-1} \neq 0\}$, alors x appartient à un membre $\Gamma^* \in \mathcal{N}_a$ de dim. ℓ, et (théorème des fonctions implicites pour $H_j^\ell = 0$) $\Gamma_x^* = \eta_x$, d'où (lemme 2) $\Gamma^* \subset \eta \cap \{H_\ell^{\ell-1} \neq 0\}$; ceci montre que l'ensemble $\eta \cap \{H_\ell^{\ell-1} \neq 0\}$ est réunion d'une sous-famille de $\mathcal{N}_a$; par conséquent, il en est de même (prop.6) avec son adhérence dans Q_a qui $= \eta$.

Reste à montrer que $\eta \subset \gamma(\Omega)$. Soit $x \in \eta$. On a donc $x \in \Gamma^* \subset \eta$ avec un $\Gamma^* \in \mathcal{N}_a$. Il s'ensuit que $\eta_x \in \Lambda_{\Gamma^*}$. Soit Γ le membre de $\mathcal{N}$ contenant Γ^* ;
l'ensemble $\Lambda_{\Gamma^*} \cap \Lambda_\eta$ est connexe (lemme 2) et contenu dans Λ_Γ, donc dans p. 50
la composante connexe Λ de Λ_Γ. Par conséquent $\eta_x \in \Lambda$; comme $a \in \Gamma^* \cap \eta$ on a (lemme 2) $\eta_a \in \overline{\Lambda_{\Gamma^*} \cap \Lambda_\eta}$, donc $\eta_a \in \overline{\Lambda}$, d'où (prop.10) $\Lambda_0 \subset \overline{\Lambda}$; il en résulte que $\eta_x \in \Omega$, d'où $x \in \gamma(\Omega)$, ce qui termine la démonstration.

[17] On montre que Ω est ouvert (dans $\mathcal{F}$).

Lemme 5. *Soit* $\Lambda_0 \in \mathcal{L}$ *et* $\Omega = \bigcup\{\Lambda \in \mathcal{L} \ : \ \overline{\Lambda} \supset \Lambda_0\}$*. Si un point* a *de* $\Gamma_0 = \gamma(\Lambda_0)$ *possède un voisinage* U *tel que* $U \cap \gamma(\Omega) \in \mathcal{H}$*, alors il en est de même avec chaque point de* Γ_0*.*

Démonstration. Soit $a \in \Gamma_0$. Posons $\mathcal{K} = \{\Lambda \in \mathcal{L} \text{ de dim. } \ell \ : \ \overline{\Lambda} \supset \Lambda_0\}$. Il suffit de prouver que :

$$\begin{array}{c} U \cap \gamma(\Omega) \in \mathcal{H} \\ \text{pour un voisinage } U \text{ de } a \end{array} \iff \begin{cases} 1) & \gamma_{\Lambda_0} : \Lambda_0 \to \Gamma_0 \text{ est d'ordre } 1, \\ 2) & \Gamma_0 \cap \gamma(\overline{\Lambda} \setminus \Lambda_0) = \emptyset \text{ pour } \Lambda \in \mathcal{K}, \\ 3) & \Gamma_0 \cap \beta(\Lambda) = \emptyset \text{ pour } \Lambda \in \mathcal{K}. \end{cases}$$

puisque les conditions 1), 2), 3) ne dépendent pas de a.

($\Longrightarrow$) On peut exiger que U soit ouvert et que η soit fermé dans U. Posons $\eta = U \cap \gamma(\Omega)$; on a donc $a \in \eta \in \mathcal{H}$. 0r, $\mathcal{K} \neq \emptyset$; en effet, pour tout $\Gamma \in \mathcal{N}$ de dim. $< \ell$, l'ensemble $\Gamma \cap \eta$ est rare dans η[18], donc $\gamma(\Omega) \cap \eta = \eta$ serait rare dans η, si $\mathcal{K} = \emptyset$. Vérifions que pour tout $\Lambda \in \mathcal{K}$, $\overline{\Lambda} \cap \gamma^{-1}(a)$ contient au plus un élément (η_a) : soit $\eta'_a \in \overline{\Lambda}$ avec $a \in \eta' \in \mathcal{H}$, où on peut exiger que η' soit connexe et contenu dans U ; on a alors $\Lambda \cap \Lambda_{\eta'} \neq \emptyset$, donc $\eta'_x = \Gamma_x$ pour un p. 51
$x \in \Gamma \cap \eta'$, où $\Gamma = \gamma(\Lambda)$, mais $\Gamma_x = \eta_x$, comme $x \in \Gamma \cap U$ et $\Gamma \cap U$ est un sous-ouvert de η (cf. note 13), donc $\eta'_x = \eta_x$, d'où (lemme 2) $\eta' \subset \eta$ et, par conséquent $\eta'_a = \eta_a$.

Ceci donne 1) et 2). En effet, prenons un $\Lambda \in \mathcal{K}$; alors $\gamma^{-1}_{\Lambda_0}(a) = \Lambda_0 \cap \gamma^{-1}(a)$ contient au plus un élément, d'où 1). Quant à 2), si l'on suppose le contraire pour un $\Lambda \in \mathcal{K}$, on a (prop.10) $\Gamma_0 \subset \gamma(\overline{\Lambda} \setminus \Lambda_0)$, d'où $a = \gamma(\alpha)$ avec $\alpha \in \overline{\Lambda} \setminus \Lambda_0$, mais $a = \gamma(\alpha_0)$ avec $\alpha_0 \in \Lambda_0 \subset \overline{\Lambda}$, ce qui est impossible car $\overline{\Lambda} \cap \gamma^{-1}(a)$ contient au plus un élément.

Montrons enfin 3). En supposant le contraire pour un $\Lambda \in \mathcal{K}$, on a (prop.11), $\Gamma_0 \subset \beta(\Lambda)$ d'où $a \in \beta(\Lambda)$. Par conséquent, $a \in \overline{\gamma(E)} \setminus \gamma(\overline{E})$ pour un $E \subset \Lambda$. On a alors $\eta_a \notin \overline{E}$, donc $\Lambda_{\eta'} \cap E = \emptyset$, où $\eta' = \eta \cap U'$ avec un voisinage ouvert $U' \subset U$ de a. D'autre part, on a

$$\emptyset \neq U' \cap \gamma(E) = U' \cap \gamma(\Omega) \cap \gamma(E) = \eta' \cap \gamma(E) \ ,$$

d'où $\Gamma_x \in E$ avec un $x \in \eta' \cap \Gamma$, où $\Gamma = \gamma(\Lambda)$; mais $\Gamma_x = \eta'_x$, comme on a $\gamma \cap V \subset \gamma(\Omega) \cap U' = \eta'$ pour un voisinage ouvert $V \subset U'$ de x (cf. note 13), donc $\eta'_x \in E \cap \Lambda_\eta$, ce qui donne contradiction.

($\Longleftarrow$). D'après le lemme 4, on a $\eta_a \in \Lambda_0$ avec $a \in \eta \in \mathcal{H}$ et $\eta \subset \gamma(\Omega)$. II suffit de prouver que si $\Gamma = \gamma(\Lambda)$ avec un $\Lambda \in \mathcal{L}$ tel que $\overline{\Lambda} \supset \Lambda_0$, on a

[18] Comme $\pi_\eta : \eta \to \pi(\eta)$ est un homéomorphisme, et $\pi(\Gamma \cap \eta)$ est rare dans $\pi(\eta)$.

$U\cap(\Gamma\setminus\eta)=\emptyset$ pour un voisinage U de a. En effet, on a alors $U_0\cap(\gamma(\Omega)\setminus\eta)=\emptyset$ avec un voisinage ouvert U_0 de a, d'où $U_0\cap\gamma(\Omega)\subset\eta$, ce qui donne $U_0\cap\gamma(\Omega)=U_0\cap\eta\in\mathcal{H}$.

Soit donc, $\Gamma=\gamma(\Lambda)$ avec $\Lambda\in\mathcal{L}$, $\overline{\Lambda}\supset\Lambda_0$. Supposons d'abord, que p. 52
$\dim\Lambda=\ell$. Comme $\gamma_{\Lambda_0}:\Lambda_0\to\Gamma_0$ est un homéomorphisme local, $\gamma(\Lambda_\eta\cap\Lambda_0)$ est un voisinage de a dans Γ_0, c'est-à-dire on a $\gamma(\Lambda_\eta\cap\Lambda_0)=\Gamma_0\cap V$ avec un voisinage V de a. Comme, d'après 1), γ_{Λ_0} est injective, il s'ensuit que $\gamma(\Lambda_0\setminus\Lambda_\eta)\cap\gamma_0\cap V=\emptyset$. Il en résulte

$$V\cap\Gamma_0\cap\gamma(\overline{\Lambda\setminus\Lambda_\eta})\subset V\cap\Gamma_0\cap\gamma(\overline{\Lambda}\setminus\Lambda_\eta)\subset V\cap\Gamma_0\cap\gamma(\overline{\Lambda}\setminus\Lambda_0)\ ,$$

(car $\overline{\Lambda}\setminus\Lambda_\eta\subset(\overline{\Lambda}\setminus\Lambda_0)\cup(\Lambda_0\setminus\Lambda_\eta)$), d'où, d'après 2), $V\cap\Gamma_0\cap\gamma(\overline{\Lambda\setminus\Lambda_\eta})=\emptyset$. Selon 3), $\Gamma_0\cap(\overline{\gamma(\Lambda\setminus\Lambda_\eta)}\setminus\gamma(\overline{\Lambda\setminus\Lambda_\eta}))=\emptyset$, et on a

$$\begin{aligned} V\cap\Gamma_0\cap\overline{\Gamma\setminus\eta} &\subset V\cap\Gamma_0\cap\overline{\gamma(\Lambda\setminus\Lambda_\eta)} \\ &\subset V\cap\Gamma_0\cap\left[(\overline{\gamma(\Lambda\setminus\Lambda_\eta)}\setminus\gamma(\overline{\Lambda\setminus\Lambda_\eta}))\cup\gamma(\overline{\Lambda\setminus\Lambda_\eta})\right]\ , \end{aligned}$$

donc $V\cap\Gamma_0\cap\overline{\Gamma\setminus\eta}=\emptyset$; par conséquent, $a\notin\overline{\Gamma\setminus\eta}$, d'où $U\cap(\Gamma\setminus\eta)=\emptyset$ avec un voisinage U de a.

Passons maintenant au cas général. Notons $\mathcal{K}_1$ l'ensemble de $\Gamma_1=\gamma(\Lambda_1)$ avec $\Lambda_1\in\mathcal{L}$, $\overline{\Lambda_1}\supset\Lambda_0$; on a donc $\gamma(\Omega)=\bigcup\{\Gamma_1\in\mathcal{K}_1\}$. Comme $\eta_a\in\overline{\Lambda}$, on a $\Lambda_\eta\cap\Lambda\neq\emptyset$, d'où $\eta\cap\Gamma\neq\emptyset$. Prenons un $c\in\eta\cap\Gamma$. On a alors $c\in\overline{\Gamma_1}$, pour un $\Gamma_1\in\mathcal{K}_1$ de dim. ℓ. Sinon, il existerait un voisinage η_0 de c dans η qui n'intersecte aucun $\Gamma_1\in\mathcal{K}_1$ de dim. ℓ, donc, comme $\eta_0\subset\bigcup\{\Gamma_1\in\mathcal{K}_1\}$ on aurait $\eta_0\subset\bigcup\{\Gamma_1\in\mathcal{K}_1\ :\ \dim\Gamma_1<\ell\}$ ce qui n'est pas possible, parce que $\Gamma_1\cap\eta_0$ est rare dans η_0 si $\dim\Gamma_1<\ell$. On a donc (prop.6) $\Gamma\subset\overline{\Gamma_1}$; mais on a déjà montré que $U\cap(\Gamma_1\setminus\eta)=\emptyset$ avec un voisinage (ouvert, comme on peut toujours exiger) U de a, donc on a $U\cap(\Gamma\setminus\eta)=\emptyset$, ce qui termine la démonstration.

Lemme 6. *Soient A, B réunions des sous-familles de $\mathcal{N}$ et soit $\Gamma_0\in\mathcal{N}$. Si $A_c=B_c$ pour un $c\in\Gamma_0$, alors $A_x=B_x$ pour chaque $x\in\Gamma_0$.* p. 53

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} A^1 &= \bigcup\{\Gamma\in\mathcal{N}\ :\ \Gamma\subset A,\ \overline{\Gamma}\supset\Gamma_0\}\ , \\ B^1 &= \bigcup\{\Gamma\in\mathcal{N}\ :\ \Gamma\subset B,\ \overline{\Gamma}\supset\Gamma_0\}\ ; \end{aligned}$$

on a alors $A_x = A^1_x$ et $B_x = B^1_x$ pour chaque $x \in \Gamma_0$. Supposons que $A_c = B_c$; on a donc $A \cap U = B \cap U$ pour un voisinage U de c. Si $\Gamma \in \mathcal{N}$, $\Gamma_0 \subset \overline{\Gamma}$ et $\Gamma \subset A$, on a $\Gamma \cap B \cap U = \Gamma \cap A \cap U \neq \emptyset$, d'où $\Gamma \subset B$; ceci montre que $A^1 \subset B^1$. Pareillement $B^1 \subset A^1$, donc $A^1 = B^1$, d'où $A_x = A^1_x = B^1_x = B_x$ pour chaque $x \in \Gamma_0$.

Démonstration de la proposition 12. Soit $\Gamma_0 \in \mathcal{N}$ et supposons que $\Gamma_0 \cap B \neq \emptyset$. Prenons $a \in \Gamma_0 \cap B$. Il existe donc un voisinage U_0 de a tel que $\eta' = U_0 \cap A$ soit une sous-variété analytique topographique de dim. ℓ. On a $\eta' \subset V^\ell \cup \cdots \cup V^0$. Sinon, on aurait $\eta' \cap \Gamma \neq \emptyset$ pour un $\Gamma \in \mathcal{N}$ de dim $> \ell$, donc $\Gamma \subset A$, d'où $\emptyset \neq \Gamma \cap U_0 \subset \eta'$, ce qui n'est pas possible[19]. Par conséquent, $\eta' \in \mathcal{H}$. Comme $\Gamma_0 \cap U_0 \subset \eta'$, on a $\eta'_a \in \Lambda_{\Gamma_0}$; soit Λ_0 la composante connexe de η'_a dans Λ_{Γ_0} et posons $\Omega = \bigcup\{\Lambda \in \mathcal{L} \ : \ \overline{\Lambda} \supset \Lambda_0\}$. D'après le lemme 4, on a $a \in \eta \subset \eta' \cap \gamma(\Omega)$ pour un $\eta \in \mathcal{H}$; on a ensuite $\eta = U \cap \eta'$ pour un voisinage $U \subset U_0$ de a, donc $\eta = U \cap A$. Montrons que $\eta = U \cap \gamma(\Omega)$. En effet, il suffit de vérifier que $U \cap \gamma(\Omega) \subset \eta$; si $\Gamma = \gamma(\Lambda)$ avec $\Lambda \in \mathcal{L}$, $\overline{\Lambda} \supset \Lambda_0$, on a $\Lambda \cap \Lambda_\eta \neq \emptyset$ (comne $\eta_a = \eta'_a \subset \overline{\Lambda}$) , donc $\Gamma \cap \eta \neq \emptyset$, d'où $\Gamma \subset A$; ceci donne $\gamma(\Omega) \subset A$, d'où $U \cap \gamma(\Omega) \subset \eta$.

Ainsi on a prouvé que $U \cap \gamma(\Omega) \in \mathcal{H}$ et que $A_a = \gamma(\Omega)_a$. Il en résulte des lemmes 5 et 6 que pour tout $x \in \Gamma_0$ on a $U' \cap \gamma(\Omega) \in \mathcal{H}$ avec un voisinage U' de x, et $A_x = \gamma(\Omega)_x$, d'où $A \cap U'' \in \mathcal{H}$ pour un voisinage U'' de x, c'est-à-dire p. 54
$x \in B$; ceci montre que $\Gamma_0 \subset B$, ce qui achève la démonstration.

13 [Un procédé d'élimination]

Nous allons définir certaines opérations qui joueront un rôle pareil à celui de l'élimination.

Lemme. *Soit $H(z,w) = w^k + A_1(z)w^{k-1} + \cdots + A_k(z)$ un polynôme aux coefficients A_j holomorphes dans un sous-ouvert Ω de $\mathbb{C}^p$, et soit $G(w_1, \ldots, w_k)$ une fonction symétrique holomorphe dans $\{|w_i| < \eta\}$; supposons que*

$$z \in \Omega,\ H(z,w) = 0 \Longrightarrow |w| < \eta \ .$$

Alors la fonction F définie pour $z \in \Omega$ par $F(z) = G(w^{(1)}, \ldots, w^{(k)})$, où $w^{(1)}, \ldots, w^{(k)}$ est la suite des racines de $H(z,w) = 0$, est holomorphe dans Ω.

[19] Alors la sous-variété $\pi(\eta')$ de dim. ℓ contiendrait l'ouvert $\pi(\Gamma \cap U_0)$ de $\mathbb{R}^j$ où $j = \dim \Gamma$ et $\pi : (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_j)$.

Démonstration. On a $G(w_1, \ldots, w_k) = \sum a_{\nu_1,\ldots,\nu_k} w_1^{\nu_1} \cdots w_k^{\nu_k}$, la série étant normalement convergente[20] dans chaque $\{|w_i| < \overline{\eta}\}$ avec $\overline{\eta} < \eta$. Comme G est symétrique, on a $a_{\nu_{\pi_1},\ldots,a_{\nu_{\pi_k}}} = a_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$ pour chaque permutation $i \mapsto \pi_i$ de $\{1, \ldots, k\}$; par conséquent $S_n(w_1, \ldots, w_k) = \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_k \leq n} a_{\nu_1,\ldots,\nu_k} w_1^{\nu_1} \cdots w_k^{\nu_k}$ sont des polynômes symétriques, donc

$$S_n(w_1, \ldots, w_k) = P_n(\sigma_1(w_1, \ldots, w_k), \ldots, \sigma_k(w_1, \ldots, w_k))$$

où P est un polynôme et σ_i est le polynôme symétrique élémentaire d'ordre i, $(i = 1, \ldots, k)$. Soit Ω_0 un sous-ouvert borné de Ω tel que $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$; l'ensemble $\{(z, w) \in \overline{\Omega_0} \times \mathbb{C} \;:\; H(z, w) = 0\}$ étant compact, il existe un $\overline{\eta} < \eta$ tel que pour chaque $z \in \Omega_0$ les racines $w^{(1)}, \ldots, w^{(k)}$ de $H(z, w) = 0$ vérifient $|w^{(i)}| < \overline{\eta}$; par conséquent,

$$\begin{aligned} P_n(-A_1(z), \ldots, (-1)^k A_k(z)) &= P_n(\sigma_1(w^{(1)}, \ldots, w^{(k)}), \ldots, \sigma_k(w^{(1)}, \ldots, w^{(k)})) \\ &= S_n(w^{(1)}, \ldots, w^{(k)}) \end{aligned}$$

converge vers $G(w^{(1)}, \ldots, w^{(k)}) = F(z)$ uniformément dans Ω_0. Ceci montre p. 55
que $F(z)$ est holomorphe dans Ω, C.Q.F.D..

Soient maintenant $H_j(z, w) = w^{k_j} + A_1^{(j)}(z) w^{k_j - 1} + \cdots + A_{k_j}^{(j)}(z)$, $j = 1, \ldots, q$, des polynômes aux coefficients holomorphes dans un sous-ouvert Ω de $\mathbb{C}^p$ et soit $F(u, w_1, \ldots, w_q)$ une fonction holomorphe dans $G \times \{|w_i| < \eta\}$ où G est un sous-ouvert de $\mathbb{C}^r$; supposons que

$$z \in \Omega,\; H_j(z, w) = 0 \Longrightarrow |w| < \eta,\; (j = 1, \ldots, q)\;.$$

Soit γ une fonction symétrique holomorphe dans $\mathbb{C}^k$, où $k = k_1 \cdots k_q$. Alors la fonction Φ définie pour $(z_1, \ldots, z_q, u) \in \Omega^q \times G$ par

$$(*) \qquad \Phi(z_1, \ldots, z_q, u) = \gamma\left(\{F(u, w_1^{(\nu_1)}, \ldots, w_q^{(\nu_q)})\}_{\nu_1 = 1,\ldots,k_1; \ldots; \nu_q = 1, \ldots, k_q}\right)$$

où $w_j^{(1)}, \ldots, w_j^{(k_j)}$ est la suite des racines de $H_j(z_j, w) = 0$, $j = 1, \ldots, q$

est holomorphe dans $\Omega^q \times G$. En effet, d'après le lemme, Φ est holomorphe par rapport à chaque variable et, de plus, localement bornée, donc holomorphe.

Observons que si $H_1, \ldots, H_q$, F, γ sont "réelles" (et si Ω, G sont symétriques (par rapport à $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^r$ respectivement)), il en est de même avec Φ.

[20] C'est-à-dire, la somme des suprema des valeurs absolues des termes est finie.

En effet, comme alors $\overline{w_j^{(1)}}, \dots, \overline{w_j^{(k_j)}}$ est la suite des racines de $H_j(\overline{z_j}, w) = 0,\ (j = 1, \dots, q)$, on a

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}(z_1, \dots, z_q, u) &= \overline{\gamma\left(\{F(\overline{u}, \overline{w_1^{(\nu_1)}}, \dots, \overline{w_q^{(\nu_q)}})\}\right)} \\ &= \gamma\left(\{F(u, w_1^{(\nu_1)}, \dots, w_q^{(\nu_q)})\}\right) = \Phi(z_1, \dots, z_q, u)\ .\end{aligned}$$

11 en résulte que si $H_1, \dots, H_q$ sont des polynômes distingués réels (aux co- p. 56
efficients analytiques dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^p$), si F est analytique réelle dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$, et si γ est un polynôme symétrique réel de $k = k_1 \cdots k_q$ variables, alors la formule $(*)$ définit une fonction analytique réelle dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r$; plus précisément, F admet une extension (notée ici avec la même lettre F) d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ sur un voisinage $U \times \{|w_i| < \eta\}$ de 0 dans $\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^q$, holomorphe par rapport à w, et continue ; ensuite, pour un voisinage Q de 0 dans $\mathbb{R}^p$ on a $z \in Q,\ H_i(z, w) = 0 \Rightarrow |w| < \eta$; alors $(*)$ définit Φ analytique dans $Q^q \times U$.

Soit M une variété analytique réelle de dim. p[21], et soit $a \in M$. Un la note
polynôme distingué en a est un polynôme $H(x,t) = t^k + c_1(x)t^{k-1} + \cdots + c_k(x)$ occupe
avec c_j analytiques dans un voisinage de a et tels que $c_j(a) = 0,\ j = 1, \dots, k$. la p. 57
Le discriminant $D(x) = D_k(c_1(x), \dots, c_k(x))$ est une fonction analytique dans

[21]**Remarque.** Une variété analytique réelle M de dim. r est un espace topologique séparé avec une famille des fonctions réelles, appelées analytiques, chacune définie dans un sous-ouvert de M, qui admet un "système analytique de cartes" $\{g^\iota\}$, c'est-à-dire $g^\iota = (g_1^\iota, \dots, g_r^\iota) : \Omega_\iota \to G_\iota$ est un homéomorphisme d'un sous-ouvert Ω_ι de M sur un sous-ouvert G_ι de $\mathbb{R}^r$, $M = \bigcup \Omega_\iota$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ (avec $\Omega \subset M$ ouvert) est analytique si et seulement si $\varphi \circ (g^\iota)^{-1}$ est analytique pour chaque ι. On dit alors que la structure d'une variété analytique sur M est donnée par $\{g^\iota\}$. (En particulier la structure analytique naturelle sur un espace affine par système d'un élément : système de coordonnées affines quelconque). Soit N une autre variété analytique réelle, soit $\{h^\eta\}$ un système analytique de cartes pour N ; $f : M \to N$ s'appelle analytique si toutes les $h^\eta \circ f \circ (g^\iota)^{-1}$ sont analytiques (cette condition ne dépend pas des systèmes de cartes) ; f est isomorphisme $\Leftrightarrow$ f est bijection bianalytique. Si G est un sous-ouvert de M, la structure d'une variété analytique induite sur G est la topologie induite avec la famille des restrictions. Si $a \in M$, une carte de a est un isomorphisme d'un voisinage ouvert de a sur un sous-ouvert de $\mathbb{R}^r$; la collection de toutes les cartes est un système analytique de cartes, maximal. La structure d'une variété analytique sur $M \times N$ est donnée par $\{(g^\iota, h^\eta)\}$. Une sous-variété analytique L de dim. s de M est un sous-ensemble de M tel que chaque $a \in L$ possède une carte (de a) $g : \Omega \to G$ telle que $g(\Omega \cap L)$ est un sous-ouvert de $\mathbb{R}^s \times \{0\}$; elle est munie de la structure induite : la topologie induite avec la famille des restrictions.

un voisinage de a. Si f est une fonction analytique dans un voisinage de $(a, 0)$ dans $M \times \mathbb{R}$ tel que $f(a, t) \not\equiv 0$ au voisinage de 0, il existe un polynôme distingué en a, H, associé à f, c'est-à-dire tel que $H(g^{-1}(\xi), t)$ soit associé à $f(g^{-1}(\xi), t)$ pour chaque carte g de a vérifiant $g(a) = 0$; alors le discriminant de H ne s'annule pas identiquement au voisinage de 0. p. 58

Soient maintenant $H_1, \ldots, H_q$ des polynômes distingués en a de degrés $k_1, \ldots, k_q$ respectivement, soit F une fonction analytique réelle au voisinage de $(b, 0)$ dans $N \times \mathbb{R}^q$ où $b \in N$ et N est une variété analytique réelle de dim. r ; Soit γ un polynôme symétrique réel de $k = k_1 \cdots k_q$ variables. En prenant une carte g de a avec $g(a) = 0$ et une carte h de b avec $h(b) = 0$ on vérifie que F admet une extension sur un voisinage $U \times \{|w_i| < \eta\}$ de $(b, 0)$ dans $N \times \mathbb{C}^q$, holomorphe par rapport à w, et continue, que alors, pour un voisinage Q de a dans M on a $z \in Q,\ H_i(z, w) = 0 \Rightarrow |w| < \eta$, et que alors, $(*)$ définit Φ analytique dans $Q^q \times U$[22].

En particulier, si H est un polynôme en a, de degré k, et si $F(u, t)$ est analytique dans un voisinage de $(b, 0)$ dans $N \times \mathbb{R}$ (on prend ici $q = 1$, $H_1 = H$, $k_1 = k$ et $\gamma(s_1, \ldots, s_k) = s_1 \cdots s_k$) la formule

$$\Pi_t^{H(z,t)} F(u, t) = F(u, t^{(1)}) \cdots F(u, t^{(k)})$$

où $t^{(1)}, \ldots, t^{(k)}$ est la suite dès racines de $H(z, t) = 0$, définit une fonction analytique $\Phi(z, u) = \Pi_t^{H(z,t)} f(u, t)$ dans un voisinage de (a, b) dans $M \times N$. On a alors :

$$H(g^{-1}(z), t) = F(h^{-1}(w), t) = 0 \Longrightarrow (\Pi^H F)(g^{-1}(z), h^{-1}(w)) = 0$$

pour les extensions holomorphes dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$.

Supposons maintenant que $M = N$, $a = b$ et prenons sucessivement $\gamma = \sigma_0, \ldots, \sigma_k$ où σ_i est le polynôme symétrique de $k = k_1 \cdots k_q$ variables, de degré i, $(i = 0, \ldots, k)$; soient $\Phi_0, \ldots, \Phi_k$, respectivement, des fonctions données par la formule $(*)$; notons avec p. 59

$$\sigma^{(H_1,\ldots,H_q)} F \quad \text{ou} \quad \sigma_{w_1,\ldots,w_q}^{(H_1,\ldots,H_q)} F(z, w_1, \ldots, w_q)$$

la dernière fonction de la suite $\Phi_0(z, \ldots, z), \ldots, \Phi_k(z, \ldots, z)$ qui ne s'annule pas identiquement au voisinage de a. (Elle est donc une fonction analytique

[22]0n prend $H_j(g^{-1}(\xi), w)$, $F(h^{-1}(\eta), w_1, \ldots, w_q)$, alors (d'après le précédent) $\Phi(g^{-1}(\xi_1), \ldots, g^{-1}(\xi_q), h^{-1}(\eta))$ est analytique, et on observe que $(g, \ldots, g, h)$ est une carte de $(a, \ldots, a, b)$ dans $M^q \times N$

et définie par $(*)$ avec $\gamma = \sigma_p$ et $z_1 = \ldots = z_q = u = z$ dans un voisinage de a). Il résulte de la définition des polynômes symétriques élémentaires que si la valeur de $\sigma^{(H_1,\ldots,H_q)}F$ en x n'est pas nulle, elle est égale au produit de tous les $F(x, w_1^{(\nu_1)}, \ldots, w_q^{(\nu_q)})$ $(w_j^{(1)}, \ldots, w_j^{(k_j)}$ étant la suite des racines de $H_j(x,w) = 0)$ qui ne sont pas nulles.

Proposition. *Si $Q \times P$ est un voisinage (ouvert) suffisamment petit de $(a, 0) \in M \times \mathbb{R}^q$, $Z = \{(x, y) \in Q \times P \ : \ F(x, y) = 0\}$,*
$S = \{x \in Q \ : \ \sigma^{(H_1,\ldots,H_q)}F(x) = 0\}$, et $\pi : (x, y) \mapsto x$, alors S contient la projection de la frontière de $Z \cap C$ dans C :

$$\pi(Z \cap C \cap \overline{C \setminus Z}) \subset S \ .$$

Démonstration. On peut choisir un voisinage U de a et $\eta > 0$ tel que F soit continue et bornée dans $U \times \{|w_j| < \eta\}_{\text{compl.}}$, $x \in U$, $H(x, w) = 0 \Rightarrow |w| < \eta$, et $\sigma^{(H_1,\ldots,H_q)}F$ soit analytique et définie par $(*)$ dans U, Soit $Q \times P$ un voisinage (ouvert) de $(a, 0)$ contenu dans $U \times \{|w_j| < \eta\}_{\text{réel}}$. Supposons que $x \in Q \setminus S$. On a donc $|\sigma^{(H_1,\ldots,H_q)}F| > \delta$ dans un voisinage U_1 de x, avec un $\delta > 0$. Comme $\sigma^{(H_1,\ldots,H_q)}F$ est le produit des $F(x, w_1^{(\nu_1)}, \ldots, w_q^{(\nu_q)})$ non nuls, qui, de plus, restent bornés quand $x \in U_1$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $F(x, w_1^{(\nu_1)}, \ldots, w_q^{(\nu_q)})$ est nul ou $\geq \varepsilon$ lorque $z \in U_1$ $(w_j^{(1)}, \ldots, w_j^{(k_j)}$ p. 60
étant la suite des racines de $H_j(x, w) = 0)$. Par conséquent (continuité de F), si $(x, w_1, \ldots, w_q) \in Z \cap C$, on a $C \cap W_1 \subset Z$ avec un voisinage W_1 de $(x, w_1, \ldots, w_q)$, ce qui donne $(x, w_1, \ldots, w_q) \notin \overline{C \setminus Z}$, On a donc toujours $(x, w_1, \ldots, w_q) \notin Z \cap C \cap \overline{C \setminus Z}$ c'est-à-dire $x \notin \pi(Z \cap C \cap \overline{C \setminus Z})$. Ceci prouve notre inclusion.

14 [Construction d'un système normal]

Soit M une variété analytique réelle de dim. n et soit $a \in M$. On appelle *système normal* en a tout couple $\mathcal{S} = (g, S)$ où g est une carte de a vérifiant $g(a) = 0$ et $S = \{H_\ell^k\}_{0 \leq k < \ell \leq n}$ est un système normal de polynômes distingués. Un *voisinage normal* Q de a est l'image par g^{-1} d'un voisinage normal Q_0 pour S, tel que $\overline{Q} \subset$ source de g. La *partition normale* de Q suivant $\mathcal{S}$ est la collection des composantes connexes (appelées encore *membres* de la partition) des ensembles

$$V^k = \{x \in Q \ : \ \widehat{H}_n^{n-1} = \ldots = \widehat{H}_{k+1}^k = 0, \ \widehat{H}_k^{k-1} \neq 0\} \ , \quad k = 0, \ldots, n \ ,$$

où $\widehat{H}_j^i = H_j^i \circ g,\ 0 \le i < j \le n$; c'est l'image par g^{-1} de la partition normale de Q_0 suivant S ; on l'appelera aussi une partition normale en a.

Supposons que M est un espace vectoriel de dim. finie (muni de la structure de variété analytique naturelle). Nous allons donner une construction standard d'un système normal en 0 (avec g linéaire).

Soit Φ_n une fonction analytique $\not\equiv 0$ au voisinage de 0 dans M (donnée arbitrairement). Prenons un $e_n \in M \setminus \{0\}$, tel que $\Phi_n(te_n) \not\equiv 0$ au voisinage de 0, et prenons un sous-espace $M_{n-1} \subset M$ (de dim. $n-1$) tel que $M = M_{n-1} + \mathbb{R}e_n$ soit directe. Soit $H_n^{n-1}(u,t)$ le polynôme distingué en $0 \in M_{n-1}$ p. 61
associé à la fonction $(u,t) \mapsto \Phi_n(u + te_n)$, où (u,t) parcourt un voisinage de $(0,0)$ dans $M_{n-1} \times \mathbb{R}$.

Soit $0 < k < n$[23]. Etant construits des sous-espaces : $M = M_n \supset \ldots \supset M_k,\ \dim M_i = i$, des vecteurs : $e_j \in M_j \setminus M_{j-1},\ j = n, \ldots, k+1$ et des polynômes distingués : $\widetilde{H}_j^i$ en $0 \in M_i$ au discriminant $\widetilde{D}_j^i \not\equiv 0$ au voisinage de 0, $k \le i < j \le n$, soit Φ_k une fonction analytique $\not\equiv 0$ au voisinage de 0 dans M_k (donnée d'une manière qui peut dépendre de $M_n, \ldots, M_k, e_n, \ldots, e_{k+1}, \{\widetilde{H}_j^i\}_{k \le i < j \le n}$).

Posons $J_k = \widetilde{D}_{k+1}^k \cdots \widetilde{D}_n^k \Phi_k$, prenons un $e_k \in M_k \setminus \{0\}$ tel que $J_k(te_k) \not\equiv 0$ au voisinage de 0, et prenons un sous-espace $M_{k-1} \subset M_k$ (de dim. $k-1$) tel que $M_k = M_{k-1} + \mathbb{R}e_k$ soit directe. On prend pour $\widetilde{H}_k^{k-1}(v,t)$ le polynôme distingué en $0 \in M_{k-1}$ associé à la fonction $(v,t) \mapsto J_k(v + te_k)$, où (v,t) parcourt un voisinage de $(0,0)$ dans $M_{k-1} \times \mathbb{R}$. Alors la fonction $\Pi_\tau^{\widetilde{H}_k^{k-1}(v,\tau)} \widetilde{H}_j^k(v + \tau r_k, t)$ est analytique dans un voisinage $(0,0)$ dans $M_{k-1} \times \mathbb{R}$, vérifiant $\Pi_\tau^{\widetilde{H}_k^{k-1}(v,\tau)} \widetilde{H}_j^k(\tau r_k, t) \not\equiv 0$ au voisinage de 0, et on prend pour $\widetilde{H}_j^{k-1}$ le polynôme distingué en $0 \in M_{k-1}$ associé avec elle, $j = k+1, \ldots, n$.

Ainsi on a construit par récurrence $M = M_n \supset \ldots \supset M_0 = \{0\},\ e_j \in$ p. 62
$M_j \setminus M_{j-1},\ j = n, \ldots, 1$, et des polynômes distingués : $\widetilde{H}_j^i$ en $0 \in M_i$ au discriminant $\widetilde{D}_j^i \not\equiv 0,\ 0 \le i < j \le n$. On pose

$$H_j^i(x_1, \ldots, x_i; x_j) = \widetilde{H}_j^i(x_1 e_1 + \cdots + x_i e_i, x_j)$$

(au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}$), on prend

$$g : M \ni x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

[23]Formellement, on n'a pas besoin de distinguer le premier pas ($k = n$) des autres

et alors $(g, \{H_j^i\})$ est un système normal en 0.

En effet, pour les extensions holomorphes dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$, $H_k^{k-1}(z_1, \dots, z_k) = H_\ell^k(z_1, \dots, z_k; z_\ell) = 0$ entraîne que l'extension holomorphe de $\Pi^{\widetilde{H}_k^{k-1}} \widetilde{H}_\ell^k(x_1e_1 + \dots + x_{k-1}e_{k-1}, x_\ell)$ s'annule en $(z_1, \dots, z_{k-1}, z_\ell)$ et alors $H_\ell^{k-1}(z_1, \dots, z_{k-1}; z_\ell) = 0$, ce qui donne la propriété (1) ; ensuite, $D_\ell^k(z_1, \dots, z_k) = 0$ entraîne que l'extension holomorphe de $J_k(x_1e_1 + \dots + x_ke_k)$ s'annule en $(z_1, \dots, z_k)$ et alors $H_k^{k-1}(z_1, \dots, z_k) = 0$, ce qui donne la propriété (2).

Observons que $\widehat{H}_\ell^k(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = \widetilde{H}_\ell^k(x_1e_1 + \dots + x_ke_k, x_\ell)$, $0 \leq k < \ell \leq n$. On a $\Phi_n = 0 \Leftrightarrow \widehat{H}_n^{n-1} = 0$ au voisinage de 0 dans M et $\Phi_k = 0 \Rightarrow \widehat{H}_k^{k-1} = 0$ au voisinage de 0 dans M_k,

On appelera $\Phi_n, \dots, \Phi_1$ *facteurs* dans la construction ci-dessus.

Remarque 1. Etant donnés les facteurs (Φ_k en dépendence de $M_n, \dots, M_k$, $e_n, \dots, e_{k+1}$ et $\{\widetilde{H}_j^i\}_{k \leq i < j \leq n}$), dans chaque pas, e_k peut être arbitrairement choisi d'un sous-ensemble dense de M_k [24]. Si M est muni d'une structure euclidienne, $e_1, \dots, e_n$ peut être choisi de manière qu'il soit orthonormal.

Remarque 2. Soit f une fonction analytique $\not\equiv 0$ au voisinage d'un point a p. 63
d'une variété analytique réelle M. Alors il existe un système normal en a et un voisinage normal Q de a tels que $\{x \in Q \ : \ f(x) = 0\} = V^{n-1} \cup \dots \cup V^0$.

(En prenant un isomorphisme d'un voisinage de a dans M sur un voisinage de 0 dans un espace vectoriel (de la même dimension) on se réduit au cas où M est vectoriel et $a = 0$; alors on prend f pour le facteur Φ_n).

Soit M une variété analytique réelle. Soit f une fonction définie dans un voisinage de a ; on dira qu'une partition normale en a est *compatible* avec f, si $f \equiv 0$ ou $f \neq 0$ sur chaque membre (la source de f contenant le voisinage normal).

Proposition. *Soient $f_1, \dots, f_r$ des fonctions analytiques dans un voisinage d'un point $a \in M$. Alors il existe une partition normale en a, compatible avec chacune d'elles. Le voisinage normal Q peut être choisi arbitrairement petit.*

Démonstration. On peut admettre que M soit vectoriel, que $a = 0$, et que $f_i \not\equiv 0$ au voisinage de 0 (en supprimant toutes les $f_i \equiv 0$). Construisons un

[24] On voit aussi que $M_n \supset \ldots \supset M_0$ peut être choisi arbitrairement.

système normal en 0 en prenant les facteurs suivants :

$$\Phi_n = f_1 \cdots f_r \quad \text{et} \quad \Phi_k = \prod_{i=1}^{r} \sigma_{w_{k+1},\ldots,w_n}^{(\widetilde{H}_{k+1}^k,\ldots,\widetilde{H}_n^k)} f_i(v + w_{k+1}e_{k+1} + \cdots + w_n e_n)$$

où v parcourt un voisinage de 0 dans M_k, $k = n-1,\ldots,1$. Soit Q un voisinage normal. Exigeons que $\Phi_n = f_1 \cdots f_r$ dans Q ; alors comme $V^n = \{x \in Q : \Phi_n(x) \neq 0\}$, on a $f_i \neq 0$ sur chaque membre de dimension n. Soit maintenant $0 < k < n$ (le cas $k = 0$ est trivial), et fixons un $j = 1,\ldots,r$. Il p. 64
résulte de la proposition du N°13 (en utilisant l'isomorphisme $M_k \times \mathbb{R}^{n-k} \ni (v, w_{k+1},\ldots,w_n) \mapsto v + w_{k+1}e_{k+1} + \cdots + w_n e_n \in M$) que si l'on prend Q suffisamment petit, la frontière de l'ensemble $\{x \in Q : \widehat{H}_{k+1}^k = \ldots = \widehat{H}_n^k = f_i = 0\}$ dans l'ensemble $\{x \in Q : \widehat{H}_{k+1}^k = \ldots = \widehat{H}_n^k = 0\}$ est contenue dans $\{x \in q : \widehat{H}_k^{k-1} = 0\}$. Par conséquent, l'ensemble $T = \{x \in Q : f_i = 0\}$ est ouvert dans $C^k = \{x \in Q : \widehat{H}_{k+1}^k = \cdots = \widehat{H}_n^k = 0,\ \widehat{H}_k^{k-1} \neq 0\}$; comme T est en même temps fermé dans C^k, chaque composante connexe de C^k est contenue dans T ou disjointe avec T, ce qui montre la proposition, car (vu la remarque après la proposition 1 du N°11) chaque membre de dimension k est une composante connexe de C^k.

Remarque 3. Dans le cas où M est vectoriel et $a = 0$, soit $\mathcal{S}$ un système normal contruit en prenant les facteurs Φ_ν. Si $\sigma^{(\widetilde{H}_{k+1}^k,\ldots,\widetilde{H}_n^k)} f = 0 \Rightarrow \Phi_k = 0$ au voisinage de 0 dans M_k, alors $f \equiv 0$ ou $f \neq 0$ sur chaque membre de dim. k de la partition normale selon $\mathcal{S}$, de tout voisinage suffisamment petit. Si, pour chaque $i = 1,\ldots,r$ $f_i = 0 \Rightarrow \Phi_n = 0$ au voisinage de 0 dans M et $\sigma^{(\widetilde{H}_{k+1}^k,\ldots,\widetilde{H}_n^k)} f_i = 0 \Rightarrow \Phi_k = 0$ au voisinage de 0 dans M_k, $k = n-1,\ldots,1$, alors la partition normale de tout voisinage normal suffisamment petit de 0, selon $\mathcal{S}$, est compatible avec $f_1,\ldots,f_r$.

Remarque 4. Dans le cas où M est vectoriel et $a = 0$ on peut ajouter, dans la proposition, l'assertion de la remarque 1.

Remarque 5. Si F est analytique et $f_i = 0 \Rightarrow F = 0$ au voisinage de a, on peut exiger (dans la proposition) que l'on ait (remarque 2)
$\{x \in Q : F = 0\} = V^{n-1} \cup \cdots \cup V^0$. p. 65

Soient $\mathcal{N}', \mathcal{N}$ deux partitions normales en a ; on dira que $\mathcal{N}'$ est un *raffinement* de $\mathcal{N}$, si chaque membre de $\mathcal{N}'$ est contenu dans un membre de $\mathcal{N}$.

Soit $(g, \{H^i_j\}))$ un système normal en a et soit $\mathcal{N}$ la partition normale (suivant ce système) d'un voisinage normal Q de a ; soit $\mathcal{N}'$ une autre partition normale en a, compatible avec toutes les $\widehat{H}^i_j$; alors chaque membre de $\mathcal{N}'$ est contenu dans un V^k, d'où il résulte que $\mathcal{N}'$ est un raffinement de $\mathcal{N}$. On a donc :

Corollaire. *Chaque collection finie de partitions normales en a admet un raffinement commun, compatible avec des fonctions analytiques (au voisinage de a) données en nombre fini.*

15 [Ensembles semi-analytiques : définition et premières propriétés]

Soit M une variété analytique réelle. Pour chaque $a \in M$ notons avec Σ_a la plus petite famille de germes en a (de sous-ensembles de M) contenant tous les $\{f > 0\}_a$ avec f analytique au voisinage de a, et vérifiant

$$(\sharp) \qquad u, v \in \Sigma_a \Longrightarrow u \cup v,\ u \setminus v \in \Sigma_a$$

On voit donc que Σ_a est stable pour les opérations de la réunion et de l'intersection finies, et, comme $M \in \Sigma_a$, aussi pour l'opération du complément.

Un sous-ensemble E de M est dit *semi-analytique* si pour tout $a \in M$ on a $E_a \in \Sigma_a$. p. 66

Soit $U \subset M$ est soit $\mathcal{E}$ une famille des fonctions réelles définies dans U ; on dira qu'un sous-ensemble A de M est *décrit dans U par $\mathcal{E}$* si

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{q} A_{i,j}$$

avec $A_{i,j}$ de la forme $\{f > 0\}$ ou $\{f = 0\}$ ou $\{f < 0\}$, où $f \in \mathcal{E}$.

Un sous-ensemble E de M est semi-analytique si et seulement s'il est décrit dans un voisinage de chaque point de M par des fonctions analytiques dans ce voisinage ; ou encore, si et seulement si chaque point de M possède un voisinage U tel que

$$E \cap U = \bigcup_{i=1}^{p} \left(\bigcap_{j=1}^{q} \{g_{i,j} > 0\} \cap \{f_i = 0\} \right)$$

avec $g_{i,j}, f_i$ analytiques dans U.

En effet, l'équivalence des deux dernières conditions est claire, ainsi que la suffisance ; soit Σ'_a la famille de tous les germes de la forme $\bigcup_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{q} u_{i,j}$. avec $u_{i,j}$ de la forme $\{f > 0\}_a$ ou $\{f = 0\}_a$, où f est analytique au voisinage de a ; on voit que Σ'_a est contenue dans Σ_a et vérifie la condition ($\sharp$), donc $\Sigma_a = \Sigma'_a$, d'où il résulte la nécessité.

On peut toujours admettre que les fonctions qui décrivent localement un ensemble semi-analytique ne s'annulent pas identiquement.

Observons qu'il n'est pas toujours possible de donner localement un ensemble semi-analytique par un système d'inégalités simultanées larges ou strictes (par conséquent, il en est de même quant à un système d'inégalités en alternative [25]). Prenons par exemple, $E = \{x < 0\} \cup \{y < 0\} \subset \mathbb{R}^2$ et sup- p. 67
posons que pour un voisinage U de 0 on a $E \cap U = \bigcap_{i=1}^{p} A_i$ avec A_i de la forme $\{f_i \geq 0\}$ ou $\{f_i > 0\}$, où f_i soit analytique dans U. On peut supprimer tous les $f_i \equiv 0$. Soit g_i la partie homogène de degré minimal du développement de f_i en 0 qui ne s'annule pas identiquement ; or, dans la variété des droites par 0, l'ensemble $\mathcal{L}$ de celles sur lesquelles $g_i \not\equiv 0$, $i = 1, \ldots, p$, est dense. Prenons une $\ell \in \mathcal{L}$ telle que $\ell \setminus \{0\} \subset \{xy < 0\}$; on a forcement $g_i > 0$ sur $\ell \setminus \{0\}$, d'où g_i sont de degré pair ; prenons ensuite une $\ell \in \mathcal{L}$ telle que $\ell \setminus \{0\} \subset \{xy > 0\}$; on a alors $g_i > 0$ sur $\ell \setminus \{0\}$, d'où $f_i > 0$ sur $\ell \setminus \{0\}$ dans un voisinage de 0, ce qui n'est pas possible.

Voilà une liste de propriétés triviales (par rapport à la définition ci-dessus) des ensembles semi-analytiques.

Le complémentaire d'un ensemble semi-analytique est semi-analytique. L'intersection d'une famille finie d'ensembles semi-analytiques est semi-analytique. La réunion d'une famille localement finie d'ensembles semi-analytiques est semi-analytique.

Soit N une variété analytique réelle. Si E est semi-analytique dans M et F est semi-analytique dans N alors $E \times F$ est semi-analytique dans $M \times N$.

Soit $g : M \to N$ une application analytique. Si F est semi-analytique dans N, alors $g^{-1}(F)$ est semi-analytique dans M.

Soit N une sous-variété analytique de M et soit $E \subset N$. Si E est p. 68

[25] On prend le complémentaire

semi-analytique dans M, il est aussi semi-analytique dans N. Si E est semi-analytique dans N et si $\overline{E} \subset N$ (l'adhérence dans M) , alors E est semi analytique dans M.

Soit $E \subset M$; si chaque point de M possède un voisinage U tel que $E \cap U$ est semi-analytique dans U, alors E est semi-analytique dans M.

Observons encore que les sous-ensembles semi-analytiques de $\mathbb{R}$ sont précisément les réunions disjointes et localement finies d'intervalles.

16 [Partitions normales et ensembles semi-analytiques]

Soit M une variété analytique réelle. On dira qu'une partition normale $\mathcal{N}$ d'un $Q \subset M$ est *compatible avec un sous-ensemble E de M*, si $E \cap Q$ est la réunion d'une sous-famille de $\mathcal{N}$, c'est-à-dire si l'on a $\Gamma \subset E$ ou $\Gamma \cap E = \emptyset$ pour chaque $\Gamma \in \mathcal{N}$. La proposition du N° 14 entraîne :

Théorème 1. *Quels que soient $E_1, \ldots, E_p$ semi-analytiques dans M et $a \in M$, il existe une partition normale en a, compatible avec $E_1, \ldots, E_p$. Le voisinage normal peut être arbitrairement petit.*

En effet, dans un voisinage suffisamment petit U de a les E_i sont décrits par $f_1, \ldots, f_r$ analytiques dans U ; il suffit de prendre une partition normale en a d'un $Q \subset U$, compatible avec $f_1, \ldots, f_r$.

Par conséquent, la remarque 1 du N° 14 reste ici valable.

Nous allons démontrer le suivant.

Théorème 2. *Toute composante connexe d'un ensemble semi-analytique est semi-analytique.* p. 69

En particulier, les membres d'une partition normale sont semi-analytiques.

Les théorèmes 1 et 2 entraînent facilement

Théorème 3. *Pour qu'un sous-ensemble E de M soit semi-analytique il faut et il suffit que en chaque point $a \in M$ il existe une partition normale compatible avec E.*

Lemme de Thom. *Soit P un polynôme d'une variable réelle, de degré n* [26]. *Alors chaque ensemble*

$$\Delta = \bigcap_{\nu=0}^{n} \{P^{(\nu)}(x) \in \theta_\nu\} \ ,$$

$$\textit{où } \theta_\nu = \{x > 0\} \textit{ soit } \{0\} \textit{ soit } \{x < 0\} \ , (\nu = 0, \ldots, n) \ ,$$

est connexe : soit un intervalle ouvert, soit réduit à un point, soit vide.

Démonstration. L'assertion étant évidente pour $n = 0$, supposons la vraie pour $n - 1$ avec un $n > 0$, et appliquons la à P'. On a

$$\Delta = \{P(x) \in \theta_1\} \cap \Delta_1 \ , \ \text{où } \Delta = \bigcap_{\nu=1}^{n} \{P^{(\nu)}(x) \in \theta_\nu\} \ ;$$

les cas où Δ_1 est vide ou réduit à un point étant triviaux, supposons que Δ_1 est un intervalle ouvert ; on a alors $P'(x) \neq 0$ dans Δ_1, donc P est strictement monotone dans Δ_1, d'où $\Delta = \{x \in \Delta_1 : P > 0\}$ soit $\Delta = \{x \in \Delta_1 : P = 0\}$ soit $\Delta = \{x \in \Delta_1 : P < 0\}$ est comme l'affirme la thèse du lemme.

Démonstration du théorème 2. Observons d'abord que l'assertion suivante pour M : p. 70

> *quels que soient un sous-ensemble semi-analytique E de M et un $a \in M$, il existe une partition normale en a, compatible avec E, dont les membres sont semi-analytiques,*

entraîne le théorème 2 pour M. En effet, soit E un sous-ensemble semi-analytique de M et soit F une composante connexe de E. Prenons un $a \in M$ quelconque et une partition normale $\mathcal{N}$ d'un Q en a selon l'assertion. Alors, pour chaque $\Gamma \in \mathcal{N}$, $\Gamma \cap F \neq \emptyset$ entraîne $\Gamma \subset E$ et (connexité de Γ) $\Gamma \subset F$; ceci montre que $\mathcal{N}$ est compatible avec F, d'où $Q \cap F$ est semi-analytique. Par conséquent, F est semi-analytique.

Soit $n = \dim M$. L'assertion étant triviale pour $n = 1$, admettons la vraie pour $n - 1$ avec un $n > 1$. Ceci entraîne donc la validité du théorème 2 pour $n - 1$.

Il en résulte que si $\mathcal{N}$ est la partition normale d'un $\{|x_i| < \delta_i, \ i = 1, \ldots, n\}$ selon un système normal de polynômes distingués $\{H^i_j\}_{0 \leq i < j \leq n}$, $\mathcal{N}_1$ – celle de

[26] ou, plus généralement, une fonction $\mathcal{C}^n$ dont la n-ième dérivée ne s'annule pas.

$\{|x_i| < \delta_i,\ i = 1, \ldots, n-1\}$ selon $\{H^i_j\}_{0 \leq i < j \leq n-1}$, et si $\Gamma_* \in \mathcal{N}$ est de dim. $\leq n-2$, alors les composantes connexes des ensembles

(∗)

$$\{x \in \Gamma_* \times \{|x_n| < \delta_n\} : H^{n-1}_n = 0\} \quad \text{et} \quad \{x \in \Gamma_* \times \{|x_n| < \delta_n\} : H^{n-1}_n \neq 0\}$$

sont semi-analytiques. Observons que celles du premier sont les membres de $\mathcal{N}$ de la même dim. que Γ_* qui se projettent sur Γ_*, ce qui entraîne que chaque membre de $\mathcal{N}$ de dim. $\leq n-2$ est semi-analytique ; le nombre de composantes connexes du second est fini[27].

Pour vérifier ceci observons que, comme $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-2})$ p. 71
applique homéomorphiquement Γ_* sur un membre Γ_{**} de la partition normale de $\{|x_i| < \delta_i,\ i = 1, \ldots, n-2\}$ suivant $\{H^i_j\}_{0 \leq i < j \leq n-2}$, l'application :

$$\begin{aligned} p : \Psi_* = \Gamma_* \times \{|x_n| < \delta_n\} \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \\ \longmapsto (x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n) \in \Psi_{**} = \Gamma_{**} \times \{|x_n| < \delta_n\} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. Or, $\{H^j_i\}_{i<j,\ i,j=0,\ldots,n-2,n}$ est un système normal, $\{|x_i| < \delta_i,\ i = 1, \ldots, n-2, n\}$ – un voisinage normal ; soit $\mathcal{N}_2$ la partition normale correspondante. Les composantes connexes de $\{u \in \Psi_{**} : H^{n-2}_n = 0\}$ sont les membres de $\mathcal{N}_2$ de la même dimension que Γ_{**} qui se projettent sur Γ_{**}. Vu le corollaire de la proposition 2 et 3 du N° 11, on observe que chaque membre de $\mathcal{N}$ de dim $\leq n-2$ se projette par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n)$ sur un membre de $\mathcal{N}_2$ (de la même dimension). Par conséquent, l'image par p de chaque composante connexe de $\{x \in \Psi_* : H^{n-1}_n = 0\}$ est une composante connexe de $\{x \in \Psi_{**} : H^{n-2}_n = 0\}$. Il en résulte que, si l'on note avec $\mathcal{C}$ la famille de toutes les composantes connexes des ensembles $\{u \in \Psi_{**} : H^{n-2}_n = 0\}$ et $\{u \in \Psi_{**} : H^{n-2}_n \neq 0\}$, pour chaque $A \in \mathcal{C}$, $p^{-1}(A)$ est contenu soit dans le premier soit dans le second des ensembles (∗) ; par conséquent, les composantes connexes des ensembles (∗) sont réunions de certains $p^{-1}(A)$ avec $A \in \mathcal{C}$. Comme Γ_* et Γ_{**} sont semi-analytiques, il en est de même avec chaque $A \in \mathcal{C}$ et $p^{-1}(A) = \Psi_* \cap (A \times \{|x_{n-1}| < \delta_{n-1}\})$; comme $\mathcal{C}$ est finie
(cf, note 27), il s'ensuit que les composantes connexes des ensembles (∗) sont p. 72
semi-analytiques.

Passons maintenant à la démonstration de notre assertion pour n. On peut admettre que M est vectoriel et que $a = 0$. Soit E un sous-ensemble

---

[27]si $\Gamma_i : \Gamma_* \to \mathbb{R}$ avec $\Gamma_1 < \ldots < \Gamma_s$, sont les composantes connexes du premier, alors $\{\Gamma_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) < x_n < \Gamma_{i+1}(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$, $i = 0, \ldots, s$, où $\Gamma_0 = -\delta_n$ et $\Gamma_{s+1} = \delta_n$, sont celle du second,

semi-analytique de M. Soient $f_1, \ldots, f_r$ des fonctions analytiques $\not\equiv 0$ au voisinage de 0 qui décrivent E au voisinage de 0. Nous allons construire un système normal en 0 en prenant les facteurs suivants.

Soit $\Phi_n = f_1 \cdots f_r$. Soit $\mathcal{A}_{n-1}$ l'anneau de germes (en 0) de fonctions analytiques réelles au voisinage de 0 dans M_{n-1}, et soit $h \in \mathcal{A}_{n-1}[x]$ le polynôme qui correspond à $(\widetilde{H}_n^{n-1}(u,t))_0$; alors $h^{(j)}$ correspond à $\left(\dfrac{\partial^j \widetilde{H}_n^{n-1}}{\partial t^j}\right)_0$, $j = 0, 1 \ldots$; soient $h_1, \ldots, h_s$ tous (à l'équivalence près) les diviseurs irréductibles de $h, h', \ldots, h^{(K)}$ où $K = \deg h = \deg \widetilde{H}_n^{n-1}$ (par rapport à t) ; on peut supposer que h_i sont unitaires [28] (donc de degré positif) et qu'ils sont distincts entre eux. Alors le discriminant δ_i de h_i ainsi que les résultants $\rho_{i,j}$ de $h_i,\ h_j,\ (i<j)$, ne sont pas nuls. Les $h_1, \ldots, h_s$ correspondent à certains $(H_1)_0, \ldots, (H_s)_0$ où H_i sont des polynômes unitaires aux coefficients analytiques au voisinage de 0 dans M_{n-1}. On a alors

$$(**)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^j \widetilde{H}_n^{n-1}}{\partial t^j} = \prod_{i=1}^{s} H_i^{\nu_{i,j}} & \text{dans un voisinage de 0 dans } M_{n-1}\times\mathbb{R}, \\ & j = 0, \ldots, K, \text{ où l'on a } \nu_{i,j_i} > 0 \\ & \text{pour chaque } i \text{ avec un } j_i\ , \\ & \\ D_\nu \not\equiv 0,\ R_{i,j} \not\equiv 0 & \text{dans un voisinage de 0 dans } M_{n-1}, \end{cases}$$
$$(\nu = 1, \ldots, s;\ 1 \le i < j \le s),$$

où D_ν est le discriminant de H_ν, et $R_{i,j}$ est le résultant de H_i, H_j, parce qu'on p. 73
a $\delta_\nu = (D_\nu)_0$ et $\rho_{i,j} = (R_{i,j})_0$.

Prenons maintenant $\Phi_{n-1} = \prod_{i=1}^{r} \sigma^{(\widetilde{H}_n^{n-1})} f_i \prod_{\nu=1}^{s} D_\nu \prod_{1\le i<j\le s} R_{i,j}$ [29] et $\Phi_k = \prod_{i=1}^{r} \sigma^{(\widetilde{H}_{k+1}^k, \ldots, \widetilde{H}_{kn}^k)} f_i$, pour $k = n-2, \ldots, 1$. Soit $\mathcal{S}$ un système normal construit en prenant ces Φ_ν ; vu la remarque 3 du N° 14, pour chaque voisinage normal Q de 0 suffisamment petit, la partition normale $\mathcal{N}$ de Q suivant $\mathcal{S}$ est compatible avec E. Il reste à démontrer que les membres de $\mathcal{N}$ de dim. $n-1$ et n sont semi-analytiques.

Soit $Q = Q_1 + \Delta e_n$. avec $Q_1 \subset M_{n-1}$ et $\Delta =]-\delta, \delta[$. On peut exiger que $(**)$ subsistent dans $Q_1 \times \mathbb{R}$ et Q_1 respectivement ; on peut exiger aussi que

---

[28] comme h est unitaire ; si $h^{(j)} = h_1 h_2$, alors $\alpha_1\alpha_2 = \dfrac{K!}{(K-j)!}$, où α_1, α_2 sont les coefficients dominants de h_1, h_2, donc α_1, α_2 sont inversibles.

[29] il n'est pas nécessaire d'ajouter le facteur avec les discriminants D_ν

$u \in Q_1, \dfrac{\partial^j \widetilde{H}_n^{n-1}}{\partial t^j}(u,t) = 0 \Rightarrow t \in \Delta$ [30]; on a alors pour chaque $i = 1, \ldots, s$

$$u \in Q_1,\ H_i(u,t) = 0 \Longrightarrow t \in \Delta\ .$$

II suffit de prouver que les sous-ensembles $\{\widetilde{H}_n^{n-1}(u,t) = 0,\ \widehat{H}_{n-1}^{n-2}(u) = 0\}$ et $\{\widetilde{H}_n^{n-1}(u,t) \neq 0\}$ de $Q_1 \times \Delta$ admettent des partitions finies en ensembles semi-analytiques connexes. On a déjà montré cette propriété pour $\{\widetilde{H}_n^{n-1}(u,t) \neq 0,\ \widehat{H}_{n-1}^{n-2}(u) = 0\}$ (parce que $\{\widetilde{H}_n^{n-1} \neq 0,\ \widehat{H}_{n-1}^{n-2} = 0\}$ est une réunion finie de deuxièmes des ensembles $(*)$.

Par conséquent, il suffit de prouver ceci pour les ensembles p. 74

$$(***) \quad \begin{aligned} V' &= \{(u,t) \in Q_1 \times \Delta : \widetilde{H}_n^{n-1}(u,t) = 0,\ \widehat{H}_{n-1}^{n-2}(u) \neq 0\} \text{ et} \\ V'' &= \{(u,t) \in Q_1 \times \Delta : \widetilde{H}_n^{n-1}(u,t) \neq 0,\ \widehat{H}_{n-1}^{n-2}(u) \neq 0\} \end{aligned}$$

Considérons la famille $\mathcal{T}$ des sous-ensembles de $Q_1 \times \Delta$ de la forme :

$$T = \{(u,t) \in \Gamma_* \times \Delta : H_i \in \theta_i,\ i = 1, \ldots, s\}\ ,$$

où $\theta_i = \{x > 0\}$ soit $\{0\}$ soit $\{x < 0\}$ et Γ_* est une composante connexe de $\{u \in Q_1 : \widehat{H}_{n-1}^{n-2}(u) \neq 0\}$ (donc Γ_* est un membre d'une partition normale de Q_1). La famille $\mathcal{T}$ est finie, ses ensembles sont disjoints et semi-analytiques (comme Γ_* est semi-analytique).

Vérifions d'abord que si $T \in \mathcal{T}$ pour chaque $b \in \Gamma_*$ l'ensemble $T \cap (\{b\} \times \Delta)$ est connexe. En effet, on a

$$T \cap (\{b\} \times \Delta) = \{b\} \times (\Delta \cap \{H_i(b,t) \in \theta_i,\ i = 1, \ldots, s\})\ ,$$

donc il suffit de vérifier que $\Delta_1 = \{H_i(b,t) \in \theta_i,\ i = 1, \ldots, s\}$ est connexe, D'après $(**)$ on voit que Δ_1 est contenu dans un

$$\Delta_2 = \left\{ \frac{\partial^j \widetilde{H}_n^{n-1}}{\partial t^j}(u,t) \in \theta'_j,\ j = 0, \ldots, K \right\}$$

avec $\theta'_j = \{x > 0\}$ soit $\{0\}$ soit $\{x < 0\}$, qui est, selon le lemme de Thom, un intervalle ouvert ou contient au plus un point. Le second cas étant trivial, supposons que Δ_2 est un intervalle ouvert ; on a alors $\dfrac{\partial^j \widetilde{H}_n^{n-1}}{\partial t^j} \neq 0$ dans Δ_2 ,

[30] cf. la construction de voisinage normal, N° 14

$j = 0, \ldots, K$ d'où (vu $(**)$) chaque $H_i(b,t),\ i = 1, \ldots, s$ est de signe constant dans Δ_2, d'où $\Delta_2 \subset \Delta_1$. Par conséquent, $\Delta_1 = \Delta_2$ est connexe.

Montrons maintenant que chacun des ensembles $(***)$ est réunion d'une sous-famille de $\mathcal{T}$. Comme $\{(u,t) \in Q_1 \times \Delta : \widehat{H}_{n-1}^{n-2}(u) \neq 0\}$ est la réunion de p. 75
$\mathcal{T}$ il suffit de vérifier, que chaque $T \in \mathcal{T}$ est contenu soit dans V' soit dans V''. Comme on a $R_{i,j} \neq 0$ dans Γ_*, les H_i n'ont pas de racines communes pour $u \in \Gamma_*$; par conséquent, T est vide, si $\theta_i = \{0\}$ pour deux i ; si tous les θ_i sont $\neq \{0\}$, on a (vu $(**)$) $\widetilde{H}_n^{n-1} \neq 0$ dans T, donc $T \subset V''$; si, enfin, $\theta_q = \{0\}$ pour un seul q, alors $T \subset V'$ ou $T \subset V''$ selon que $\nu_{q,0} > 0$ ou $\nu_{q0,} = 0$.

II reste donc à prouver que chaque $T \in \mathcal{T}$ est connexe. Soit $a \in \Gamma_*$; comme on a $D_\nu \neq 0$ et $R_{i,j} \neq 0$ dans Γ_*, il existe un voisinage U de a dans Γ_* et des fonctions $-\delta = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_L < \varphi_{L+1} = \delta$ continues dans U, telles que pour chaque $u \in U$, les $\varphi_j(u),\ j = 1, \ldots, L$, sont toutes les racines (réelles) de $H_1, \ldots, H_s$; par conséquent, chacun des ensembles $\varphi_j,\ j = 1, \ldots, L,\ \{\varphi_j(u) < t < \varphi_{j+1}(u)\},\ j = 0, \ldots, L$, dont la réunion est $U \times \Delta$, est contenu dans un ensemble de $\mathcal{T}$. 1l en résulte facilement que l'application $\pi : T \ni (u,t) \mapsto t \in \Gamma_*$, est ouverte et que $\pi(T)$ et $\Gamma_* \setminus \pi(T)$ sont ouverts, d'où $T = \emptyset$ ou $\pi(T) = \Gamma_*$. Si T n'était pas connexe, on aurait $T = A \cup B$ avec A, B disjoints, non vides, et ouverts dans T ; alors $\Gamma_* = \pi(A) \cup \pi(B)$ avec $\pi(A), \pi(B)$ ouverts et non vides ; enfin, comme pour tout $b \in \Gamma_*$, $\pi^{-1}(b) = T \cap (\{b\} \times \Delta)$ est connexe, on a $\pi^{-1}(b) \subset A$ ou $\pi^{-1}(b) \subset B$, c'est-à-dire $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$; ceci donne la contradiction avec la connexité de Γ_*. Par conséquent, T est connexe, ce qui termine la démonstration.

Le théorème 3 entraîne facilement les propositions suivantes.

Proposition 1. *L'adhérence, l'intérieur et la frontière d'un ensemble semi-* p. 76
analytique sont semi-analytiques.

Proposition 2. *La famille des composantes connexes d'un ensemble semi-analytique est localement finie. En particulier, tout ensemble semi-analytique relativement compact n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.*

Proposition 3. *Tout ensemble semi-analytique est localement connexe.*

En effet, soit E un sous-ensemble semi-analytique de M, et soit $a \in M$. 1l existe une partition normale $\mathcal{N}$ en a, d'un voisinage Q de a, telle que $E \cap Q = \bigcup \Gamma_i$ avec $\Gamma_i \in \mathcal{N}$. Or, $\overline{E} \cap Q = \bigcup (\overline{\Gamma_i} \cap Q) = \bigcup \Gamma'_j$, avec $\Gamma'_j \in \mathcal{N}$, ce qui prouve la proposition 1. Pour la proposition 2, observons que chaque Γ_i est contenu dans une seule composante de E (ce qui donne l'application de l'ensemble des Γ_i sur l'ensemble des composantes connexes de E qui rencontrent Q). Quant à la proposition 3, supposons que $a \in E$; on a alors $E \cap Q = \bigcup(\{a\} \cup \Gamma_i)$, où $\{a\} \cup \Gamma_i$ sont connexes, car $a \in \overline{\Gamma_i}$.

Corollaire. *Tout ensemble ouvert-fermé dans un ensemble semi-analytique est semi-analytique.*

En effet, le premier est la réunion d'une famille de composantes connexes du second.

Proposition 4. *Soit F un sous-ensemble d'un ensemble semi-analytique E ;* p. 77
notons avec F_1 et F_2 l'adhérence et l'intérieur de F dans E (c'est-à-dire, $F_1 = \overline{F} \cap E$ et $F_2 = E \setminus \overline{E \setminus F}$). Alors F est semi-analytique $\Leftrightarrow$ $F_1 \setminus F$ et $F \setminus F_2$ sont semi-analytiques,

En effet, $\Rightarrow$ est claire. Supposons que $F_1 \setminus F$ et $F \setminus F_2$ sont semi-analytiques ; or, $E \setminus F_1$ et F_2 sont disjoints et ouverts, donc fermés dans leur réunion $E \setminus (F_1 \setminus F_2)$ qui est semi-analytique ; par conséquent, F_2 est semi-analytique, d'où il en est de même avec $F = F_2 \cup (F \setminus F_2)$.

17 [Points réguliers et dimension d'un ensemble semi-analytique]

Soit E un sous-ensemble semi-analytique d'une variété analytique M. On dit qu'un point $a \in E$ est un *point régulier de E de dimension* k, si, pour un voisinage U de a , $U \cap E$ est une sous-variété analytique de dim. k. L'ensemble des points réguliers de dim. k de E est donc un sous-ouvert de E, et une sous-variété analytique de dim. k de M.

Théorème 4. *L'ensemble des points réguliers de dim. k d'un ensemble semi-analytique est semi-analytique.*

Démonstration. Soit F l'ensemble des points réguliers de dim. k d'un sous-ensemble semi-analytique E de M. On peut supposer que $0 < k < n = \dim M$. Soit $a \in M$. 1l suffit d'avoir $F \cap U$ semi-analytique pour un voisinage U de a. Pour ceci on peut admettre que M soit vectoriel et que $a = 0$. Soit

$e_1, \dots, e_n$ une base de M et soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-ensembles de $n-k$ éléments de $\{1, \dots, n\}$. Il existe des voisinages U_i de $e_i,\ i = 1, \dots, n$, tels que

$$(*) \qquad e_i'' \in U_{i,i} = 1, \dots, n \Longrightarrow e_1'' \wedge \cdots \wedge e_n'' \neq 0$$

et que pour chaque k-vecteur $w \neq 0$ on peut trouver un $\alpha = \{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\} \in$ p. 78
$\mathcal{A}$ tel que

$$(**) \qquad e_i' \in U_{\alpha_i},\ i = k+1, \dots, n \Longrightarrow w \wedge e_{k+1}' \wedge \cdots \wedge e_n' \neq 0\ .$$

En effet, soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des sous-ensembles de k éléments de $\{1, \dots, n\}$ et posons $e_\beta = e_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge e_{\beta_k}$ pour chaque $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_k\} \in \mathcal{B}$, où $\beta_1 < \ldots < \beta_k$; choisissons les voisinages U_i de e_i, $i = 1, \dots, n$, si petits que la condition $(*)$ soit satisfaite, et que $(\sum_{\mathcal{B}} \mu_\beta e_\beta) \wedge (e_{k+1}' \wedge \cdots \wedge e_n' - e_{\alpha_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_n})$ soit $\neq e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ et $\neq -e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, lorsque $|\mu_\beta| \leq 1,\ (\beta \in \mathcal{B}),\ e_i' \in U_{\alpha_i},\ (i = k+1, \dots, n)$, et $\alpha = \{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{A}$; prenons un $w = \sum \mu_\beta e_\beta \neq 0$; on a $\beta \in \mathcal{B} \Rightarrow |\mu_\beta| \leq |\mu_{\beta^*}|$ avec un $\beta^* \in \mathcal{B}$ et on peut admettre (en multipliant w par $1/\mu_{\beta^*}$) que $\mu_{\beta^*} = 1$; prenons alors le complémentaire $\alpha = \{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{A}$ de β^* dans $\{1, \dots, n\}$; alors, si $e_i' \in U_{\alpha_i},\ i = k+1, \dots, n$, on a

$$w \wedge e_{k+1}' \wedge \cdots \wedge e_n' =$$
$$= e_{\beta^*} \wedge e_{\alpha_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_n} + (\sum_{\mathcal{B}} \mu_\beta e_\beta) \wedge (e_{k+1}' \wedge \cdots \wedge e_n' - e_{\alpha_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_n}) \neq 0\ .$$

Autre démonstration de $(**)$:
En effet, soit S un ellipsoïde dans $\bigwedge^k M$ du centre 0. Si $w \in S$, on a $w \wedge e_{\alpha_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_n} \neq 0$ avec un $\{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{A}$ donc $V \wedge U_{\alpha_{k+1}} \wedge \cdots \wedge U_{\alpha_n} \not\ni 0$ avec certains voisinages V de w et U_i de e_i, $i = 1, \dots, n$. On a donc (Borel-Lebesgue) $S \subset \bigcup_{i=1}^v V_j$ et $V_j \wedge U_{\alpha_{k+1}}^j \wedge \cdots \wedge U_{\alpha_n}^j \not\ni 0$, où U_i^j est un voisinage de e_i, $(i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, v)$. Or, on prend des voisinages $U_i \subset \bigcap_{j=1}^v U_i^j$
de x_i vérifiant $(*)$, et alors ils vérifient aussi $(**)$; car, si $w \neq 0$, on a $\lambda w \in V_j$ p. 79
avec un $\lambda \neq 0$ et un j, et alors, si $e_i' \in U_{\alpha_i},\ i = k+1, \dots, n$, on a $e_i' \in U_{\alpha_i}^j$, d'où $\lambda w \wedge e_{k+1}' \wedge \cdots \wedge e_n' \neq 0$.

Pour chaque $\alpha = \{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{A},\ \alpha_{k+1} < \ldots < \alpha_n$, construisons un système normal $\mathcal{S}_\alpha = (g_\alpha, S_\alpha)$ en 0 qui donne une partition normale $\mathcal{N}_\alpha$ d'un voisinage Q_α de 0, compatible avec E, de manière que $g_\alpha : M \ni x_1 e_1^{(\alpha)} + \cdots + x_n e_n^{(\alpha)} \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $e_i^{(\alpha)} \in U_{\alpha_i},\ i = k+1, \dots, n$; à cet effet, on complète $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{1, \dots, n\}$, on prend $e_n^{(\alpha)} \in U_{\alpha_n}$ et, à chaque pas, $M_j = \sum_{i=1}^{j} \mathbb{R}e_{\alpha_i}$, $e_j^{(\alpha)} \in M_j \cap U_{\alpha_j}$, $j = n-1, \dots, 1$, (vu la condition $(*)$).

Observons maintenant que si pour un point a d'une sous-variété analytique $N \subset Q_\alpha$ de dim. k un k-vecteur $w \neq 0$ correspondant à l'espace tangent de N en a vérifie $w \wedge e_{k+1}^{(\alpha)} \wedge \cdots \wedge e_n^{(\alpha)} \neq 0$, alors, pour un voisinage ouvert N_0 de a dans N, $g_\alpha(N_0)$ est topographique. Il en résulte, selon $(**)$, que pour tout $x \in F \cap \bigcap Q_\alpha$ il existe un $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $g_\alpha(x)$ appartient à l'ensemble F_α des points de $g_\alpha(E \cap Q_\alpha)$ au voisinage desquels $g_\alpha(E \cap Q_\alpha)$ est une variété analytique topographique de dim. k (qui est semi-analytique d'après la proposition 12 du N° 13) ; ceci donne $F \cap \bigcap Q_\alpha \subset \bigcup g_\alpha^{-1}(F_\alpha)$. Comme on a évidemment $g_\alpha^{-1}(F_\alpha) \subset F$ pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}$, on obtient

$$F \cap \bigcap Q_\alpha = \left(\bigcup g_\alpha^{-1}(F_\alpha)\right) \cap \bigcap Q_\alpha \,,$$

ce qui prouve la semi-analyticité de $F \cap \bigcap Q_\alpha$, et la démonstration est terminée

Soit E un sous-ensemble semi-analytique de M, et soit $a \in M$.

Soit $\mathcal{N}$ une partition normale en a, d'un voisinage Q de a, compatible p. 80
avec E ; Supposons d'abord que $a \in \overline{E}$. On a alors $Q \cap E = \bigcup \Gamma_i \neq \emptyset$ avec $\Gamma_i \in \mathcal{N}$. Soit $k = \max \dim \Gamma_i$. Si $\dim \Gamma_j = k$, alors chaque point de Γ_j est régulier (de E) de dim. k ; ceci résulte du fait que l'ensemble $(E \cap Q) \setminus \bigcup \{\Gamma \in \mathcal{N} : \dim \Gamma < k\}$ qui est une réunion de membres de dim k, est ouvert dans E. Il s'ensuit que chaque voisinage $U \subset Q$ de a contient des points réguliers de Q, de dim. k. Il en résulte en particulier que

l'ensemble des points réguliers de E est dense dans E.

D'autre part, tous les points réguliers de E contenus dans U sont de dim. $\leq k$, parce que $Q \cap E$ ne peut pas contenir de sous-variétés (même topologiques) de dim. $> k$; en effet, soit σ un sous-variété (topologique) contenue dans $Q \cap E$; on a $\sigma \subset Z = \bigcup \{\Gamma_i : \Gamma_i \cap \sigma \neq \emptyset\}$; soit Γ_s un qui intersecte σ, de dimension maximale ; alors Γ_s est ouvert dans Z, d'où $\Gamma_s \cap \sigma$ est ouvert dans σ, et $\dim \sigma = \dim \Gamma_s \cap \sigma \leq \dim \Gamma_s \leq k$ [31]

[31] On utilise le fait que si N_1, N_2 sont deux sous-variétés topologiques, alors $N_1 \subset N_2 \Rightarrow \dim N_1 \leq \dim N_2$. (Dans le cas des variétés topologiques ceci résulte du théorème de Brouwer : si $\dim N_1 > \dim N_2$, un voisinage dans N_2 homéomorphe à une boule, contiendrait la famille de puissance continue des sous-variétés disjointes de la même dim. que N_2, donc ouvertes, ce qui n'est pas possible).

On peut donc définir

$$\begin{aligned}\dim_a E &= \text{max. de dim. des points réguliers de } E \text{ dans } U\\ &= \max\{\dim\Gamma : \Gamma \in \mathcal{N},\ \Gamma \subset E\}\ ,\end{aligned}$$

lorsque U est un voisinage suffisamment petit de a, et $\mathcal{N}$ – une partition normale en a, compatible avec E. (On pose $\dim_a E = -1$, si $a \notin \overline{E}$). On définit p. 81

$$\begin{aligned}&\dim E = \text{max de dim des points réguliers de } E = \max_x \dim_x E\\ &(\text{où } x \in E \text{ ou, ce qui revient au même, } x \in M)\ .\end{aligned}$$

Observons qu'un ensemble semi-analytique de dim. k ne peut pas contenir de variétés (même topologiques) de dim. $> k$. On vérifie facilement (pour E, F semi-analytiques) que

$$\begin{aligned}&E \subset F \Longrightarrow \dim_a E \le \dim_a F \text{ et } \dim E \le \dim F,\\ &\dim_a(E \cup F) = \max(\dim_a E, \dim_a F)\ ,\ \dim(E \cup F) = \max(\dim E, \dim F)\ ,\\ &\dim_a \overline{E} = \dim_a E\ ,\quad \dim \overline{E} = \dim E\ .\end{aligned}$$

Observons enfin, que si M, N sont des sous-variétés analytiques dénombrables, A un sous-ensemble semi-analytique de M et $f : A \to N$ avec $f(A)$ semi-analytique, alors :

$$\dim f(A) < \dim A$$

dans le cas où f est la restriction d'une application différentiable de M dans N ou si (le graphe de) f est semi-analytique.

Ceci résulte du fait que si f est la réunion d'une collection dénombrable $\{f_i\}$ de sous-variétés de la classe $\mathcal{C}^1$, alors $f(A)$ ne peut pas contenir de variétés de dimension $> k = \dim A$. Pour montrer ceci, posons $\widetilde{k} = \max \dim f_i$, et soient $\pi_1 : M \times N \to M$, $\pi_2 : M \times N \to N$ les projections. Prenons un f_s de dim. $\widetilde{k}$, un $c \in f_s$, et une partition normale $\mathcal{N}$ d'un Q en $a = \pi_1(c)$, compatible avec A ; soit A_0 la réunion des membres qui intersectent $\pi_1(f_s)$, Γ un parmi d'eux de la dimension maximum. Alors Γ est ouvert dans A_0 et $Q \cap \pi_1(f_s) \subset A_0$ donc on a $\pi_1(\varphi) \subset \gamma$ pour des sous-ouverts $\varphi \neq \emptyset$, $\gamma \neq \emptyset$ de f_s et Γ respectivement.

Ceci donne, comme $(\pi_1)_\varphi$ est injective, $\widetilde{k} = \dim \varphi \le \dim \gamma \le k$ [32]. Si $f(A)$ p. 82
contenait une variété de dim. $\ell > k$, il en serait de même (Baire) avec un

[32] par Brouwer (cf. note 31).

$\pi_2(f_i)$, d'où $\dim f_i \geq \ell$ [33], ce qui donnerait $\widetilde{k} > k$ contrairement à l'inégalité précédente.

Proposition 5. *Soit E un ensemble semi-analytique, non vide, de dim. k, E_0 – l'ensemble de ses points réguliers de dim. k. On a alors* $\dim(\overline{E} \setminus E_0) < \dim E$, *(*$\dim_c(\overline{E} \setminus E_0) < k$ *pour $c \in \overline{E}$).*

En effet, soit $c \in \overline{E}$ et soit $\mathcal{N}$ une partition normale en c, d'un voisinage Q de c, compatible avec $E, \overline{E}, E_0$; on a alors $E \cap Q = \bigcup \Gamma_i$, avec $\Gamma_i \in \mathcal{N}$, et, comme on a vu, les Γ_i de dim k sont contenus dans E_0 ; par conséquent, $(\overline{E} \setminus E_0) \cap Q \subset \bigcup \Gamma'_j$ avec $\dim \Gamma'_j < k$, d'où $\dim_c(\overline{E} \setminus E_0) < k$.

Proposition 6. *Soit E un ensemble semi-analytique de dim k, $\sigma \subset E$ une sous-variété topologique de dim. k. Alors σ est semi-analytique $\Leftrightarrow$ $(\overline{\sigma} \setminus \sigma) \cap E$ est semi-analytique.*

Démonstration. Comme ($\Rightarrow$) est claire, il suffit de prouver ($\Leftarrow$). Soit E_0 l'ensemble des points réguliers de dim. k de E, et posons $\sigma_0 = E_0 \cap \sigma$. Alors σ_0 est ouvert dans σ (car E_0 est ouvert dans E), d'où σ_0 est ouvert dans E_0 (comme σ_0 et E_0 sont des variétés de dim. k [34]), On a $\overline{\sigma} = \overline{\sigma_0}$; en effet, $\sigma \setminus \overline{\sigma_0} = \emptyset$; sinon, on aurait, d'après $\sigma \setminus \overline{\sigma_0} \subset E \setminus E_0$, p. 83

$$\dim \sigma = \dim \sigma \setminus \overline{\sigma_0} \leq \dim(E \setminus E_0) < k \ .$$

Comme $\overline{\sigma_0} \cap E_0 \setminus \sigma_0 = (\overline{\sigma} \cap E \setminus \sigma) \cap E_0$ est semi-analytique, donc (proposition 4) σ_0 est semi-analytique, et, par conséquent, $\sigma = (\overline{\sigma} \cap E) \setminus ((\overline{\sigma} \setminus \sigma) \cap E)$ est semi-analytique.

Proposition 7. *Un sous-ensemble E de M est semi-analytique de dim $\leq k$ si et seulement si pour chaque point de M il existe un voisinage ouvert U et un sous-ensemble analytique A de dim $\leq k$ (c'est-à-dire $A = \{x \in U : f(x) = 0\}$ avec une f analytique dans U, la dimersion définie ci-dessus) tels que $E' = E \cap U \subset A$ et $E_1 \setminus E'$ et $E' \setminus E_2$ sont semi-analytiques dans U, de dim $\leq k - 1$, où E_1, E_2 sont l'adhérence et l'intérieur de E' dans A.*

En effet, la condition est suffisante, en vertu de la proposition 4. Vérifions

[33] Comme la mesure de Hausdorff de $\pi_2(f_i)$ de dimension $> \dim f_i$ est égale à zéro.

[34] Si N_1, N_2 sont des sous-variétés de la même dimension, et $N_1 \subset N_2$, alors N_1 est ouvert dans N_2 (théorème de Brouwer),

sa nécessité ; soit $a \in M$; on a

$$E' = E \cap Q = \bigcup \Gamma_i \subset A = V^k \cup \cdots \cup V^0 = \left\{ \sum_{j=k+1}^{n} (H_j^{j-1})^2 = 0 \right\}$$

avec $\Gamma_i \in \mathcal{N}$ pour une partition normale $\mathcal{N}$ en a d'un voisinage Q de a ; or, $E_1 \setminus E'$, où $E_1 = \overline{E'} \cap Q$, est une réunion de membres de dim $\leq k-1$, et, comme l'intérieur E_2 de E' dans A contient tous les Γ_i de dim. k, $E \setminus E_2$ est contenu dans la réunion de ceux de dim. $\leq k-1$; par conséquent, $E_1 \setminus E'$ et $E' \setminus E_2$ sont semi-analytiques dans Q, de dim. $\leq k-1$.

18 [Inégalité de Łojasiewicz]

On dit que deux sous-ensembles A, B d'un espace euclidien M sont *régulièrement situés à un point* $c \in M$, s'il existe $d, N > 0$ et un voisinage U de c tels que

$$\rho(x, A) \geq d\,\rho(x, A \cap B)^N \quad \text{pour } x \in U \cap B$$

(où l'on admet $\rho(x, \emptyset)$ égal à une, n'importe quelle, constante positive)[35]. p. 84
Observons que cette condition équivaut à

$$\rho(x, A) + \rho(x, B) \geq d\,\rho(x, A \cap B)^N \quad \text{pour } x \in U$$

avec certains $d, N > 0$ et U. En effet, la deuxième implique trivialement la première ; supposons la première satisfaite. On peut admettre $N \geq 1$, ainsi que $c \in \overline{A} \cap \overline{B}$ (le cas $c \notin \overline{A}$ ou $c \notin \overline{B}$ étant trivial) ; prenons une boule ouverte U_0 de centre c telle que celle de rayon 2 fois plus grand soit contenue dans U, et prenons un $d_0 > 0$ tel que $2^N d_0 < d$ et $d_0\,\rho(x, A \cap B)^N \leq \frac{1}{2}\,\rho(x, A \cap B)$ dans U_0 ; alors $\rho(x, A) + \rho(x, B) < d_0\,\rho(x, A \cap B)^N$ pour un $x \in U_0$ entraînerait $\rho(x, a) + \rho(x, b) < d_0\,\rho(x, A \cap B)^N$ avec $a \in A \cap U$, $b \in B \cap U$, d'où $\rho(x, b) < \frac{1}{2}\,\rho(x, A \cap B)$, $\rho(b, A \cap B) \geq \rho(x, A \cap B) - \rho(x, b) > \frac{1}{2}\,\rho(x, A \cap B)$, et $\rho(b, A) \leq \rho(a, b) < d\,\left(\frac{1}{2}\,\rho(x, A \cap B)\right)^N < d\,\rho(b, A \cap B)^N$, contrairement à la première condition.

Observons ensuite que la condition ne dépend que des germes A_0, B_0. En effet, supposons que $c_i n \overline{A \cap B}$ (pour le cas contraire, cf. renvoi[35]) ; or, si

[35] Si $c \notin \overline{A \cap B}$, la condition signifie précisément que pour un voisinage U de c, $\rho(A \cap U, B \cap U) > 0$, c'est-à-dire que $c \notin \overline{A} \cap \overline{B}$.

$c \in \overline{E}$, on a $\rho(x, E) = \rho(x, E \cap U')$ pour $x \in U$, avec $U = \{|x - c| < \varepsilon\}$, $U' = \{|x - c| < 2\,\varepsilon\}$ et $\varepsilon > 0$ quelconques.

Comme la condition est invariante par rapport aux difféomorphismes, on peut prendre pour M toute variété différentiable et dire que A, B sont situés régulièrement à c, s'il en est de même avec $g(A)$, $g(B)$, $g(c)$ pour une carte g à c, ce qui ne dépend pas de g.

On dira que A, B sont régulièrement situés (dans un sous-ensemble E de p. 85
M), si la condition subsiste pour chaque $c \in M$ $(c \in E)$.

Si A_i, B_j sont régulièrement situés, (à c, dans E), $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, \ell$, il en est de même avec $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$. et $\bigcup_{j=1}^{\ell} B_j$. (On prend d, N, U communs pour tous les couples A_i, B_j, et on vérifie immédiatement la première condition).

Si deux sous-ensembles A, B (d'un euclidien) sont régulièrement situés dans un compact E, alors

$$\rho(x, A) + \rho(x, B) \geq d\,\rho(x, A \cap B)^N \quad \text{pour } x \in E$$

avec certains $d, N > 0$.

Nous allons démontrer les théorèmes suivants ;

Théorème 1. *Chaque couple d'ensembles semi-analytiques fermés est situé régulièrement.*

Théorème 2. *Si f est une fonction analytique dans un ouvert G d'un euclidien, et si E est un sous-compact de G, alors il existe $d, N > 0$ tels que*

$$|f(x)| \geq d\,\rho(x, Z)^N \quad \textit{pour } x \in E$$

avec $Z = \{x \in G : f(x) = 0\}$. [36]

Remarque. Dans le cas où f est un polynôme, il ne suffit pas, en général, de prendre $N =$ degré de f. Par exemple, $f(x, y) = y^{2n} + (y - x^n)^2$ est de degré $2n$ et $Z = \{0\}$; comme on a $f(x, x^n) = x^{2n^2}$ il faut prendre $N \geq 2n^2$. p. 86

[36] Le théorème 2 résulte immédiatement du théorème 1, car alors $G \times \{0\}$ et le graphe de f sont régulièrement situés dans $G \times \mathbb{R}$.

Lemme 1. *Pour tout sous-ensemble connexe A de $\{(a_1, \ldots, a_m, x) : x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0,\ |a_i| \le K\}$, on a*

$$d(\pi_2(A)) \le M\, d\,(\pi_1(A))^{\frac{1}{m}}$$

($\pi_1 : (a_1, \ldots, a_m, x) \mapsto (a_1, \ldots, a_m)$, $\pi_2 : (a_1, \ldots, a_m, x) \mapsto x$, $d(E)$ désignant le diamètre de E), où M ne dépend que de m et K. En particulier, si $x(t)$, $a(t) = (a_1(t), \ldots, a_m(t))$ continues sur un segment I d'un euclidien, vérifient $x(t)^m + a_1(t)x(t)^{m-1} + \cdots + a_m(t) = 0$ et $|a_\ell(t)| \le K$ sur I, alors $|a(t') - a(t)| \le L\,|t' - t|$ sur I implique $|x(t') - x(t)| \le M\, L^{\frac{1}{m}} |t' - t|^{\frac{1}{m}}$ sur I.

Démonstration. Posons $\delta = d(\pi_1(A))$ et fixons un $(b_1, \ldots, b_m, y) \in A$. Supposons que $(a_1, \ldots, a_m, x) \in A$; on a alors $|x| \le K + 1$ (sinon, $0 = \left|1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_m}{x^m}\right| \ge 1 - \frac{K}{x}/(1 - \frac{1}{|x|}) > 0$) d'où

$$|x + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m| = |(b_1 - a_1)x^{m-1} + \cdots + (b_m - a_m)| \le m\,\delta\,(K+1)^m ,$$

donc $|x - \eta'| \le r = (K+1)\,(m\,\delta)^{\frac{1}{m}}$ pour une racine complexe η' de $P(\eta) = \eta^m + b_1 \eta^{m-1} + \cdots + b_m = 0$ (car $|x^m + \cdots + b_m| = |x - \eta_1| \cdots |x - \eta_m|$, où η_i sont les racines de P) ; il existe un $\rho \le 2\,rm$ tel que P n'a pas de racines η vérifiant $\rho - r \le |\eta - y| \le \rho + r$; par conséquent, $|x - y| \ne \rho$. Ceci montre que $A \cap \{(a_1, \ldots, a_m, x) : |x - y| = \rho\} = \emptyset$, d'où $A \subset \{(a_1, \ldots, a_m, x) : |x - y| < \rho\}$, ce qui donne $d(\pi_2(A)) \le 2\rho \le 4m\,(K+1)\,(m\,\delta)^{\frac{1}{m}}$.

Lemme 2. *Si une fonction f de la classe $\mathcal{C}^m$ vérifie $f(t) \ne 0$, $f'(t) \ne 0$ et $|f^{(m)}(t)| \ge \varepsilon$ dans $[a - \tau,\ a + \tau]$ (avec $\varepsilon, \tau > 0$), alors*

$$|f(a) \ge \frac{\varepsilon}{(2m)^m}\, \tau^m .$$

En effet, il suffit de vérifier que si $|f(t)| < \delta$ dans un intervalle de longueur p. 87
τ, alors on a $|f^{(m)}(t^m)| < \left(\frac{2m}{\tau}\right)^m \delta$ pour $t*$ de cet intervalle, ce qu'on obtient par récurrence (on applique l'assertion pour $m-1$ à la fonction $f(t + \frac{\tau}{m}) - f(t)$ dans un intervalle de longueur $\frac{m-1}{m}\,\tau$).

Démonstration des théorèmes 1 et 2. Grâce au théorème 1 du N° 16, l'assertion :

(A_n) *pour chaque couple de membres* Γ, Γ_1 *d'une partition normale dans* $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Gamma}$ *et* $\overline{\Gamma_1}$ *sont régulièrement situés à* 0

entraîne le théorème 1. D'autre part l'assertion

(B_n) *si* f *est une fonction analytique dans un voisinage* U *d'un point* $a \in \mathbb{R}^n$, *il existe un voisinage* U_0 *de* a, *et* $d, N > 0$ *tels que* $|f(x)| > d\,\rho(x, Z)^N$ *pour* $x \in U_0$, *où* $Z = \{x \in U : f(x) = 0\}$

entraîne le théorème 2 (par Borel-Lebesque). Comme (A_1), (B_1) sont triviales, il suffit de prouver $(B_k)_{k<n} \Rightarrow (A_n)$ et $(A_n) \Rightarrow (B_n)$, lorsque $n = 2, 3, \ldots$.

$\underline{(B_k)_{k<n} \Rightarrow (A_n)}$. Soit $\mathcal{N}$ une partition normale d'un Q dans $\mathbb{R}^n$ et soient $\Gamma, \Gamma_1 \in \mathcal{N}$ avec $\dim \Gamma_1 \leq \dim \Gamma > 0$; il suffit de prouver que si $\Lambda = (\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap Q$ et $\overline{\Gamma_1}$ sont régulièrement situé à 0, il en est de même avec $\overline{\Gamma}$ et $\overline{\Gamma_1}$. En effet, on procède alors par récurrence sur $\dim \Gamma + \dim \Gamma_1$ en utilisant le fait (proposition 6 du N° 11) que Λ est une réunion de $\overline{\Gamma'} \cap Q$ avec $\Gamma' \in \mathcal{N}$ de dimension strictement inférieure à celle de Γ (le cas où $\dim \Gamma = \dim \Gamma_1 = 0$ étant trivial).

Supposons donc que Λ et $\overline{\Gamma_1}$ sont régulièrement situés à 0. On peut p. 88
admettre $\Lambda \neq \emptyset$, le cas contraire (où $\Gamma \subset \overline{\Gamma_1}$) étant trivial. On a alors $\rho(x, \Lambda) + \rho(x, \Gamma_1) \geq d'\,\rho(x, \Lambda \cap \Gamma_1)^{N'}$ dans un voisinage de 0 avec $d', N' > 0$. Supposons que $\Gamma \neq \Gamma_1$, (le cas $\Gamma = \Gamma_1$ étant trivial) ; comme on a alors $\overline{\Gamma} \cap \overline{\Gamma_1} \cap Q = \Lambda \cap \overline{\Gamma_1}$ il suffit de prouver que $\rho(x, \Gamma_1) \geq d''\,\rho(x, \Lambda)^{N''}$ dans $U \cap \Gamma$ avec $d'', N'' > 0$ et avec un voisinage U de 0. Soit $\Lambda^* = \pi(\Lambda)$ où $\pi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$ et $k = \dim \Gamma$; on a $\Lambda^* = (\overline{\pi(\Gamma)} \setminus \pi(\Gamma)) \cap \pi(Q)$ (proposition 7 du N° 11). Le lemme 1 donne $\rho(u, \Lambda^*) \geq \widetilde{d}\,\rho(x, \Lambda)^{\widetilde{N}}$ dans Γ avec $\widetilde{d}, \widetilde{N} > 0$, où $u = \pi(x)$ (en effet, si $x \in \Gamma$ on a $\rho(x, \Lambda) \leq M\,|u - \overline{u}|^\alpha$ lorsque $[u, \overline{u}[\subset \pi(\Gamma)$ et $\overline{u} \in \Lambda^*$, avec $M, \alpha > 0$, d'où $\rho(x, \Lambda) \leq M\,\rho(u, \Lambda^*)^\alpha$). Par conséquent, il suffit de prouver que

(*) $\rho(x, \Gamma_1) \geq d\,\rho(u, \Lambda^*)^N$ dans $U \cap \Gamma$ avec $d, N > 0$ et avec un voisinage U de 0.

Si $\pi(\Gamma_1) \cap \pi(\Gamma) = \emptyset$, alors $\rho(x, \Gamma_1) \geq \rho(u, \pi(\Gamma_1)) \geq \rho(u, \Lambda^*)$ pour $x \in \Gamma$, car $u \in \pi(\Gamma)$.

Dans le cas contraire $k < n$ (car $\Gamma \neq \Gamma_1$) et $\pi(\Gamma_1) = \pi(\Gamma)$; alors Γ, Γ_1 sont des graphes des $\varphi, \varphi' : \pi(\Gamma) \to \mathbb{R}^{n-k}$; on a

$$|\varphi'(u) - \varphi(u)| \geq \varepsilon \min(D^k_{k+1}(u), \ldots, D^k_n(u))$$

dans $\pi(\Gamma)$ avec un $\varepsilon > 0$, (D^k_ℓ étant le discriminant de H^k_ℓ du système qui donne $\mathcal{N}$), d'où ((B_k) étant supposé) $|\varphi'(u) - \varphi(u)| \geq \varepsilon_1\,\rho(u, \Lambda^*)^{N_1}$ dans $\pi(\Gamma) \cap W$, avec $\varepsilon_1, N_1 > 0$ et avec un voisinage W de 0 ; on a ensuite (lemme

1) $|\varphi'(u') - \varphi'(u)| \leq M\,|u'-u|^\alpha$ lorsque $u, u' \in \pi(\Gamma)$ et $|u'-u| < \rho(u, \Lambda^*)$, avec $\alpha, M > 0$. Par conséquent, si $u \in \pi(\Gamma \cap W)$ et $u' \in \pi(\Gamma)$, on a

$$
\begin{aligned}
&|(u', \varphi'(u')) - (u, \varphi(u))| \geq \\
&\qquad \geq \min\big(\rho(u, \Lambda^*), \max(|u'-u|, \varepsilon_1\, \rho(u, \Lambda^*)^{N_1} - M\,|u'-u|^\alpha)\big) \\
&\qquad \geq d\,\rho(u, \Lambda^*)^N
\end{aligned}
$$

avec $d, N > 0$ indépendents de u et u' (on utilise l'inégalité p. 89

$$\max(\xi, 2b - M\xi^\alpha) \geq \min(b, (\frac{b}{M})^{1/\alpha})$$

pour $\xi, b \geq 0$), d'où il résulte (*).

(A$_n$) $\Rightarrow$ (B$_n$). Admettons (A$_n$). On vérifie par récurrence qu'alors quels que soient $A_1, \dots A_k$ semi-analytiques fermés dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, on a $\rho(x, A_1) + \cdots + \rho(x, A_k) \geq d\,\rho(x, A_1 \cap \cdots \cap A_k)^N$ dans un voisinage de 0, avec $d, N > 0$.

Soit $f \not\equiv 0$ analytique au voisinage d'un $a \in \mathbb{R}^n$ telle que $f(a) = 0$ (les cas $f \equiv 0$ ou $f(a) \neq 0$ sont triviaux). Comme la condition de la conclusion de (B$_n$) est invariante par rapport aux difféomorphismes, on peut admettre que $a = 0$ et qu'aucune des $x_i \mapsto f(0, \dots, x_i, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, n$, ne s'annule identiquement ; par conséquent, $\dfrac{\partial^{k_i} f}{\partial {x_i}^{k_i}}(0) \neq 0$ avec certains $k_i > 0$, $(i = 1, \dots, n)$. On a ensuite

$$(**) \qquad \operatorname{grad} f(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = 0 \quad \text{dans un voisinage de } 0\,,$$

En effet, si l'on prend une partition normale en 0 d'un Q compatible avec $(\operatorname{grad} f)^2$, on a $\{x \in Q : \operatorname{grad} f(x) = 0\} = \bigcup \Gamma_i$ où Γ_i sont des membres, mais alors f est constante sur chaque Γ_i, donc s'annule sur $\bigcup \Gamma_i$. Soit B une boule de centre 0 telle que $(**)$ subsiste et $\left|\dfrac{\partial^{k_i} f}{\partial {x_i}^{k_i}}(x)\right| \geq \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$, dans B, avec un $\varepsilon > 0$. Posons $Z = \{x \in B : f(x) = 0\}$ et $Z_i = \{x \in B : \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0\}$. Le lemme 2 entraîne que pour $x \in \frac{1}{2}B$ on a $|f(x)| \geq \dfrac{\varepsilon}{(2\,k_i)^{k_i}}\,\rho(x, Z \cup Z_i)^{k_i}$; comme $\bigcap (Z \cup Z_i) = Z$, il s'ensuit que $|f(x)| \geq d\,\rho(x, Z)^N$ dans un voisinage de 0, avec $d, N > 0$.

Corollaire. *Soit f une fonction analytique dans un ouvert G d'un euclidien, soit A un semi-analytique fermé dans G, et soit E un sous-compact de A.* p. 90
Alors il existe $d, N > 0$ tels que

$$|f(x)| \geq d\,\rho(x, Z)^N \qquad \textit{pour } x \in E$$

où $Z = \{x \in A : f(x) = 0\}$

Ceci résulte du fait que (le graphe de) f_A et $G \times \{0\}$ sont régulièrement situes dans $G \times \mathbb{R}$.

Soit M une variété analytique réelle de dim. n. Appelons *arc (s)-analytique* $\lambda \subset M$ l'image d'un plongement analytique [37] de $]0, 1]$ dans M, relativement compact et semi-analytique. On a $\overline{\lambda} \setminus \lambda = \{a\}$ avec un $a \in M$, et $\overline{\lambda}$ est un arc simple. (En effet, soit $\lambda = \{\xi(t) : 0 < t \leq 1\}$ où ξ soit un plongement, et soit $a = \lim \xi(\tau_\nu)$ pour un $\tau_\nu \to 0$; alors $a \notin \lambda$ (car ξ est un plongement) et pour chaque boule B de centre a l'ensemble $\lambda \cap B$, comme semi-analytique, n'a qu'un nombre fini des composantes connexes, d'où $a = \lim_{\tau \to 0} \xi(\tau)$). On appellera a le *bout de λ*.

Si f est analytique au voisinage de a, et si a est adhérent à l'ensemble des zéros de f sur λ alors $f = 0$ sur λ au voisinage de a. Ceci résulte du fait que pour une boule B de centre a, suffisamment petite, l'ensemble $\{x \in B \cap \lambda : f(x) = 0\}$, (comme semi-analytique et relativement compact) n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Lemme 3. *Si λ est un arc (s)-analytique, alors $\overline{\lambda}$ est un arc simple de la classe $\mathcal{C}^1$.*

En effet soit a le bout de λ. On peut supposer que M est vectoriel euclidien. Soit $e(x)$ un vecteur tangent à λ en $x \in \lambda$, qui dépend continûment p. 91
de x ; il s'agit de prouver que $\lim e(x)$ existe. En prenant une partition normale en a, compatible avec λ, on voit qu'il existe $g_2, \ldots, g_n$ (vecteurs) analytiques au voisinage de a, et tels que pour $x \in \lambda$, $\sum_2^n \mathbb{R}\, g_j(x)$ soit le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}\, e(x)$ [38]. Si $e(x)$ divergeait pour $x \to a$, il existerait un $e' \in M$ tel que $e(x_\nu) \cdot e' = 0$ et $e(y_\nu) \cdot e' \neq 0$ avec certains $x_\nu \to a$, $y_\nu \to a$ (il suffirait de prendre pour e' la différence de deux vecteurs limites distincts). mais $e(x) \cdot e' = 0$ équivaut à $g(x) = g_2(x) \wedge \cdots \wedge g_n(x) \wedge e' = 0$

[37] c'est-à-dire, une application analytique (restriction d'une application analytique d'un $]0, 1 + \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$) qui est un homéomorphisme sur son image.

[38] on prend $g_j = \operatorname{grad} \widehat{H}_j^1$

(pour $x \in \lambda$), donc on aurait des relations $g(x_\nu) = 0$ et $g(y_\nu) \neq 0$ qui sont contradictoires, car les premières entraînent $g = 0$ sur λ au voisinage de a.

Lemme 4. *Soit A l'adhérence d'un ouvert semi-analytique et soit $\Lambda \neq \emptyset$ une sous-variété analytique de dim. $< n$, contenue dans A. Alors $A \setminus \Lambda$ contient un arc (s)-analytique λ de bout $a \in \Lambda$, transversal à Λ, c'est-à-dire, tel que la tangente de λ en a n'est pas contenue dans celle de Λ.*

Démonstration. Prenons une partition normale (d'un Q') à un point de Λ, compatible avec A et Λ ; soient $\mathcal{N}_1$ et Q_1 la partition normale et le voisinage normal correspondants dans $\mathbb{R}^n$, et soient A_0, Λ_0 les images (par la carte) de $A \cap Q'$ et $\Lambda \cap Q'$. Prenons $p = \dim \Lambda_0$. Il existe un membre $\Gamma_1 \subset \Lambda_0$ de dim. p ; prenons une partiton engendrée $\mathcal{N}$ d'un Q en un point $a \in \Gamma_1$; on a alors $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cap Q = \Lambda_0 \cap Q$ (comme Γ_0 est un membre unique de dim. p. 92
$< p$). Il existe des membres de dim. $> p$, contenus dans A_0 (sinon, $A_0 \cap Q = \Gamma_0$ et A ne serait pas l'adhérence d'un ouvert) ; soit Γ un de la dimension minimum $q > p$. On a donc $(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma)) \cap Q = \Gamma_0$, d'où (proposition 7 du N° 11) $(\overline{\pi(\Gamma)} \setminus \pi(\Gamma)) \cap \pi(Q) = \pi(\Gamma_0)$, où $\pi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_q)$. Il existe alors un segment $I =]\pi(a), c] \subset \pi(\Gamma) \cap \pi_1^{-1}(\pi_0(a))$, où $\pi_1 : (x_1, \ldots, x_q) \mapsto (x_1, \ldots, x_p)$ et $\pi_0 : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_p)$. Alors $\lambda = \pi^{-1}(I) \cap \Gamma$ est un arc (s)-analytique de bout a, contenu dans $A_0 \setminus \Lambda_0$ (car il est contenu dans Γ) et transversal à Γ_0 (puisque $\lambda \subset \pi_0^{-1}(\pi_0(a))$), donc à Λ_0.

Proposition 1. *Soit f une fonction analytique au voisinage d'un point a d'un euclidien M, vérifiant $f(a) = 0$. Alors il existe un $0 < \theta < 1$ tel que*

$$|\,\mathit{grad}\, f(x)| \geq |f(x)|^\theta \quad \text{\textit{dans un voisinage de} } a\,.$$

Démonstration. Admettons que $f \not\equiv 0$ au voisinage de 0 (le cas $f \equiv 0$ étant trivial). On a $|f(x)| < 1$ dans un voisinage ouvert U de a ; soit B une boule compacte de centre a, contenue dans U. Posons $Z = \{x \in U : f(x) = 0\}$, $C_j = \{x \in U : |\operatorname{grad} f(x)|^{2j} < f(x)^{2j-2}\}$ et $Z_j = Z \cap \overline{C_j} \cap B,\ j = 2, 3, \ldots$. On a alors $C_{j+1} \subset C_j$, d'où $Z_{j+1} \subset Z_j$. Il suffit de prouver que pour chaque $k \geq 2$ il existe un $\ell > k$ tel que $Z_\ell = \emptyset$ ou $\dim Z_\ell < \dim Z_k$. En effet, on a alors $Z_p = \emptyset$ pour un p, donc $a \notin \overline{C_p}$, d'où $|\operatorname{grad} f(x)| \geq |f(x)|^{1-1/p}$ dans un voisinage de a.

Soit donc $k \geq 2$. On peut supposer que $s = \dim Z_k \geq 0$ (le cas $Z_k = \emptyset$ étant trivial). En vertu du corollaire des théorèmes 1 et 2, on a p. 93

$$(\sharp) \qquad |f(x)| \geq d\,\rho(x, Z_l)^{\ell - 1} \quad \text{pour } x \in \overline{C_k} \cap B$$

avec un $d > 0$ et un $\ell > k$. On va montrer que $\dim Z_\ell < \dim Z_k$. Supposons le contraire ; on a alors $\dim_c Z_\ell = \dim_c Z_k = s$ pour un $c \in B$. En prenant une partition normale en c, compatible avec Z_k et Z_ℓ, on voit qu'il existe un ouvert W tel que $\Lambda = W \cap Z_k = W \cap Z_\ell \neq \emptyset$ est une sous-variété analytique de dim. s ; on a évidemment $s < n$. Prenons, selon le lemme 4, un arc (s)-analytique $\lambda \subset \overline{C_\ell} \setminus \Lambda$ de bout $b \in \Lambda$, transversal à Λ. On a $\lambda = \xi(]0,1])$ avec un plongement $\xi : [0,1] \to M$ de la classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant $\xi(0) = b$ et $\varepsilon \leq |\xi'(s)| \leq K$ dans $[0,1]$ avec $K, \varepsilon > 0$. Comme on a $|\operatorname{grad} f(x)| \leq |f(x)|^{1-1/\ell}$ sur λ, donc, si l'on pose $\varphi(s) = f(\xi(s))$, on obtient

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad |\varphi'(s)| \leq K\,|\varphi(s)|^{1-1/\ell} \quad \text{dans } [0,1]\ ,$$

ce qui donne $|\varphi(s)| \leq \left(\dfrac{K\,s}{\ell}\right)^{\ell}$ dans $[0,1]$ [39]. Ceci entraîne $|f(x)| \leq M'\,|x-b|^\ell$ sur λ avec un $M' > 0$ (car $s/|\xi(s) - b|$ est borné), d'où, d'après ($\sharp$) et la déf. de Λ, $\rho(x,\Lambda) = \rho(x, Z_k) \leq M''\,|x-b|^{\frac{\ell}{\ell-1}}$ sur λ dans un voisinage de b, avec un $M'' > 0$, ce qui contredit la transversalité de λ à Λ en b.

Soit M un espace vectoriel euclidien de dim n.

Appelons *morceau (L)-analytique de dim k*, tout sous-ensemble semi-analytique borné σ de la forme $\sigma = \{u + \varphi(u) : u \in \Omega\}$ où Ω est un sous-ouvert d'un sous-espace M' de M de dim k, de supplémentaire orthogonal M'', et p. 94
$\varphi : M \to M''$ est analytique, vérifiant

$$(\triangledown) \qquad |\mathrm{d}_z\varphi| \leq K \quad \text{pour } z \in \Omega\ , \text{ avec une constante } K\ .$$

Alors, si I est un segment contenu dans Ω, la longueur de l'arc $\{u + \varphi(u) : u \in I\}$ est $\leq (1+K)\,|I|$, et la mesure de dim. k de σ est finie (ne surpasse pas $(1+K)^k\,|\Omega|$ [40]). La condition $(\triangledown)$ équivalente à la suivante

$$|h(x) \cdot e''| \geq \varepsilon \quad \text{pour} x \in \sigma \text{ avec une constante } \varepsilon > 0$$

[39] comme $|(\varphi(s)^{1/\ell})'| \leq \dfrac{K}{\ell}$, lorsque $\varphi(s) \neq 0$.

[40] puisque $\Omega \ni z \mapsto z + \varphi(z) \in \sigma$ est un difféomorphisme, et la valeur absolue du jacobien de l'application tangente $u \mapsto u + \mathrm{d}\varphi(u)$ (en un point de Ω quelconque) est

$$|(e_1 + \mathrm{d}\varphi(e_1)) \wedge \cdots \wedge (e_k + \mathrm{d}\varphi(e_k))| \leq (1+K)^k\ ,$$

$e_1, \ldots, e_k$ étant une base orthonormale de M'.

où e'' est un $(n-k)$-vecteur unitaire de M'' et $h(x)$ – celui du supplémentaire orthogonal de l'espace tangent de σ en x [41].

Lemme 5 (de Rham). *Tout ensemble semi-analytique relativement compact est une réunion finie de morceaux (L)-analytiques.*

Démonstration. Soit A un semi-analytique relativement compact de dim. k et soit $a \in \overline{A}$. Il suffit de prouver qu'il existe un voisinage U de a tel que $A \cap U \subset B \cup \bigcup_1^q \sigma_i$ avec un B semi-analytique de dim. $< k$ et avec des morceaux (L)-analytiques σ_i de dim. k. En effet, on en déduit que $A = B' \cup \bigcup_1^{q'} \sigma_i'$, avec B', σ_i' comme ci-dessus, et on procède par récurrence sur k. p. 95

Or, en utilisant une partition normale en a, compatible avec A, on voit qu'il existe un voisinage U de a et un semi-analytique B_0 de dim. $< k$ tels que

$$A_0 = A \cap U \setminus B_0 \subset \{x \in U : F_{k+1}(x) = \ldots = F_n(x) = 0\}$$

avec $F_{k+1}, \ldots, F_n$ analytiques dans U et telles que $g(x) = \operatorname{grad} F_{k+1}(x) \wedge \cdots \wedge \operatorname{grad} F_n(x) \neq 0$ sur A_0 [42]. L'ensemble Σ de $(n-k)$-vecteurs (décomp.) unitaires, comme un compact, contient des $e_0^{(1)}, \ldots, e_0^{(N)}$ tels que $\Sigma \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \{e : |e \cdot e_0^{(\alpha)}| > \dfrac{2}{3}\}$. Par conséquent, on a

$$(\cdot) \qquad A_0 \subset \bigcup_{\alpha=1}^{N} A^{(\alpha)}$$

---

[41] En effet, soit $e_1, \ldots, e_k$ une base orthonormale de M' ; comme $\widetilde{e} = (e_1 + \mathrm{d}\varphi(e_1)) \wedge \cdots \wedge (e_k + \mathrm{d}\varphi(e_k)) \neq 0$ est un k-vecteur de l'espace tangent de σ en x (on a posé $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}_x\varphi$), on a

$$|h(x) \cdot e''| = \left| \frac{\widetilde{e}}{|\widetilde{e}|} \cdot (e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) \right| = \frac{1}{|\widetilde{e}|}$$

(car $(e_i + \mathrm{d}\varphi(e_i)) \cdot e_j = e_i \cdot e_j$) donc la condition considérée équivaut à $|\widetilde{e}| \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$; par conséquent elle résulte de $(\triangledown)$; réciproquement, elle entraîne $|\mathrm{d}\varphi(e_i)| \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$, $i = 1, \ldots, k$, (ce qui donne $(\triangledown)$), car, si $\mathrm{d}\varphi(e_i) \neq 0$, la projection orthogonale de $\widetilde{e}$ sur $\bigwedge^k \widetilde{M}$, où $\widetilde{M} = \mathbb{R}\, e_1 + \cdots + \mathbb{R}\, \mathrm{d}\varphi(e_i) + \cdots + \mathbb{R}\, e_k$ est égale à

$$(e_1 + \pi(\mathrm{d}\varphi(e_1))) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi(e_i) \wedge \cdots \wedge (e_k + \pi \mathrm{d}\varphi(e_k))) = e_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi(e_i) \wedge \cdots \wedge e_k$$

(puisque $\pi(\mathrm{d}\varphi(e_\nu)), \nu \neq i$, sont dans $\mathbb{R}\, \mathrm{d}\varphi(e_i)$ où π est la projection orthogonale sur $\widetilde{M}$.

[42] On prend $B_0 = V^{k-1} \cup \cdots \cup V^0$, $A_0 = V^k \cap A$ et $F_j = \widehat{H}_j^k$.

où $A^{(\alpha)} = \{x \in A_0 : |g(x) \cdot e_0^{(\alpha)}| > \dfrac{2}{3}\,|g(x)|\}$ sont semi-analytiques dans U. Pour chaque $\alpha = 1, \ldots, N$ il existe une partition normale $\mathcal{N}^{(\alpha)}$ en a d'un $Q^{(\alpha)} \subset U$, compatible avec $A^{(\alpha)}$, selon un système normal de carte $a + \sum_1^n x_i e_i^{(\alpha)} \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$, où $e_1^{(\alpha)}, \ldots, e_n^{(\alpha)}$ est une base orthonormale de M, telle que pour $e^{(\alpha)} = e_{k+1}^{(\alpha)} \wedge \cdots \wedge e_n^{(\alpha)}$ on a $|e^{(\alpha)} - e_0^{(\alpha)}| < \dfrac{1}{3}$. En effet, soit $e_0^{(\alpha)} = e_{k+1}^0 \wedge \cdots \wedge e_n^0$ avec $e_{k+1}^0, \ldots, e_n^0$ orthonormale ; on peut choisir successivement $\delta = \delta_{k+1} > \ldots > \delta_n > 0$ de manière que l'on ait $|(e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n) - e_0^{(\alpha)}| < \dfrac{1}{3}$ lorsque $|e_j - e_j^0| < \delta_j,\ j = k+1, \ldots, n$, et que $|e_j - e_j^0| < \delta_{\ell+1},\ j = \ell+1, \ldots, n$, entraîne $\{x \in M' : |x - e_\ell^0| < \delta_\ell\} \neq \emptyset$, où p. 96
M' est le supplémentaire orthogonal de $\sum_{\ell+1}^n \mathbb{R}\, e_j$, $\ell = k+1, \ldots, n-1$; on effectue ensuite une construction standard d'un système normal, en choisissant $e_j \in M_j$ vérifiant $|e_j - e_j^0| < \delta_j$ et en prenant M_{j-1} (dans M_j) orthogonal à e_j.

Soit $B^{(\alpha)}$ la réunion des membres de dim. $< k$ de $\mathcal{N}^{(\alpha)}$ et soient $\sigma_1^{(\alpha)}, \ldots, \sigma_r^{(\alpha)}$ ceux de dim. k et contenus dans $A^{(\alpha)}$, Comme $g(x)$ est un $(n-k)$-vecteur du supplémentaire orthogonal de l'espace tangent de $\sigma_i^{(\alpha)}$ en $x \in \sigma_i^{(\alpha)}$, et comme on a $\left|\dfrac{g(x)}{|g(x)|} \cdot e^{(\alpha)}\right| > \dfrac{1}{3}$ les $\sigma_i^{(\alpha)}$ sont des morceaux (L)-analytiques. On a, d'après $(\cdot)$ et d'après $\dim A^{(\alpha)} = k$,

$$A \cap U \subset B_0 \cup A_0 \subset B_0 \cup \bigcup A^{(\alpha)} \subset B_0 \cup \bigcup_\alpha B^{(\alpha)} \cup \bigcup_{i,\alpha} \sigma_i^{(\alpha)} ,$$

ce qui termine la démonstration.

Le lemme 5 entraîne immédiatement

Proposition 2 (Lelong). *Tout ensemble semi-analytique relativement compact de dim. $\leq k$ est de mesure à k dim. finie (égale à la mesure de sa partie régulière de dim. k).*

On dit qu'un ensemble (localement) fermé A jouit de la *propriété de Whitney*, si pour chaque $a \in A$ il existe un voisinage U de A et des $M, \sigma > 0$ tels que chaque deux points $x, y \in U \cap A$ peuvent être joints par un arc contenu dans A de longueur $< M\,|x-y|^\sigma$.

Lemme 6. *Soient E, F deux compacts régulièrement situés. Si chacun d'eux jouit de la propriété de Whitney, il en est de même avec $E \cup F$.*

En effet, supposons que $a \in E \cap F$ (le cas contraire étant trivial) et soient U une boule de centre a, $M, \sigma > 0$, communs pour E, F selon la propriété de Whitney ; soit U_0 la boule de centre a et de rayon égal à la moitié de celui de U. Soient $x, y \in U_0 \cap (E \cup F)$; on a une inégalité exigée quand $x, y \in E$ ou $x, y \in F$; supposons donc que $x \in E$, $y \in F$. Il existe un $z \in E \cap F \cap U$ tel que $\rho(x, E \cap F) = |x - z|$; il existe ensuite des arcs ℓ_1, ℓ_2 joignant (dans A) x avec z, y avec z, dont la longueur ne surpasse pas $M\,|x-z|^\sigma$ ou $M\,|y-z|^\sigma$ respectivement. Or, on a p. 97

$$|x - y| \geq \rho(x, F) \geq d\,\rho(x, E \cap F)^N = d\,|x - z|^N$$

(avec $d, N > 0$ indépendant de x, y), d'où $|x-z| \leq \left(\dfrac{1}{d}\,|x-y|\right)^{\frac{1}{N}}$ et $|z-y| \leq |x-y| + \left(\dfrac{1}{d}\,|x-y|\right)^{\frac{1}{N}}$, ce qui donne une inégalité exigée pour l'arc $\ell_1 \cup \ell_2$ qui joint x avec y dans A.

Proposition 3. *Tout ensemble semi-analytique (localement) fermé jouit de la propriété de Whitney (où l'arc peut être toujours choisi semi-analytique).*

Démonstration. On peut supposer que l'ensemble semi-analytique A en question soit compact. Procédons par récurrence sur $k = \dim A$. Le cas $k = 0$ étant trivial, supposons que l'assertion soit vraie pour les dimensions $< k$. D'après les lemmes 5, 6 et le théorème 2, il suffit de prouver que pour tout morceau (L)-analytique σ de dim. k, $\overline{\sigma}$ jouit de la propriété de Whitney. Soit $\sigma = \{u + \varphi(u) : u \in \Omega\}$, M', M'' et K comme dans la définition, $k = \dim M'$, et soit $\pi : M \to M'$ la projection orthogonale. Le cas où $a \in \sigma$ étant trivial, supposons que $a \in \gamma = \overline{\sigma} \setminus \sigma$; or, γ est de dim. $< k$; soient U une boule de centre a, $M, \sigma > 0$, selon la propriété de Whitney pour γ. Soit U_0 la boule p. 98
du centre a et de rayon $\dfrac{r}{2+K}$, r étant celui de U. Soient $x, x' \in U_0 \cap \overline{\sigma}$ et posons $u = \pi(x)$, $u' = \pi(x')$. Il existe un $s \in \pi(\gamma)$ tel que $\rho(u, \pi(\gamma)) = |u - s|$. Si $x \in \sigma$, alors $\{\tau + \varphi(\tau) : \tau \in [u, s[\}$ est un arc (s)-analytique de bout $z \in \gamma$, et son adhérence ℓ, de longueur $\leq (1 + K)\,|u - s|$, joint x avec z dans $\overline{\sigma}$. Comme

$$|x - z| \leq (K+1)\,|u - s| \leq (K+1)\,|u - \pi(a)| \leq (K+1)\,|x - a|\,,$$

on a $|z - a| \leq (K+2)\,|x - a|$, donc $z \in U$. Si $x \in \gamma$, on pose $z = x$ et $\ell = \{x\}$. Soient s', ℓ', z' construits pareillement pour x'. Si $|u' - u| <$

$\max(\rho(u,\pi(\gamma)),\rho(u',\pi(\gamma)))$, alors la longueur de l'arc $\{\tau+\varphi(\tau):\tau\in[u,u']\}$ qui joint x avec x' dans σ, ne surpasse pas $(1+K)\,|x-x'|$. Dans le cas contraire on a $|u'-u|\geq\max(|u-s|,|u'-s'|)$ donc la longueur de ℓ, ainsi que celle de ℓ', est $\leq(1+K)\,|u'-u|\leq(1+K)\,|x'-x|$; or, il y a un arc ℓ_0 joignant z et z' dans γ, de longueur $\leq M\,|z'-z|^\sigma$; comme on a

$$\begin{aligned}|z-z'| &\leq |x-z|+|x'-x|+|x'-z'|\\ &\leq (1+K)\,|u-s|+|x'-x|+(1+K)\,|u'-s'|\\ &\leq (2(1+K)+1)\,|x'-x|\ ,\end{aligned}$$

on obtient l'inégalité exigée pour l'arc $\ell\cup\ell_0\cup\ell'$ qui joint x et x' dans $\overline{\sigma}$.

Comme une application des théorèmes 1 et 2 on va démontrer le suivant

Théorème 3. *Soit E un sous-ensemble semi-analytique d'une variété analytique M. Si E est ouvert (respectivement fermé), chaque point de M possède un voisinage U tel que $E\cap U$ est de la forme*

$$E\cap U=\bigcup_{i=1}^{p}\bigcap_{j=1}^{q}\{f_{i,j}>0\}\qquad (\textit{resp.}\quad E\cap U=\bigcup_{i=1}^{p}\bigcap_{j=1}^{q}\{f_{i,j}\geq 0\})$$

avec $f_{i,j}$ analytiques dans U.

Lemme 7. *Soit G_0 un ouvert borné d'un euclidien, de la forme* p. 99
$G_0=\{f_1>0,\ldots,f_p>0\}$ avec $f_1,\ldots,f_p$ analytiques dans un ouvert contenant $\overline{G_0}$, et soit $Z_0=\{x\in G_0:g(x)=0\}$ avec g analytique dans un ouvert contenant $\overline{G_0}$. Alors pour chaque ouvert semi-analytique $G\supset Z_0$ il existe $d,N>0$ tels que

$$Z_0\subset\{x\in G_0:|g(x)|\leq d\,|h(x)|^N\}\subset G\ ,$$

où $h=f_1\cdots f_p$.

Démonstration du lemme.[43] La première inclusion étant toujours trivialement satisfaite, il reste à prouver que G contient un ensemble en question avec $d,N>0$. Comme les ensembles $\overline{Z_0}$ et $M\setminus G$ sont régulièrement situés (théorème 1), on a

$$B=\{x\in G_0:\rho(x,\overline{Z_0})\leq\overline{d}\,\rho(x,\overline{Z_0}\setminus G)^{\overline{N}}\}\subset G$$

[43]Comme on n'utilisera que des sous-ensembles de $\overline{G_0}$, on admettra $\rho(x,\emptyset)=d(\overline{G_0})$ (pour avoir $\rho(x,E)$ décroissante en E).

avec $\overline{d}, \overline{N} > 0$ (à cause de l'inégalité contraire dans $G_0 \setminus G$). On a $h > 0$ dans G_0 et $h = 0$ dans $\Sigma = \overline{G_0} \setminus G_0$, donc

$$|h(x)| \leq K\, \rho(x, \Sigma) \quad \text{dans } \overline{G_0}$$

avec un $K > 0$. D'autre part (corollaire des théorèmes 1 et 2),

$$|g(x)| \geq d_0\, \rho(x, \overline{Z_0} \cup \Sigma)^{N_0} \quad \text{dans } \overline{G_0}$$

avec des $d_0, N_0 > 0$. Par conséquent, si $x \in G_0$ et $|g(x)| < d_1\, |h(x)|^{N_0}$ avec $d_1 = d_0/K^{N_0}$, on a $\min(\rho(x, \overline{Z_0}), \rho(x, \Sigma)) = \rho(x, \overline{Z_0} \cup \Sigma) < \rho(x, \Sigma)$, donc $\rho(x, \overline{Z_0} \cup \Sigma) = \rho(x, \overline{Z_0})$, d'où $|g(x)| \geq d_0\, \rho(x, \overline{Z_0})^{N_0}$; d'autre part, comme p. 100
$\overline{Z_0} \setminus G \subset \Sigma$ (puisque Z_0 est fermé dans G_0) , on a $|h(x)| \leq K\, \rho(x, \overline{Z_0} \setminus G)$; donc, si en outre $|g(x)| < d_2\, |h(x)|^{N_0 \overline{N}}$ avec $d_2 = \overline{d}^{N_0}\, d_0/K^{N_0 \overline{N}}$, il vient $x \in B$. Ceci montre que B contient 1'ensemble, en question avec $d, N > 0$ convenablement choisis, ce qui termine la démonstration.

Remarque. Le lemme 7 résulte immédiatement de la proposition du N° 24 appliquée avec les restrictions de g et h à $\overline{G_0} \setminus G$.

Démonstration du théorème. L'assertion pour E ouvert entraînant celle pour E fermé, on va s'occuper du cas où E est ouvert. Soit $a \in M$; on peut admettre que M soit euclidien. Il existe un voisinage $V = \{\varepsilon^2 - |x - a|^2 > 0\}$ de a tel que

$$E \cap V = \bigcup_{i=0}^{p} \left(\bigcap_{j=1}^{q} \{x \in V : f_{i,j}(x) > 0\} \cap \{x \in V : g_i(x) = 0\} \right) ,$$

avec $f_{i,j}, g_i$ analytiques au voisinage de $\overline{V}$. En posant $f_{0,j}(x) = \varepsilon^2 - |x - a|^2$ on a donc

$$E \cap V = \bigcup_{i=0}^{p} \left(\bigcap_{j=0}^{q} \{f_{i,j} > 0\} \cap \{g_i = 0\} \right) .$$

Posons $G_i = \bigcap_{j=0}^{q} \{f_{i,j} > 0\}$; on a $Z_i = G_i \cap \{g_i = 0\} \subset E \cap V$, donc selon le lemme 7 on a $Z_i \subset G_i \cap \{\psi_i > 0\} \subset E \cap V$, où $\psi_i = d_i^2 \prod_{j=1}^{q} f_{i,j}^{2N_i} - g_i^2$ avec certains $d_i, N_i > 0$. Ceci donne

$$E \cap V = \bigcup_{i=0}^{p} \left(\bigcap_{j=0}^{q} \{f_{i,j} > 0\} \cap \{\psi_i > 0\} \right) .$$

19 [Lemme de l'aile et conséquences]

p. 101

Lemme 1. *Soit $\mathcal{N}$ une partition normale dans $\mathbb{R}^n$, Γ_0 le membre de la dimension minimale k, Γ un membre de la dim. $\ell > k$, et soit $\pi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$ avec $\ell \leq m \leq n$. On a donc $\Gamma_0 \subset \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ et $\pi(\Gamma_0) \subset \overline{\pi(\Gamma)} \setminus \pi(\Gamma)$. Considérons Γ, Γ_0 comme applications $\Gamma : \pi(\Gamma) \to \mathbb{R}^{n-m}$, $\Gamma_0 : \pi(\Gamma_0) \to \mathbb{R}^{n-m}$. On a alors $\lim_{v \to v_0} \Gamma(v) = \Gamma_0(v_0)$ pour chaque $v_0 \in \pi(\Gamma_0)$.*

En effet, on a $E = \overline{\Gamma} \cap (\{v_0\} \times \mathbb{R}^{n-m}) \subset Q$ (puisque $E = \{H^m_{m+1} = \ldots = H^m_n = 0\}$), donc, comme $\overline{\Gamma} \cap Q = \bigcup_{i=0}^s \Gamma_i$ et $\pi(\Gamma_0) \cap \pi(\Gamma_i) = \emptyset,\ i = 1, \ldots, s$, on a $E = \Gamma_0 \cap (\{v_0\} \times \mathbb{R}^{n-m}) = \{(v_0, \Gamma_0(v_0))\}$.

Proposition 1. (Whitney's "wing's lemma") *Soit Γ_0 un membre de dim $k < n$ d'une partition normale $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{R}^n$. Posons $\Gamma_{00} = \pi(\Gamma_0)$ où $\pi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{k+1})$, et considérons Γ_0, Γ_{00} comme applications $\Gamma_0 : \Gamma_{00} \to \mathbb{R}^{n-k-1}$, $\Gamma_{00} : \pi_0(\Gamma_0) \to \mathbb{R}$ où $\pi_0 : (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_k)$. Si $\Gamma \in \mathcal{N}$ et $a \in \Gamma_0 \subset \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$, alors Γ contient un semi-analytique Λ, qui est (graphe d') une application analytique $\Lambda : \Omega \to \mathbb{R}^{n-k-1}$, où $\Omega = U \cap \{x_{k+1} > \Gamma_{00}(u)\}$ soit $\Omega = U \cap \{x_{k+1} < \Gamma_{00}(u)\}$ avec un voisinage U de $\pi(a)$ (contenu dans $\pi_0(\Gamma_0) \times \mathbb{R}$), telle que $\lim_{v \to v_0} \Lambda(v) = \Gamma_0(v_0)$ pour chaque $v_0 \in U \cap \Gamma_{00}$.*

Démonstration. On peut admettre que k est la dimension minimale de $\mathcal{N}$ et que $a = 0$ (en prenant une partition normale engendrée en a). Procédons par récurrence sur n, k étant fixé. L'assertion est triviale pour $n = k+1$. Admettons la vraie pour $n-1$ avec un $n > k+1$.

Supposons d'abord que $\dim \Gamma = n$. Soit Γ_1 un membre contenu dans $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ de dimension maximum ℓ. Le cas $\ell = k$ étant trivial (car on a alors p. 102 $(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap Q = \Gamma_0$, d'où $\Gamma = Q \setminus \Gamma_0$, puisque $k \leq n-2$), supposons que $\ell > k$. Posons $\Gamma'_0 = \pi'(\Gamma_0)$ et $\Gamma' = \pi'(\Gamma_1)$, où $\pi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Pour tout membre $\Gamma_2 \neq \Gamma_1$ vérifiant $\pi(\Gamma_2) = \Gamma'$, on a $|D^n_\ell(\pi''(w))| < M\,|\Gamma_2(w) - \Gamma_1(w)|$ sur Γ', avec une constante$M$, où $\pi'' : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_\ell)$. Par conséquent,

$$\widetilde{\Gamma}_1 : Q_0 \cap \Gamma' \ni w \mapsto \Gamma_1(w) + \varepsilon\, D^n_\ell(\pi''(w))\, |z - \Gamma'_0(u)|^2$$

pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, est contenu dans V^n, où Q_0 est un voisinage semi-analytique de 0, vérifiant $\overline{Q_0} \subset \pi'(Q)$, $w = (u, z)$, et Γ'_0 est l'application de $\pi_0(Q)$ dans $\mathbb{R}^{n-1-k}$ de graphe Γ'_0. Prenons un $c \in \Gamma_1$ tel que $c' = \pi'(c) \in Q_0$; on a $(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap U \subset \Gamma_1$ avec un voisinage U de c, et on peut admettre que $U = U' \times U''$ soit un intervalle tel que $\Gamma_1 \cap U'$ soit graphe d'une application de

U' dans U'' ; si $\ell < n-1$, l'ensemble $U \setminus \Gamma_1$ est connexe, et si $\ell = n-1$, il est la réunion de ses deux composantes connexes $\{t > \Gamma_1(w)\}$ et $\{t < \Gamma_1(w)\}$; par conséquent, comme l'ensemble $\Gamma \cap U$ est ouvert et fermé dans $U \setminus \Gamma_1$, il contient toujours $\{c'\} \times]\Gamma_1(c'), \Gamma_1(c') + \delta[$ ou $\{c'\} \times]\Gamma_1(c') - \delta, \Gamma_1(c')[$ avec un $\delta > 0$. II en résulte que, pour un $\varepsilon > 0$ (suffisamment petit), $\widetilde{\Gamma}_1 \subset \Gamma$.

Passons maintenant au cas général et posons $\Gamma_* = \Gamma$ ou $\Gamma_* = \widetilde{\Gamma}_1$ selon que $\dim \Gamma < n$ ou $\dim \Gamma = n$; observons que Γ_* est semi-analytique (dans le deuxième cas, comme l'image de $\Gamma_1 \cap (Q_0 \times \mathbb{R})$ par un isomorphisme analytique dans $\pi'(Q) \times \mathbb{R}$) ; posons encore $\Gamma' = \pi'(\Gamma)$ dans le cas $\dim \Gamma < n$, et $\Gamma'_* = \pi'(\Gamma_*)$ (dans tous les deux cas). Prenons U, Ω, Λ' pour γ'_0 et Γ' (l'hypothèse de récurrence), U étant si petit que l'on ait $\Lambda' \subset \Gamma'_*$ (selon le cas on a $\Gamma'_* = \Gamma'$ ou $\gamma' \cap Q_0$). Posons $\Lambda = (\Lambda' \times \mathbb{R}) \cap \Gamma_*$ c'est-à-dire $\Lambda(v) = (\Lambda'(v), \Gamma_*(v, \Lambda'(v)))$ pour $v \in \Omega$, où l'on considère Γ_* comme application de Γ'_* dans $\mathbb{R}$; alors, si $v \in \Omega$ tend vers un $v_0 \in U \cap \Gamma_{00}$, $(v, \Lambda'(v)) \in \Gamma'$ p. 103
tend vers $(v_0, \Gamma'_0(v_0))$, d'où (lemme 1, définition de $\widetilde{\Gamma}_1$) $\Gamma_*(v, \Lambda'(v))$ tend vers $\widetilde{\Gamma}_0(v_0, \Gamma'_0(v_0))$, où $\widetilde{\Gamma}_0$ est l'application de Γ'_0 dans $\mathbb{R}$ de graphe Γ_0, donc $\Lambda(v)$ tend vers $(\Gamma'_0(v_0), \widetilde{\Gamma}_0(v_0, \Gamma'_0(v_0))) = \Gamma_0(v_0)$.

La proposition 1 entraîne la suivante

Proposition 2 (Bruhat - Cartan - Wallace). *Si A est semi-analytique et si $a \in \overline{A}$ sans être point isolé de A, alors A contient un arc (s)-analytique de bout a.*[44]

En effet, il suffit de prendre une partition normale en a compatible avec A et $\{a\}$, et d'appliquer la proposition 1 aux (images des) membres : $\{a\}$ et un autre $\neq \{a\}$ et contenu dans A.

Comme une application de la proposition 2 montrons la suivante

Proposition 3 (sur une propriété de Whitney). *Soit A une sous-variété analytique d'un euclidien M et supposons que A soit semi-analytique ; soit $a \in \overline{A}$. Alors l'angle $\delta(x)$ entre $x - a$ et l'espace tangent de A en $x \in A$ tend vers zéro lorsque $x \neq a$ tend vers a ($\lim_{x \to a} \cos \delta(x) = 1$* [45]*).*

Démonstration. Prenons une partition normale en a, d'un Q, compatible avec A. Alors $A_0 = A \cap V^k$ où $k = \dim A$, est dense dans $A \cap Q$, et $g(x) =$ p. 104
$\operatorname{grad} \widehat{H}^k_{k+1}(x) \wedge \cdots \wedge \operatorname{grad} \widehat{H}^k_n(x) \neq 0$ est un multivecteur du supplémentaire

[44] En particulier, chaque membre de dim > 0 d'une partition normale en a contient un

orthogonal de l'espace tangent de A en x, pour chaque $x \in A_0$. Soit $\theta < 1$. Comme on a

$$\cos\delta(x) = \frac{|g(x) \wedge (x-a)|}{|g(x)|\,|x-a|}\ ,$$

l'ensemble $E_0 = \{x \in A_0 : \cos\delta(x) < \theta\}$ est semi-analytique.

Il en résulte que $a \notin \overline{E_0}$, car dans le cas contraire, d'après la proposition 2 (E_0 comme une variété n'a pas de points isolés), E_0 contiendrait un arc (s)-analytique λ de bout a, et alors $\cos\delta'(x) \leq \cos\delta(x) < \theta$ sur λ, où $\delta'(x)$ est l'angle entre $x-a$ et la tangente de λ en x, ce qui n'est pas possible, puisque $\lambda \cup \{a\}$ est de la classe $\mathcal{C}^1$. Comme E_0 est dense dans $E = \{x \in A \cap Q : \cos\delta(x) < \theta\}$, donc $a \notin \overline{E}$, d'où il vient $\cos\delta(x) \geq \theta$ sur A dans un voisinage de a.

Proposition 4. *Soient Γ_0, Γ deux membres d'une partition normale dans une variété analytique M, tels que $\Gamma_0 \subset \overline{\Gamma}$. Si $a \in \sigma \cap \Gamma_0$, où σ est une variété $\mathcal{C}^1$ transversale à Γ^0 en a (c'est-à-dire, l'espace tangent de M en a est la somme directe de ceux de Γ_0 et σ), alors $\sigma \cap \Gamma \neq \emptyset$.*

Démonstration. On peut supposer que M est vectoriel de dim. n, la carte étant linéaire, et (en supprimant le cas trivial) que $\Gamma \neq \Gamma_0$. Soit M', M'' les sous-espaces correspondants (par la carte) à celui des $(x_1, \ldots, x_k)$ ou à celui des $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ respectivement où $k = \dim\Gamma_0 < n$; on a donc

$$\Gamma_0 \cap (U' + M'') = \{u + \eta(u) : u \in U'\}$$

avec une application analytique $\eta : U' \to M''$ et un voisinage U' de a' dans M', où $a = a' + a''$, $a' \in M'$, $a'' = \eta(a') \in M''$. Si l'on prend U' suffisamment p. 105
petit, alors, d'après la proposition 1, il existe une $\widetilde{\eta} : U' \times [0,1] \to M''$ continue telle que $\widetilde{\eta}(u,0) = \eta(u)$ dans U' et $u + \widetilde{\eta}(u,t) \in \Gamma$ lorsque $u \in U$ et $0 < t \leq 1$ (on considère $u \mapsto \Lambda(u, \Gamma_{00}(u) + \varepsilon_0\, t)$ avec un $\varepsilon_0 \neq 0$ suffisamment petit). En changeant M' on peut exiger que $\mathrm{d}_{a'}\eta = 0$. Introduisons dans M une structure euclidienne de manière que M', M'' soient orthogonaux.

arc (s)-analytique de bout a.

[45]Le cosinus de l'angle entre un sous-espace N d'un espace vectoriel euclidien M et un $x \in M$ $(x \neq 0)$ est égal à

$$\sup\{e \cdot \frac{x}{|x|} : |e| = 1,\ e \in N\} = \frac{|g \wedge x|}{|g|\,|x|}$$

où g est un multivecteur du supplémentaire orthogonal de N.

À cause de la transversalité, σ contient un $\{v+\zeta(v) : v \in U''\}$ avec un $\zeta : U'' \to M'$ de la classe $\mathcal{C}^1$, où U'' est un voisinage de a''. Posons $B'(r) = \{u \in M' : |u-a'| \le r\}$ et $B''(r) = \{v \in M'' : |v-a''| \le r\}$. On a $B''(d) \subset U''$ et $\zeta(B''(d)) \subset B'(L\,d)$ pour $d > 0$ suffisamment petit, avec une constante $L > 0$ (indépendante de d) ; on a ensuite $B'(\delta) \subset U'$ et $\eta(B'(\delta)) \subset B''(\dfrac{\delta}{2L})$ pourvu que $\delta > 0$ soit suffisamment petit ; on a enfin $|\eta'(u) - \eta(u)| < \dfrac{\delta}{2L}$ dans $B'(\delta)$ pour $\eta'(u) = \widetilde{\eta}(u,t')$ avec $0 < t' \le 1$ (t' suffisamment petit), d'où $\eta'(B'(\delta)) \subset B''(\dfrac{\delta}{L})$. En choisissant $d, \delta > 0$ de manière que $\delta = L\,d$, on voit que $u+v \mapsto \eta'(u)+\zeta(v)$ applique $B'(\delta)+B''(d)$ dans lui-même, ce qui donne (Brouwer) $\overline{u}+\overline{v} = \eta'(\overline{u})+\zeta(\overline{v})$ avec $\overline{u} \in U'$, $\overline{v} \in U''$, d'où $\eta'(\overline{u}) = \overline{v}$, $\zeta(\overline{v}) = \overline{u}$ et

$$\overline{u}+\overline{v} = \overline{u}+\widetilde{\eta}(\overline{u},t') = \overline{v}+\zeta(\overline{v}) \in \Gamma \cap \sigma\ .$$

20 [Ensembles semi-algébriques]

Étant donné un anneau $\mathcal{A}$ des fonctions réelles sur un ensemble X, notons avec $S(\mathcal{A})$ la famille des sous-ensembles de X décrits par $\mathcal{A}$ (alors un sous-ensemble E d'une variété analytique M est semi-analytique si et seulement si chaque $a \in M$ possède un voisinage U tel que $E \cap U \in S(\mathcal{A}_U)$, ou $\mathcal{A}_U$ est l'anneau des fonctions analytiques réelles dans U) ; elle est toujours stable pour le complément et pour la réunion et l'intersection finies [46].

Soit M un espace affine réel. On appelle *ensembles semi-algébriques* les éléments de $S(\mathcal{P})$ où $\mathcal{P}$ est l'anneau de polynômes sur M. p. 106

Observons que si $f = (f_1, \ldots, f_p) : X \to \mathbb{R}^p$ avec $f \in \mathcal{A}$ et $E \subset \mathbb{R}^p$ est semi-algébrique, alors $f^{-1}(E) \in S(\mathcal{A})$.

Lemme 1. *L'ensemble*

$$\{(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : \alpha_0 z^m + \cdots + \alpha_m = 0 \textit{ a précisément } k \textit{ racines complexes}\}$$

est semi-algébrique, $k = 0, 1, \ldots, \infty$ [47].

[46] elle est la plus petite famille de sous-ensermbles de X. stable pour ces opérations, contenant tous les $\{f > 0\}$ avec $f \in \mathcal{A}$.

[47] $k = \infty$ veut dire $\alpha_0 = \ldots = \alpha_m = 0$

Démonstration. Soient $m > 0$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ avec $\alpha_0 \neq 0$; posons $p_\alpha = \alpha_0 z^m + \cdots + \alpha_m \in \mathbb{C}[z]$. Soit ℓ le degré du p.g.c.d. de p_α et p'_α ; alors $2m - 1 - \ell$ est celui du p.p.c.m. (de p_α et p'_α) ; ensuite, $m - \ell$ est le nombre des racines complexes (distinctes) de p_α. Soit $0 < k < \infty$; la condition

(*) $p_\alpha \, q_\xi = p'_\alpha \, r_\xi$ avec certains $q_\xi = \xi_0 z^{k-1} + \cdots + \xi_{k-1}$,
$r_\xi = \xi_k z^k + \cdots + \xi_{2k} \in \mathbb{C}[z]$, où $0 \neq \xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{2k}) \in \mathbb{C}^{2k+1}$

signifie que $2m - \ell - 1 \leq m + k - 1$ ou bien que $m - \ell \leq k$, c'est-à-dire, que p_α a au plus k racines. Comme on a $p_\alpha \, q_\xi - p'_\alpha \, r_\xi = t_{\beta(\alpha,\xi)}$ où $t_\lambda = \lambda_0 z^{m+k-1} + \cdots + \lambda_{m+k-1} \in \mathbb{C}[z]$ pour $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{m+k-1}) \in \mathbb{C}^{m+k}$ et $\beta : \mathbb{C}^{m+1} \times \mathbb{C}^{2k+1} \to \mathbb{C}^{m+k}$ est bilinéaire, la condition (*) signifie que $\beta(\alpha, \xi) = 0$ avec un $\xi \neq 0$, c'est-à-dire, que $\mathbb{C}^{2k+1} \ni \xi \mapsto \beta(\alpha, \xi) \in \mathbb{C}^{m+k}$ n'est pas injective. Par conséquent, $\{\alpha \in \mathbb{C}^{m+1} : \alpha_0 \neq 0$ et p_α a au plus k racines$\}$ est l'ensemble des zéros communs de certains polynômes en α. Les cas $k = 0, \infty$ ou $m = 0$ étant triviaux, ceci donne le lemme par récurrence sur m.

Lemme 2. *Soit E un espace topologique connexe et soient $a_i : E \to \mathbb{R}$* p. 107
continues, $i = 0, \ldots, m$. Si $p_x = a_0(x) z^m + \cdots + a_m(x) \in \mathbb{C}[z]$ a précisément k (où $k < \infty$) racines complexes pour chaque $x \in E$, alors il existe $\xi_i : E \to \mathbb{R}$ continues, $i = 1, \ldots, r$, tel que pour chaque $x \in E$ on a $\xi_1(x) < \ldots < \xi_r(x)$ et $\xi_1(x), \ldots, \xi_r(x)$ sont tous les racines réelles de p_x.

Démonstration. Soit $x_0 \in E$. Soient $z_1, \ldots, z_k$ toutes les racines complexes de p_{x_0} ; les boules $B_i = \{|z - z_i| \leq \varepsilon\}$ sont disjointes pour un $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage U de x_0 tel que pour chaque $x \in U$, B_i contient une, donc précisément une racine de p_x (Rouché) ; notons la avec $\zeta_i(x)$; ainsi $\zeta_1(x), \ldots, \zeta_k(x)$ sont toutes les racines de p_x, pour $x \in U$. Comme l'application $U \ni x \mapsto \zeta_i(x) \in B_i$ est de graphe (égal à $\{(x, z) \in U \times B_i : p_x(z) = 0\}$) fermé, donc ($B_i$ étant compact) elle est continue. Comme $\overline{\zeta_i(x)}$ est aussi une racine de p_x on a, grâce à la continuité de $x \mapsto \zeta_i(x)$, $\overline{\zeta_i(x)} \neq \zeta_i(x)$ ou $\overline{\zeta_i(x)} \equiv \zeta_i(x)$ dans un voisinage de x_0. Ceci prouve que le nombre des racines réelles de p_x est localement constant (en x), donc (vu la connexité de E) constant dans E ; notons le avec r, et soient $\xi_1(x) < \ldots < \xi_r(x)$ toutes les racines réelles de p_x, pour $x \in E$. Soient $\zeta_{k_1}(x_0) < \ldots < \zeta_{k_r}(x_0)$ toutes les racines réelles de p_{x_0} ; alors $\zeta_{k_1}(x), \ldots, \zeta_{k_r}(x)$ sont toutes les racines réelles de p_x et (grâce à la continuité de $x \mapsto \zeta_{k_i}(x)$) $\zeta_{k_1}(x) < \ldots < \zeta_{k_r}(x)$ dans un voisinage de x_0, ce qui donne $\xi_i(x) = \zeta_{k_i}(x)$ au voisinage de x_0. Ceci montre la continuité de ξ_i.

Lemme 3. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau de fonctions réelles continues sur un espace* p. 108

topologique X. Supposons que chaque ensemble de $S(\mathcal{A})$ n'ait qu'un nombre fini des composantes connexes, chacune d'elles étant dans $S(\mathcal{A})$. Alors pour chaque $E \in S(\mathcal{A}[t])$ il existe une partition finie $\mathcal{J} \subset S(\mathcal{A})$ de X en ensembles connexes, et, pour chaque $A \in \mathcal{J}$, des fonctions $\xi_{A,1}(x) < \ldots < \xi_{A,k_A}(x)$ continues sur A (il se peut $k_A = 0$), tels que E soit une réunion d'ensembles de la forme

$$(**) \qquad \{x \in A,\ \xi_{A,\nu}(x) < t < \xi_{A,\nu+1}(x)\} \quad \textit{soit} \quad \{x \in A,\ t = \xi_{A,\mu}(x)\}$$

(avec $A \in \mathcal{J}$, $\nu = 0, \ldots, k_A$, où $\xi_{A,0} = -\infty$, $\xi_{A,k_A+1} = \infty$ et $\mu = 1, \ldots, k_A$), chacun d'eux étant dans $S(\mathcal{A}[t])$.

Démonstration. Soit $E \in S(\mathcal{A}[t])$; alors E est décrit (dans $X \times \mathbb{R}$) par certains $f_j(x,t) = a_{j,0}(x)t^m + \cdots + a_{j,m}(x)$, $j = 1, \ldots, N$ avec $a_{j,\nu} \in \mathcal{A}$. Posons $\varphi_{j,\sigma} = \dfrac{\partial^\sigma f_j}{\partial t^\sigma}$, $j = 1, \ldots, N$; $\sigma = 1, \ldots, m$, et, pour chaque $\psi \subset \chi = \{1, \ldots, N\} \times \{1, \ldots, m\}$, $f_\psi = \prod\{\varphi_{j,\sigma} : (j,\sigma) \in \psi\}$. Soit $A_{\psi,k}$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $f_\psi(x,t) = 0$ a précisément k racines complexes, $k = 0, \ldots, m, \infty$. D'après le lemme 1, $A_{\psi,k} \in S(\mathcal{A})$ (comme l'image inverse d'un semi-algébrique par une application de la forme $(a^{(1)}, \ldots, a^{(L)}) : X \to \mathbb{R}^L$ avec $a^{(i)} \in \mathcal{A}$). Comme $\{A_{\psi,k}\}_{k=0,\ldots,m,\infty}$ est une partition finie de X, pour chaque $\psi \subset \chi$, il en est de même avec la famille $\mathcal{J}$ des composantes connexes des intersections $\bigcap\{A_{\psi,k_\psi} : \psi \subset \chi\}$.

Soit $A \in \mathcal{J}$ et prenons $\xi_{A,1}(x) < \ldots < \xi_{A,k_A}(x)$ selon le lemme 2 pour la restriction de f_ψ à $A \times \mathbb{R}$, où $\psi = \{(j,\sigma) : \varphi_{j,\sigma} \neq 0 \text{ sur } A \times \mathbb{R}\}$; c'est-à-dire, $\xi_{A,\nu} : A \to \mathbb{R}$ sont continues et $\{x \in A : f_\psi(x,t) = 0\} = \bigcup_{\nu=1}^{k_A} \xi_{A,\nu}$. Vérifions p. 109
que l'on a $\varphi_{j,\sigma} \neq 0$ ou $\varphi_{j,\sigma} \equiv 0$ sur chaque ensemble de la forme $(**)$. En effet, si B est le premier des ensembles $(**)$, on a $f_\psi \neq 0$ sur B, d'où $\varphi_{j,\sigma} \neq 0$ ou $\varphi_{j,\sigma} \equiv 0$ sur B, selon que $(j,\sigma) \in \psi$ ou non. Dans l'autre cas, $B = \xi_{A,\mu}$; le cas où $\varphi_{j,\sigma} \equiv 0$ sur $A \times \mathbb{R}$ étant trivial, supposons que $\varphi_{j,\sigma} \not\equiv 0$ sur $A \times \mathbb{R}$ et prenons $\xi_1(x) < \ldots < \xi_r(x)$ selon le lemme 2 pour la restriction de $\varphi_{j,\sigma}$ à $A \times \mathbb{R}$; donc $\{(x \in A,\ \varphi_{j,\sigma}(x,t) = 0\} = \bigcup_{\rho=1}^{r} \xi_\rho$; par conséquent, chaque ξ_ρ est contenue dans $\bigcup \xi_{A,\nu}$, donc (comme $\xi_{A,\nu}$ sont ouvertes et fermées dans $\bigcup \xi_{A,\nu}$) $\xi_\rho = \xi_{A,\nu_\rho}$ avec un ν_ρ unique ; il en résulte que $\varphi_{j,\sigma} \equiv 0$ ou $\varphi_{j,\sigma} \neq 0$ sur B selon que $\nu_\rho = \mu$ pour un ρ ou non.

Montrons maintenant que les ensembles $(**)$ sont dans $S(\mathcal{A}[t])$. Or, soit B un tel ensemble. On a donc

$$B \subset T = \bigcap_{j=1}^{N} \bigcap_{\sigma=0}^{m} \{x \in A,\ \varphi_{j,\sigma}(c,t) \in \Theta_{j,\sigma}\}$$

avec $\Theta_{j,\sigma} = \{t < 0\}$ ou $\{0\}$ ou $\{t > 0\}$. Il suffit de prouver que $B = T$ (puisque $T \in S(\mathcal{A}[t])$). Supposons le contraire : $(a,t) \in T \setminus B$ avec un (a,t) ; on a alors $(a,t_0) \in B$ avec un t_0 ; selon le lemme de Thom $(\{a\} \times \mathbb{R}) \cap T$ est convexe, donc $\{a\} \times [t,t_0] \subset T$; or, B étant de la forme $(**)$, il existe (dans tous les deux cas) $t_1, t_2 \in [t,t_0]$ tels que $f_\psi(t_1,a) = 0$ et $f_\psi(t_2,a) \neq 0$, ce qui donne une contradiction, comme on a forcément $f_\psi \equiv 0$ ou $f_\psi \neq 0$ sur T (selon que $\Theta_{j,\sigma} = \{0\}$ pour un $(j,\sigma) \in \psi$ ou non).

Comme les ensembles $(**)$ forment une partition de $X \times \mathbb{R}$ et comme on a $f_j \neq 0$ ou $f_j \equiv 0$ sur chacun d'eux, E est une réunion d'eux, ce qui termine la démonstration.

Admettons 1'hypothèse du lemme 3 sur $\mathcal{A}$. Il en résulte p. 110

1) chaque $E \in S(\mathcal{A}[t])$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, chacune d'elles appartenant à $S(\mathcal{A}[t])$;
2) si $E \in S(\mathcal{A}[t])$, alors $\pi(E) \in S(\mathcal{A})$, où $\pi : X \times \mathbb{R} \ni (x,t) \mapsto x \in X$.

Ceci donne, par récurrence

1*) chaque $E \in S(\mathcal{A}[t_1,\ldots,t_n])$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, chacune d'elles étant dans $S(\mathcal{A}[t_1,\ldots,t_n])$.
2*) si $E \in S(\mathcal{A}[t_1,\ldots,t_k])$, alors $\pi(E) \in S(\mathcal{A})$, ou $\pi : X \times \mathbb{R}^k \ni (x,u) \mapsto x \in X$.

En prenant $X = \{0\}$ et $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ on obtient (de 1*)) :

Théorème 1. *Tout ensemble semi-algébrique n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, chacune d'elles étant semi-algébrique.*

Ensuite, en prenant pour $\mathcal{A}$ l'anneau de polynômes sur $\mathbb{R}^n$ on obtient (de 2*)) :

Théorème 2 (Seidenberg). *Soient M, N deux espaces affines et soit $\pi : M \times N \ni (x,y) \mapsto x \in M$. Si $E \subset M \times N$ est semi-algébrique, il en est de même avec $\pi(E)$.*

Remarque (Malgrange). 2*) reste valable sans l'hypothèse du lemme 3 sur $\mathcal{A}$,

En effet, si E est décrit (dans $X \times \mathbb{R}^k$) par $\sum_{|p|\leq N} a_{j,p}(x)\, t^p$, $j = 1,\ldots,s$, avec $a_{j,p} \in \mathcal{A}$, alors E est l'image inverse d'un semi-algébrique E^* par α : $(x,t) \mapsto (a(x),t)$, où $a : x \mapsto \{a_{j,p}(x)\}$, donc p. 111

$$\pi(E) = \pi(\alpha^{-1}(E^*)) = \{x : (a(x),t) \in E^* \text{ pour un } t\} = a^{-1}(\pi_0(E^*)) \,,$$

où $\pi_0 : (\{a_{j,p}\}, t) \mapsto \{a_{j,p}\}$; comme (théorème 2) $\pi_0(E^*)$ est semi-algébrique, $\pi(E) = a^{-1}(\pi_0(E^*)) \in S(\mathcal{A})$.

Une démonstration des théorème 2 et proposition 2 du N° 16. On procède par récurrence sur $\dim M$. Soit $E \subset M$ un semi-analytique. Il suffit de montrer que chaque $a \in M$ possède un voisinage U tel que $U \cap E$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, chacune semi-analytique. On peut supposer (choix de carte, Weierstrass) que $M = \mathbb{R}^n$ et que E soit décrit dans $U = U_0 \times \Delta$, avec $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ semi-analytique borné et un intervalle Δ, par $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0[x_n]$ où $\mathcal{A}_0$ est l'anneau des restrictions à U_0 des fonctions analytiques dans un voisinage de $\overline{U_0}$. Alors $U \cap E$ est décrit aussi dans $U_0 \times \mathbb{R}$ par $\mathcal{A}_1$, donc (l'hypothèse de récurrence) on peut appliquer 1) (avec $\mathcal{A}_0$).

Soit M une variété analytique réelle, N – un espace affine. On dit qu'un ensemble $E \subset M \times N$ est *N-semi-algébrique*, si chaque $a \in M$ possède un voisinage U tel que E soit décrit dans $U \times N$ par des fonctions $f_i(x, y)$ analytiques dans $U \times N$, qui sont des polynômes en y [48].

Alors 1*), où l'on prend pour $\mathcal{A}$ l'anneau $\mathcal{A}_0$ des restrictions à U des fonctions analytiques dans un voisinage de $\overline{U}$, entraîne

Proposition 1. *Chaque composante connexe d'un $E \subset M \times N$, N-semi-algébrique, est N-semi-algébrique. Si $\pi(E)$ est relativement compact, où $\pi :$* p. 112
$M \times N \ni (x, y) \mapsto x \in M$ alors E n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Soit $N = N_0 \times N_1$ avec N_0, N_1 affines. Alors 2*) avec $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0[t_1, \dots, t_n]$ où $n = \dim N_0$ et $\mathcal{A}_0$ comme auparavant ou simplement, d'après la remarque (Malgrange), $\mathcal{A}_0 =$ l'anneau des fonctions analytiques dans U, donne

Proposition 2. *Soit $\pi : M \times N \ni (u, x, y) \mapsto (u, x) \in U \times N_0$. Si $E \subset M \times N$ est N-semi-algébrique alors $\pi(E)$ est N_0-semi-algébrique.*

21 [Variétés analytiques-algébriques]

21.a [Fonctions analytiques-algébriques]

Soit f une fonction analytique réelle dans un ouvert Ω d'un espace affine M. On dira que f est *analytique-algébrique* au voisinage d'un $x_0 \in \Omega$, si

[48] pour tout $x \in U$ fixé. Si U est connexe, ceci équivaut à ce que la fonction considérée soit un polynôme en des coordonnées affines dans N à coefficients analytiques dans U.

$W(x, f(x)) \equiv 0$ au voisinage de x avec un polynôme $W \not\equiv 0$ sur $M \times \mathbb{R}$ (c'est-à-dire, si f est algébrique sur l'anneau des restrictions à U des polynômes sur M, pour un voisinage U de x) ; on peut prendre toujours W irréductible. On dira que f est analytique-algébrique (dans Ω) (ou *de Nash*), si elle est analytique-algébrique au voisinage de chaque point de Ω. Si f est rationnelle, elle est analytique-algébrique. Si Ω est connexe et si f est analytique-algébrique au voisinage d'un $x_0 \in \Omega$, elle est analytique-algébrique (dans Ω) ; l'identité subsiste avec le même W. La somme et le produit de fonctions analytiques-algébriques est analytique-algébrique [49].

Si f est analytique-algébrique au voisinage de $(a, b) \in M \times N$ (M, N p. 113
affines), alors $u \mapsto f(u, b)$ est analytique-algébrique au voisinage de a. En effet, il suffit de vérifier ceci dans le cas où $N = \mathbb{R}$; on a $W(u, v, f(u, v)) \equiv 0$ avec un polynôme irréductible W, donc $W(u, b, s) \not\equiv 0$ (sinon, $W(u, v, s) = c\,(v - b)$) et $W(u, b, f(u, b)) \equiv 0$.

Si g analytique vérifie $G(u, g(u)) \equiv 0$ au voisinage de u_0 avec $G \not\equiv 0$ analytique-algébrique au voisinage de $(u_0, g(u_0))$, alors g est analytique-algébrique au voisinage de u_0. (On a alors $W(u, t, G(u, t)) \equiv 0$ avec un polynôme irréductible W, d'où $W(u, t, 0) \not\equiv 0$ (sinon, $W(u, t, s) = c\,s$) et $W(u, g(u), 0) \equiv 0$).

On dira que $f = (f_1, \ldots, f_k)$ est analytique-algébrique, si $f_1, \ldots, f_k$ sont analytiques-algébriques.

Si g est analytique-algébrique au voisinage de u_0 et h est analytique-algébrique au voisinage de $g(u_0)$, alors $h \circ g$ est analytique-algébrique au voisinage de u_0. En effet, supposons que h est une fonction réelle ; on a alors $W(v, h(v)) \equiv 0$ avec un polynôme $W \not\equiv 0$, donc $W(g(u) + z, h(g(u) + z)) \equiv 0$ et $W(g(u) + z, t) \not\equiv 0$ au voisinage de $(u_0, 0, h(g(u_0)))$, d'où $h(g(u) + z)$ est analytique-algébrique au voisinage de $(u_0, 0)$, ce qui donne le même pour $h \circ g$ au voisinage de u_0.

II s'ensuit par récurrence sur k :

Si $g : U \to \mathbb{R}^k$ analytique vérifie $F(u, g(u)) \equiv 0$ au voisinage de $u_0 \in U$, où $F : V \to \mathbb{R}^k$ est analytique-algébrique au voisinage de $(u_0, g(u_0))$ et telle que $\det \dfrac{\partial F}{\partial v}(u_0, g(u_0) \neq 0$, alors g est analytique-algébrique au voisinage de p. 114
u_0.

[49] On vérifie ceci en raisonnant sur le corps des fractions de l'anneau des fonctions analytiques sur U connexe.

Si f est analytique-algébrique, il en est de même avec son extension holomorphe $\widetilde{f}$ (on a alors $W(z, \widetilde{f}(z)) \equiv 0$).

Si un polynôme à coefficients analytiques est analytique-algébrique, ses coefficients et son discriminant sont aussi analytique-algébriques.

Le polynôme associé avec une fonction analytique-algébrique est analytique-algébrique (comme il est égal dans un sous-ouvert au produit $\prod(t - \xi_i(u))$ avec ξ_i analytique-algébriques).

Le $\sigma^{(H_1,\ldots,H_p)}F$ avec H_i, F analytiques-algébriques, est analytique-algébrique (comme il est égal dans un sous-ouvert au produit des $F(z, w_1^{(\nu_1)}(z), \ldots, w_p^{(\nu_p)}(z))$ avec $w_i^{(\nu)}$ analytique-algébriques).

21.b [Ensembles localement semi-algébriques]

On dit qu'un sous-ensemble E d'un ouvert Ω d'un espace affine M est *localement semi-algébrique*, s'il est localement décrit dans Ω par des polynômes (c'est-à-dire que chaque point de Ω possède un voisinage dans lequel E est décrit par des polynômes). On voit que, dans M, chaque ensemble semi-algébrique est localement semi-algébrique, et que chaque ensemble semi-algébrique relativement compact est semi-algébrique.

Les propriétés établies dans le N° 21.a permettent de remplacer dans les raisonnements des N° 11 - 19 les fonctions analytiques par les fonctions analytiques-algébriques (avec les notions dérivées). Ainsi, les résultats qui y sont obtenus restent valables pour les sous-ensembles (des variétés p. 115 analytiques-algébriques ou de Nash) localement décrits par les fonctions analytiques-algébriques.

Or, dans le cas des espaces affines, ce sont précisément des ensembles localement semi-algébriques.

Ceci résulte de la suivante

Proposition 1. *Soit Ω un ouvert semi-algébrique (d'un espace affine M). Chaque $E \subset \Omega$ décrit par des fonctions analytiques-algébriques dans Ω est semi-algébrique.*

Pour prouver ceci, montrons d'abord que si A est semi-algébrique, il en est de même avec $\overline{A}$.

Or, on peut supposer que M soit euclidien. On a alors

$$\overline{A} = M \setminus \pi_2((M \times \mathbb{R}) \setminus \pi_1(\{(x, y, \varepsilon) : y \in A,\ |x - y| < \varepsilon\})) ,$$

où $\pi_1 : M^2 \times \mathbb{R} \ni (x, y, \varepsilon) \mapsto (x, \varepsilon) \in M \times \mathbb{R}$ et $\pi_2 : M \times \mathbb{R} \ni (x, \varepsilon) \mapsto x \in M$. Par conséquent (Seidenberg) $\overline{A}$ est semi-algébrique.

Maintenant, il suffit de montrer que le graphe de toute ψ analytique-algébrique dans Ω, est semi-algébrique. Or, pour chaque composante connexe Ω' de Ω, $W(x, \psi(x)) \equiv 0$ dans Ω' avec un polynôme irréductible W. Comme le discriminant D de W ne s'annule pas identiquement, $\psi_{\Omega'} = \overline{\psi_{\Omega_0}} \cap (\Omega' \times \mathbb{R})$, où $\Omega_0 = \{x \in \Omega' : D(x) \neq 0\}$. Par conséquent, il suffit de prouver que ψ_{Ω_0} est semi-algébrique. Or, vu le théorème 1 du N° 20, ceci résulte du fait que ψ_{Ω_0} est un sous-ensemble ouvert et fermé de $\{x \in \Omega_0 : W(x, t) = 0\}$ qui est semi-algébrique.

Nous appelerons donc *ensembles localement semi-algébriques dans une* p. 116
variété analytique-algébrique ceux qui sont localement décrits par les fonctions analytiques-algébriques.

Soit P un espace projectif, l'ensemble des droites homogènes d'un espace vectoriel V de dimension finie. Soit $\pi : V \setminus \{0\} \ni x \mapsto \mathbb{R}\, x$. Pour chaque hyperplan $P' = \pi(V' \setminus \{0\})$, où V' est un hyperplan homogène de V, $M = P \setminus P'$ muni de la structure affine naturelle, telle que $\pi_{H'} : H' \to M$ est un isomorphisme lorsque H' est hyperplan inhomogène parallèle à V', sera appelé carte affine de P [50]. La structure analytique-algébrique sur P est donnée par le système des cartes $\{\pi_{H'}^{-1}\}$ avec les H' comme ci-dessus [50]. Observons que si M', M'' sont les cartes affines, $M' \cap M''$ est un sous-ouvert semi-algébrique de M' [50]. Chaque espace affine M peut être considéré comme une carte affine d'un espace projectif P.

La proposition suivante permet d'appliquer aux ensembles semi-algébriques les résultats des N° 11 - 19 pour les ensembles localement semi-algébriques.

Proposition 2. *Soit M une carte affine d'un espace projectif P, et soit* p. 117

[50]On a $\pi_{H'}^{-1} : M \ni \mathbb{R}\, x \mapsto \dfrac{x}{\lambda'(x)} \in H'$ où $H' = \{\lambda'(x) = 1\}$ avec $\lambda' : V \to \mathbb{R}$ linéaire ; si H'' est un hyperplan inhomogène parallèle à un V'' (homogène), alors

$$M'' = M \setminus \pi(V'' \setminus \{0\}) = \pi(V \setminus V''), \quad \pi_{H'}^{-1}(M' \cap M'') = H' \setminus V''$$

et pareillement $\pi_{H''}^{-1}(M' \cap M'') = H'' \setminus V'$, donc $\pi_{H'}^{-1} \circ \pi_{H''} : H'' \setminus V' \ni x \mapsto \dfrac{x}{\lambda'(x)} \in H' \setminus V''$. Si $V' = V''$, alors $\lambda'(x) = \lambda' \neq 0$ (constante) sur H'', et $\pi_{H'}^{-1} \circ \pi_{H''} : H'' \ni x \mapsto \dfrac{x}{\lambda'} \in H'$ est un isomorphis-me affine.

$E \subset M$. Alors E est semi-algébrique dans M $\Leftrightarrow$ E est localement semi-algébrique dans P.

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Quelque soit la carte affine M' de P, $E \cap M'$ est décrit dans $M \cap M'$ par les restrictions à $M \cap M'$ des polynômes sur M, donc (proposition 1) semi-algébrique dans M'.

($\Longleftarrow$) On a $P = M_0 \cup \cdots \cup M_k$, où $M_0 = M$, $M_1, \ldots, M_k$ sont des cartes affines de P [51]), donc (Borel-Lebesgue) $P = B_0 \cup \cdots \cup B_k$ ou B_i est un ellipsoide dans M_i, $(i = 0, \ldots, k)$. Or, $B_i \cap E$ est semi-algébrique dans M_i, donc décrit dans $M_i \cap M$ par des polynômes sur M_i, d'où (proposition 1) il est semi-algébrique dans M. Par conséquent, $E = \bigcup_{i=0}^{k}(B_i \cap E)$ est semi-algébrique dans M.

En particulier, on obtient (théorème 4 du N° 17) le théorème que l'ensemble des points réguliers de dim. k d'un ensemble semi-algébrique est semi-algébrique.

Le théorème de Seidenberg (théorème 2 du N° 20) entraîne le suivant

Théorème. *Soient M, N des espaces affines et soit $f : A \to N$, avec $A \subset M$, une application semi-algébrique (c'est-à-dire, à graphe semi-algébrique). Alors l'image et l'image inverse de tout ensemble semi-algébrique (de M ou de N respectivement) est semi-algébrique. Si L est un espace affine et $g : B \to L$, avec $B \subset N$, une application semi-algébrique, alors $g \circ f$ est* p. 118
semi-algébrique.

En effet, pour la première assertion il suffit d'observer que $f(E) = \pi_2(f \cap (E \times N))$ et $f^{-1}(F) = \pi_1(f \cap (M \times F))$ où $\pi_1 : M \times N \to M$ et $\pi_2 : M \times N \to N$ sont les projections. Pour la seconde, on observe que $g \circ f = \pi((f \times L) \cap (M \times g))$ avec la projection $\pi : M \times N \times L \to M \times L$.

L'assertion correspondante pour les ensembles localement semi-algébriques est la suivante :

Soient M, N des variétés analytiques-algébriques, et soit $f : A \to N$, avec $A \subset M$, une application à graphe localement semi-algébrique. Si l'image inverse de tout relativement compact est relativement compacte, alors l'image de tout localement semi-algébrique est localement semi-algébrique ; si l'image de tout relativement compact est relativement compacte, alors l'image inverse

[51] On prend $M_i = P \setminus \pi(V_i \setminus \{0\})$ de manière que $\bigcap_{i=0}^{k} V_i = \{0\}$

de tout localement semi-algébrique est localement semi-algébrique. Soit L un espace affine et soit $g : B \to L$, avec $B \subset N$ une application à graphe localement semi-algébrique. Si l'image par f de tout relativement compact est relativement compacte, ou si l'image inverse par g de tout relativement compact est relativement compacte alors $g \circ f$ est localement semi-algébrique.

En effet, observons d'abord que l'image par π_1, π_2, ou π (les projections conme auparavant) d'un relativement compact localement semi-algébrique est semi-algébrique. On a ensuite $f(E) \cap V = \pi_2(f \cap (E \times V))$ avec $f \cap (E \times V) \subset f^{-1}(V) \times V$, et $f^{-1}(F) \cap U = \pi_1(f \cap (U \times F))$ avec $f \cap (U \times F) \subset U \times f(U)$, ce qui donne les premières assertions. Enfin, $(g \circ f) \cap (U \times W) = \pi((f \times W) \cap (U \times g))$ et $(f \times W) \cap (U \times g) \subset U \times (f(U) \cap g^{-1}(W)) \times W$, ce qui donne la dernière assertion.

22 [Directions régulières]

p. 119

Soit M un espace affine de dim. n, V son espace vectoriel, P la variété des droites (homogènes) de V. Soit f une fonction analytique dans un ouvert Ω de M. On dira qu'un $\lambda \in P$ est une *direction régulière pour* f en un $c \in \Omega$ (ou dans un $E \subset \Omega$), si $f \not\equiv 0$ sur $c + \lambda$ au voisinage de c (ou si ceci subsiste pour chaque $c \in E$).

Proposition 1 (Koopman - Brown). *Si f est une fonction analytique $\not\equiv 0$ dans un ouvert connexe $\Omega \subset M$, alors pour chaque compact $E \subset \Omega$, l'ensemble des directions régulières pour f dans E est un ouvert dense de P.*

Lemme 1 [52]. *Soit $g : N \to L$ une application analytique, N, L étant des variétés analytiques dénombrables. Si $\operatorname{rang} g < \dim L$, alors $g(N)$ est maigre.*

En effet, procédons par récurrence sur $n = \dim N$, en supposant l'assertion vraie pour $n - 1$ (elle est triviale pour $n = 0$). Soit $c \in E$; il existe un voisinage U de c tel que $Z = \{x \in U : \operatorname{rang}_x g < p\}$, où $p = \operatorname{rang}_U g$. est un sous-ensemble analytique rare de U. Soit $\mathcal{N}$ une partition normale en c, d'un $Q \subset U$, compatible avec Z. En vertu de l'hypothèse de récurrence il suffit de vérifier que $g(\Gamma)$ est maigre pour chaque $\Gamma \in \mathcal{N}$ de dim, n. Or on a alors $\Gamma \cap Z = \emptyset$, d'où $\operatorname{rang}_x g = p$ dans Γ, donc $g(\Gamma)$ est maigre (comme localement contenue dans sous-variété de dim. $p < \dim L$).

Lemme 2 (Lefschetz - Whitehead). *Soit S une sous-variété de dim. $n-1$* p. 120

[52] Un cas spécial du théorème de Sard.

de V avec $n = \dim M$, vérifiant $u \in S \Rightarrow u \notin S_u$, où S_u est l'espace tangent de S en u. Soient N une variété différente, $g : N \to M$ et $h : N \to S$ des applications différentiables. Si l'application

$$\varphi : N \times \mathbb{R} \ni (v, \lambda) \mapsto g(v) + \lambda\, h(v) \in M$$

est de rang $\leq n-1$, alors $\operatorname{rang} h \leq n-2$.

Démonstration. Soit $c \in N$. Notons avec T l'espace tangent de N en c. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, la différentielle $\mathrm{d}\varphi$ en (c, λ) est l'application :

$$T \times \mathbb{R} \ni (u, t) \mapsto \mathrm{d}g(u) + \lambda\, \mathrm{d}h(u) + t\, h(c) \in V\ ;$$

si $\lambda \neq 0$, l'application $(u, t) \mapsto \dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}g(u) + \mathrm{d}h(u) + t\, h(c)$ a même image que $\mathrm{d}\varphi$, donc de rang $< n-1$; par conséquent $(\lambda \to \infty)$ il en est de même avec $(u, t) \mapsto \mathrm{d}h(u) + t\, h(c)$ d'où $\dim(\mathrm{d}h(T) + \mathbb{R}\, h(c)) \leq n-1$. Comme $\mathrm{d}h(T) \subset S_{h(c)}$, on a $h(u) \notin \mathrm{d}h(T)$, donc $\dim \mathrm{d}h(T) \leq n-2$.

Démonstration de la proposition 1. Fixons un ellipsoide $S = \{\psi = 1\}$ (avec ψ quadratique) ; elle satisfait donc à l'hypothèse du lemme 2. Or, le complémentaire Λ de l'ensemble en question est l'image par (revêtement fini) $S \ni V \mapsto \mathbb{R}\, v \in P$ de $\pi(\Theta \cap (E \times S))$, où $\pi : \Omega \times S \ni (u, v) \mapsto v \in S$, et

$$\begin{aligned} \Theta &= \{(u,v) \in \Omega \times S : f(u + t\, v) \equiv 0 \text{ au voisinage de } t = 0\} \\ &= \left\{(u,v) \in \Omega \times S : \psi(V) = 1,\ \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} f(u + t\, v)_{t=0} = 0,\ i = 1, 2, \ldots\right\} \end{aligned}$$

est analytique dans $\Omega \times V$. Par conséquent, Λ est compact, donc il suffit de prouver que $\pi(\Theta)$ est maigre. Soit Γ une sous-variété différentiable de $\Omega \times V$, contenue dans Θ ; comme Θ est la réunion d'une famille dénombrable de telles sous-variétés, il suffit de prouver que $\pi(\Gamma)$ est maigre, donc grâce au p. 121
lemme 1, que $\pi_\Gamma : \Gamma \to S$ est de rang $\leq n-2$. En appliquant le lemme 2 avec $g : \Gamma \ni (u, v) \mapsto u \in M$ et $h = \pi_\Gamma$, on voit qu'il suffit de montrer que l'application $\varphi : \Gamma \times \mathbb{R} \ni (u, v, \lambda) \mapsto u + \lambda\, v \in M$ est de rang $\leq n-1$. Or, comme on a $f(\varphi(u, v, \lambda)) = 0$ dans le sous-ouvert $\Gamma_* = \{(u, v, \lambda) \in \Gamma \times \mathbb{R} : u + \lambda\, I\, v \subset \Omega\}$ de M, où $I = [0, 1]$, donc l'intérieur de $\varphi(\Gamma_*)$ est vide, d'où $\operatorname{rang}_{\Gamma_*} \varphi \leq n-1$. Mais Γ_* contient $\Gamma \times \{0\}$, et chaque point de Γ possède un voisinage W dans Γ tel que la condition $\operatorname{rang}_{(u,v,\lambda)} \varphi \leq n-1$ s'exprime dans $W \times \mathbb{R}$ par l'annulation de certains polynômes en λ ; par conséquent, $\operatorname{rang} \varphi \leq n-1$, ce qui termine la démonstration.

Soit A un ensemble semi-analytique d'un ouvert $\Omega \subset M$. On dira qu'un $\lambda \in P$ est une *direction régulière pour* A en un $c \in \Omega$ (ou dans un $E \subset \Omega$), si A peut être décrit au voisinage de c par des fonctions analytiques pour lesquelles λ soit régulière en c (ou si ceci subsiste pour chaque $c \in E$.). Observons que alors (Weierstrass) il existe un voisinage U de c tel que l'ensemble $U \cap A$ soit λ-semi-algébrique, c'est-à-dire, son image canonique dans $N \times \lambda$, où N est un supplémentaire de λ (ce qui ne dépend pas de N [53]) ; de plus (cf, la remarque 3 du N° 14) la carte affine d'un système normal qui donne une partition compatible avec A peut-être choisie de manière que $c + N$ et $c + \lambda$ correspondent à l'hyperplan des $x_1, \dots, x_{n-1}$ et à l'axe des x_n respectivement.

La proposition 1 entraîne le suivant p. 122

Corollaire. *Pour chaque ensemble semi-analytique d'un ouvert $\Omega \subset M$, l'ensemble des directions régulières dans Ω est dense (dans P), son complémentaire étant maigre.*

Observons encore que si A est analytique, alors λ est non régulière pour A en c si et seulement si A contient un voisinage de c dans $c + \lambda$ (car alors $A \cap U = \{f = 0\}$ avec f analytique au voisinage U de c). Par conséquent, toute direction $\lambda \in P$ est régulière pour un sous-compact analytique de M.

On dira qu'un $Z \subset K \times L$ (où K, L sont des variétés) est L-*relativement compact*, si $Z \cap (E \times L)$ est relativement compact, quel que soit $E \subset K$ relativement compact ; qu'un $Z \subset M$ est N-relativement compact, où N est un sous-espace de V, si son image canonique dans $N \times N'$ (N' étant un supplémentaire de N) est N-relativement compact, ou, ce qui revient au même, si $Z \cap (E + N)$ est relativement compact pour chaque $E \subset M$ relativement compact.

Proposition 2. *Soit A un ensemble semi-analytique de M. Si $\lambda \in P$ est régulière pour A dans $\overline{A}$, et si A est λ-relativement compact, alors l'image*

[53] Si W est un sous-espace de V, L un de M de direction supplémentaire à W, alors M/W est canoniquement isomorphe à L de manière que

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M/W \arrow[rr, leftrightarrow] & & L \end{tikzcd}$$

est commutatif ($M \to L$ étant la projection parallèlement à W).

canonique de A dans M/λ est semi-analytique [54].

En effet, ceci est vrai pour $A \cap Q$ avec un voisinage Q d'un point quelconque de M (d'après les propositions 3 et 4 du N° 11, ou d'après la proposition 2 du N° 20).

Observons que (grâce à la proposition 2) si $A \subset K \times \mathbb{R}$ est analytique $\mathbb{R}$-relativement compact, où K est une variété analytique, alors $\pi(A)$, où $\pi : K \times \mathbb{R} \to K$ est la projection, est semi-analytique. En effet, il suffit de considérer le cas où K est un ouvert d'un espace affine M, et d'observer que $\{0\} \times \mathbb{R}$ est alors une direction régulière pour A. p. 123

Soit $\mathcal{G}$ la variété des sous-espaces de dimension k de V [55].

Proposition 3. *Si $A \subset M$ est semi-analytique N-relativement compact pour chaque N d'un ouvert $\Omega_0 \subset \mathcal{G}$, alors l'ensemble*

$$\{N \in \mathcal{G} : \textit{l'image canonique de } A \textit{ dans } M/N \textit{ est semi-analytique}\}$$

est dense dans Ω_0 [56].

Démonstration. On peut supposer que $M = V$. Procédons par récurrence sur k. L'assertion subsiste pour $k = 1$ (proposition 2 et corollaire), supposons la vraie pour $k-1$. Soit $\Omega \neq \emptyset$ un sous-ouvert de Ω_0. Notons avec $\mathcal{G}'$ la variété des sous-espaces de dim $k-1$ de V. Comme

$$\mathcal{K} = (\mathcal{G}' \times P) \cap \{N' \not\supset \lambda\} \ni (N', \lambda) \mapsto N' + \lambda \in \mathcal{G}$$

---

[54] C'est-à-dire, $\pi(A)$ est semi-analytique, où π est la projection parallèlement à λ sur un sous-espace N de direction supplémentaire à λ, quelconque (cf. renvoi 53).

[55] La topologie dans $\mathcal{G}$ est déterminée par la condition que l'application

$$V^k \cap \{x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \neq 0\} \ni (x_1, \ldots, x_k) \mapsto \sum_1^k \mathbb{R}\, x_i \in \mathcal{G}$$

soit ouverte et continue. Un système de cartes est formé des inverses des applications

$$L_1 \times \cdots \times L_k \ni (u_1, \ldots, u_k) \mapsto \sum_1^k \mathbb{R}\, u_i \in \mathcal{G}$$

avec L (sous-espace de V) de dim. $n-k$ et $L_1, \ldots, L_k \in V/L$ linéairement indépendantes (ceci donne une structure affine dans 1'ensemble des supplémentaires de L dans V).

[56] cf. renvoi 53

est continue, il existe des ouverts $\emptyset \neq U' \subset \mathcal{G}'$ et $\emptyset \neq W \subset P$ tels que $U' \times W \subset \mathcal{K}$ et $U' + W \subset \Omega$. Par conséquent, A est N'-relativement compact pour tout $N' \in U'$, et, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un $N' \in U'$ tel que pour chaque supplémentaire L' de N' (dans V), $\pi'(A)$, où $\pi' : M \to L'$ p. 124
est la projection parallèlement à N', est semi-analytique. Prenons un $\lambda_0 \in W$ et fixons L' de manière que $\lambda_0 \in L'$, c'est-à-dire $\lambda_0 \in W \cap P'$, où P' est la variété des droites de L' ; l'assertion étant vraie pour $k = 1$, il existe un $\lambda \in W \cap P'$ tel que $\pi_1(\pi'(A))$, où π_1 est la projection sur un supplémentaire L de λ dans L', est semi-analytique. Ceci montre la proposition, comme $\pi = \pi_1 \circ \pi'$ est la projection sur L parallèlement à $N' + \lambda \in \Omega$.

23 [Cas où la projection d'un semi-analytique est semi-analytique]

Soit M une variété analytique réelle, N un espace affine. On dit qu'un sous-ensemble A d'un ouvert $\Omega \subset M \times N$ est *localement N-semi-algébrique* (dans Ω), si chaque point de Ω possède un voisinage U tel que $U \cap A$ est N-semi-algébrique (ou bien que A est décrit dans U par des fonctions analytiques, polynômes en variable qui parcourt N) ; observons que alors, dans le cas $\Omega = M \times N$, si A est N-relativement compact, il est N-semi-algébrique. (Un sous-ensemble semi-analytique A d'un L affine est localement λ-semi-algébrique [57] pour chaque direction régulière λ (pour A dans Ω) ; par conséquent (corollaire du N° 22), l'ensemble des λ pour lesquels A est localement λ-semi-algébrique, est dense de complémentaire maigre).

Proposition 1. *Si* $\dim N = 1$, *chaque ensemble semi-analytique de dim* 1 *d'un ouvert de $M \times N$ est localement N-semi-algébrique.*

Lemme 1. *Soit L un espace vectoriel de dim* 2, *λ une droite (homogène) de* p. 125
L. Si F est une fonction analytique au voisinage de 0, *alors $F = F^* G$ dans un voisinage U de* 0 *avec $G \neq 0$ analytique dans U et F^* analytique dans $U + \lambda$ et telle que $\lambda \ni t \mapsto F^*(c + t)$ soit polynôme pour chaque $c \in U$.*

Ceci résulte du fait que dans le cas $L = \mathbb{R}^2$ on a (Weierstrass) $F(x, y) = x^k H(x, y) G(x, y)$ au voisinage de 0, où H, G sont analytiques au voisinage de 0 , $G \neq 0$ et H est un polynôme en y.

[57] c'est-à-dire, son image canonique dans $K \times \lambda$, où K est un supplémentaire de λ.

Démonstration de la proposition 1. Soit A un ensemble semi-analytique de dim 1 d'un ouvert Ω de $M \times N$ et soit $a \in \Omega$; on peut supposer que M, N soient vectoriels et que $a = 0 \notin A$ (en considérant $A \setminus \{0\}$). Prenons une partition normale en 0 d'un Q, compatible avec A, selon un système $(g, \{H_j^i\})$ avec $g = (g_1, \ldots, g_n)$ linéaire ; alors $A \cap Q$ est ouvert et fermé dans $C = \{\widehat{H}_2^1 = \ldots = \widehat{H}_n^1 = 0,\ \widehat{H}_1^0 \neq 0\}$. Or, $\widehat{H}_1^0$ est un polynôme. Quant à $\widehat{H}_j^1$, on a $\widehat{H}_j^1. = F_j \circ p$, où $p = (g_1, g_j) : M \times N \to \mathbb{R}^2$ et F_j est analytique au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$; on a ensuite $p(\{0\} \times N) \subset \lambda$ avec une droite homogène λ de $\mathbb{R}^2$; prenons F_j^*, G_j selon le lemme 1 pour F_j et λ, et posons $H_j = F_j^* \circ p$, $J_j = G_j \circ p$; on a alors $\widehat{H}_j^1 = H_j\, J_j$, $J_j \neq 0$ dans un voisinage semi-algébrique $U \subset Q$ de 0, et H_j sont des polynômes en variable qui parcourt N (comme on a $H_j(c, t) = F_j^*(p(c, 0) + p(0, t))$. Par conséquent, C est décrit par $\widehat{H}_1^0$ et H_j, $j = 2, \ldots, n$ dans U, d'où $C \cap U$ est N-semi-algébrique (dans $U + N$), mais $A \cap U$ est ouvert et fermé dans $C \cap U$, donc (proposition 1 du N° 20) N-semi-algébrique (dans $U + N$).

Il résulte de la proposition 1 que chaque sous-ensemble semi-analytique d'un sous-ouvert d'un plan affine est localement λ-semi-algébrique pour toute direction λ. En effet, il ne reste qu'à vérifier que les membres de dim 2 d'une partition normale d'un Q semi-algébrique sont λ-semi-algébriques, et ceci a lieu, comme ils sont les composantes connexes de $Q \setminus V^1 \setminus V^0$. Voilà un semi-analytique de $\mathbb{R}^3 = M \times N \times L$ qui n'est pas localement L-semi-algébrique : p. 126

$$A = \{(x, y, z) \in M \times N \times L : y = x\, e^z\} \ .$$

En effet, supposons que A soit décrit dans un voisinage U de 0, avec $U \cap A$ connexe, par des $H_j \not\equiv 0$ analytiques, polynômes en z ; alors un H_s s'annule sur $A \cap U$ (sinon, on aurait $H_j(c) \neq 0$ pour un $c \in A \cap U$ et alors A contiendrait un voisinage de c) ; on a donc $H(a, a\, e^z, z) \equiv 0$ pour $z < 0$ avec un $a \neq 0$ tel que $H(a, y, z) \not\equiv 0$; mais $h(y, t) = t^N H(a, y, \frac{1}{t})$, avec N suffisamment grand, est un polynôme en t, et son ensemble de zéros contient l'adhérence de l'arc $\{y = a\, e^{1/t},\ -1 < t < 0\}$ qui est donc (proposition 6 du N° 17) semi-analytique, contrairement au fait qu'il n'est pas régulièrement situé avec $\{y = 0\}$ en 0 [58].

[58] On peut remplacer e^z par n'importe quelle fonction φ analytique et non algébrique ; on a alors $H_s = \sum_1^\infty P_i$ (au voisinage de 0), où P_i est un polynôme (en x, y, z), homogène de degré i en x, y ; par conséquent $P_i(x, x\,\varphi(z), z) \equiv 0$ (au voisinage de 0, pour chaque i) ;

La proposition 2 du N° 20 entraîne que si $A \subset M \times N$, où $N = N_0 \times N_1$ avec N_0, N_1 affines, est localement N-semi-algébrique et N_1-relativement p. 127
compact, alors $\pi(A)$, où $\pi : M \times N \to M \times N_0$ est la projection, est localement N_0-semi-algébrique. Or, il ne suffit pas de supposer que A soit N_i-semi-algébrique, $i = 1, 2$. En effet, pour un contre-exemple on prend $N_0 = N_1 = \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) \in M \times N_\times N_1 : (x, y) \in B,\ y = z\} \\ &= \{(x, y, z) \in M \times N_\times N_1 : (x, z) \in B,\ y = z\} \end{aligned}$$

avec un $B \subset M \times \mathbb{R}$ semi-analytique et non $\mathbb{R}$-semi-algébrique.

Comme au bout du N° 21.b on vérifie les faits suivants.

Soient M, N des variétés analytiques et soit $f : A \to N$, où $A \subset M$. Si M est affine et si f est M-semi-algébrique, alors l'image inverse de tout semi-algébrique est semi-analytique. Soit L une variété analytique et soit $g : B \to L$, où $B \subset N$; supposons que N soit affine ; alors $g \circ f$ est semi-analytique ou M-semi-algébrique ou L-semi-algébrique selon que f et g soient N-semi-algébriques, ou M affine et f semi-algébrique, ou L affine et g semi-algébrique.

Soient M, N des variétés analytiques réelles, $\pi; M \times N \to M$ la projection, A un semi-analytique de $M \times N$ qui est N-relativement compact.

Théorème 1. *Si* $\dim A \leq 1$, *alors* $\pi(A)$ *est semi-analytique.*

Théorème 2. *Si* $\dim M \leq 2$, $\pi(A)$ *est semi-analytique.*

Démonstration du théorème 1. On peut supposer que $N = L_1 \times \cdots \times L_s$ avec $L_i = \mathbb{R}$. Posons $N_j = L_1 \times \cdots \times L_j$, $A_s = A$ et $A_{j-1} = \pi_j(A_j)$, $j = s, \ldots, 1$, où $\pi_j : M \times N_j \to M \times N_{j-1}$ est la projection ; alors A_j est N_j-relativement p. 128
compact. D'après la proposition 1, si A_j est semi-analytique de dim ≤ 1, il est L_j-semi-algébrique, donc (proposition 2 du N° 20) A_{j-1} est semi-analytique, et de dm ≤ 1 [59]. Par conséquent, $\pi(A) = A_0$ est semi-algébrique.

Démonstration du théorème 2. On peut supposer que M, N soient des sous-espaces supplémentaires d'un espace linéaire L de dim n, que $\dim M = 2$

en prenant $P_i \not\equiv 0$, on a $P_i(a, a\,y, z) \not\equiv 0$ avec un a arbitrairement petit, ce qui montrerait que φ est algébrique.

[59]cf. N° 17 ; on considère la restriction de π_j à $U \times L_j$ avec un voisinage U d'un point arbitraire de $M \times N_{j-1}$

(les autres cas étant triviaux), que $\pi : L \to M$ soit la projection parallèlement à N et que A soit relativement compact. Procédons par récurrence sur $k = \dim A$. Le théorème est vrai pour $k = 1$. Supposons-le vrai pour $k-1$ avec $k \geq 2$.

On va démontrer d'abord que si $B \subset L$ est semi-analytique de dim $\ell \leq k$, alors chaque partition normale compatible avec B possède un raffinement $\mathcal{N}$ tel que pour chaque $\Gamma \in \mathcal{N}$, $\Gamma \subset B$, de dim ℓ, soit $\pi(\Gamma)$ est semi-analytique de dim ≤ 1, soit en chaque point de Γ la différentielle de π_Γ est surjective.

On peut supposer que $\ell \geq 2$ (les cas $\ell = 0, 1$ étant évidents). Munissons L d'une structure euclidienne de manière que M, N soient orthogonaux, et soit e_1, e_2 une base orthonormale de M, $e_3, \ldots, e_n$ une de N. Prenons une partition normale $\mathcal{N}_0$ compatible avec B et posons

$$g(x) = \operatorname{grad} \widehat{H}^\ell_{\ell+1}(x) \wedge \cdots \wedge \operatorname{grad} \widehat{H}^\ell_n(x) \ .$$

Soit $\mathcal{N}$ un raffinement compatible avec tous les $g(x) \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_\ell}$, $1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_\ell \leq n$, $g(x) \wedge e_1 \wedge e_2$, $g(x) \wedge e_1$ et $g(x) \wedge e_2$. p. 129

Soit $\Gamma \in \mathcal{N}$, $\Gamma \subset B$, de dim ℓ. Alors Γ est contenu dans un membre de dim ℓ de $\mathcal{N}_0$, donc $g(x)$ est un multivecteur (non nul) du supplémentaire orthogonal ν_x de l'espace tangent τ_x de Γ en $x \in \Gamma$. Si $g(x) \wedge e_1 \wedge e_2 \neq 0$ sur Γ, alors la différentielle de π_Γ est surjective [60]. Si $g(x) \wedge e_1 = g(x) \wedge e_2 = 0$ sur Γ, alors la différentielle de π_Γ est nulle [61], donc (connexité de Γ) π_Γ est constante, et $\pi(\Gamma)$ se réduit à un point. Supposons donc que $g(x) \wedge e_1 \wedge e_2 = 0$ et (par exemple) $g(x) \wedge e_1 \neq 0$ sur Γ ; on a alors $g(x) \wedge e_1 \wedge e_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge e_{\beta_{\ell-1}} \neq 0$ sur Γ, avec certains $3 \leq \beta_1 < \ldots < \beta_{\ell-1} \leq n$. Par conséquent (cf. [60]) chaque point de Γ possède dans Γ un voisinage qui est (l'image canonique de) le graphe d'une application analytique $\psi : U \to \mathbb{R}\, e_2 + N''$ où U est une boule de $\mathbb{R}\, e_1 + N'$, $N' = \sum_1^{\ell-1} \mathbb{R}\, e_{\beta_i}$ et N'' le supplémentaire orthogonal de N' dans N ; par conséquent $G = \pi_1(\Gamma)$, où $\pi_1 : L \to \mathbb{R}\, e_1 + N'$ est la projection orthogonale, est un ouvert connexe de $\mathbb{R}\, e_1 + N'$. On a $\psi = \psi_2 + \psi''$ avec $\psi_2 : U \to \mathbb{R}\, e_2$ et $\psi'' : U \to N''$. Soit $x = w + \psi(w)$; comme $M \subset \nu_x + \mathbb{R}\, e_1$, on a $\tau_x \cap (N' + \mathbb{R}\, e_2 + N'') \subset N$, d'où ($\tau_x$ étant (l'image canonique de) le graphe de $\mathrm{d}\psi$) $\mathrm{d}\psi(N') \subset N''$, donc $\mathrm{d}\psi_2(N') = \{0\}$; par conséquent, $\psi_2(t+u)$ est constante en $u \in N' \cap (U - t)$ pour chaque $t \in \widetilde{I} = \pi'(U)$, où π' est la

[60] car alors $\nu_x \cap M = \{0\}$, c'est-à-dire τ_x et N sont "en position générale" c'est-à-dire la projection canonique de τ_x dans L/N est surjective.

[61] car alors $M \subset \nu_x$, d'où $\tau_x \subset N$.

projection orthogonale sur $\mathbb{R}\, e_1$, c'est-à-dire $\psi_2(t+u) = \widetilde{\varphi}(t)$, où $\widetilde{\varphi} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}\, e_2$ est analytique.

La réunion de toutes ces $\widetilde{\varphi}$ est une fonction analytique [62] sur le segment p. 130
$I = \pi'(G)$; notons avec φ (l'image canonique de) son graphe ; on a donc $\pi(\Gamma) = \varphi$. Soit $u \in \varphi$; posons $u_1 = \pi'(u)$; on a

$$\pi_1^{-1}(u_1 + N') \cap \Gamma = (u_1 + \mathbb{R}\, e_2 + N) \cap \Gamma = (u + N) \cap \Gamma \ ^{63},$$

d'où $\pi_1((u+N)\cap\Gamma) = (u_1+N')\cap G$, donc $(u+N)\cap\Gamma$ n'est pas compact, ce qui donne $(u+N)\cap(\overline{\Gamma}\setminus\Gamma) \neq \emptyset$, ou bien $u \in \pi(\overline{\Gamma}\setminus\Gamma)$, Ceci montre que $\varphi \subset \pi(\overline{\Gamma}\setminus\Gamma)$, d'où $\overline{\varphi} = \pi(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma)$ (car $\pi(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \subset \overline{\pi(\Gamma)} = \overline{\varphi}$). Par conséquent (l'hypothèse de récurrence) $\overline{\varphi}$ est semi-analytique. Mais $\varphi = \overline{\varphi} \setminus (a + \mathbb{R}\, e_2) \setminus (b + \mathbb{R}\, e_2)$, où a, b sont les extrémités de I, donc $\pi(\Gamma) = \varphi$ est semi-analytique de dim. 1.

Il en résulte qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où A est une variété analytique telle que la différentielle de π_A est surjective ; alors $\pi(A)$ est ouvert et (proposition 4 du N° 16) il suffit de prouver que $\overline{\pi(A)} \setminus \pi(A)$ est semi-analytique.

Il en résulte ensuite que pour chaque $B \subset \overline{A} \setminus A$ semi-analytique on a $B = B_1' \cup B_2' \cup B_3'$ où $\pi(B_1')$ est semi-analytique de dim ≤ 1, $\pi(B_2') \subset \overline{\pi(A)}$ et B_3' est semi-analytique de dim $< \dim B$. En effet, en chaque point de $\overline{B}$ prenons une partition normale compatible avec B, A, et un raffinement $\mathcal{N}$ d'un Q selon ce qu'on a démontré ci-dessus. Il suffit (Borel-Lebesgue) d'avoir $B\cap Q = B_1' \cup B_2' \cup B_3'$ (avec ces propriétés) ; pour ceci il suffit de prendre pour B_1', B_2', B_3' la réunion des $\Gamma \in \mathcal{N}$, $\Gamma \subset B$ tels que $\pi(\Gamma)$ est semi-analytique de
dim ≤ 1, ou que la différentielle de π_Γ soit surjective, ou que $\dim \Gamma < \dim B$, p. 131
respectivement ; on a alors $\pi(\Gamma) \subset \pi(A)$ pour chaque Γ du deuxième type. En effet, on a $\Gamma \subset \overline{\Gamma'}$ avec un $\Gamma' \in \mathcal{N}$, $\Gamma' \subset A$; si $c \in \Gamma$, alors $N + \tau = L$, où τ est l'espace tangent de Γ en c, donc $c + N$ contient un sous-espace affine transversal à Γ en c, d'où (proposition 4 du N° 19) $c + N$ intersecte Γ', et $\pi(c) \in \pi(A)$.

On en obtient par récurrence que $\overline{A} \setminus A = B_1 \cup B_2$ où $\pi(B_1)$ est semi-analytique de dim ≤ 1 et $\pi(B_2) \subset \pi(A)$. on a alors
$\overline{\pi(A)} = \pi(\overline{A}) = \pi(A) \cup \pi(B_1) \cup \pi(B_2)$ et $\overline{\pi(A)} \setminus \pi(A) = \pi(B_1) \setminus (\pi(B_1) \cap \pi(A))$, donc, comme $\pi(B_1) \cap \pi(A) = \pi((\pi(B_1) \times N) \cap A)$, il suffit (l'hypothèse

[62] puisque, vu la connexité de Γ, pour chaque deux $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\varphi}'$ il existe une suite $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_0, \dots, \widetilde{\varphi}_k = \widetilde{\varphi}'$ telle que $\widetilde{\varphi}_{i-1}, \widetilde{\varphi}_i$ coïncident dans l'intersection de leurs sources.

[63] Comme $(u_1 + \mathbb{R}\, e_2) \cap \varphi = \{u\}$.

de récurrence) de vérifier que $(\pi(B_1) \times N) \cap A$ est de diim $< k$. Or, on a $\pi(B_1) = \bigcup \Gamma_i$ avec des variétés Γ_i analytiques de dim ≤ 1 ; si un $(\Gamma_i \times N) \cap A$ était de dim k, alors $\Gamma_i \times N$ contiendrait un sous-ouvert $A_0 \neq \emptyset$ de A, donc $\pi(A_0) \subset \Gamma_i$ et $\pi(\tau) \subset \lambda$ où τ, λ sont les espaces tangents de A_0 en un c et de Γ_i en $\pi(c)$, respectivement, contrairement à la surjectivité de π_τ. Par conséquent, $(\Gamma_i \times N) \cap A$ sont de dim $< k$, ce qui termine la démonstration.

Corollaire 1. *L'ensemble $\pi(A)$ est semi-analytique, s'il est contenu dans un ensemble semi-analytique de M de dim ≤ 2.*

En effet, supposons que $\pi(A) \subset B$ avec B semi-analytique de dim ≤ 2. Soit $c \in M$ et soit $\mathcal{N}$ une partition normale d'un Q, en c, compatible avec B, selon un système de carte g ; on peut supposer que $M = M_0 \times M_1$ avec M_0, M_1 vectoriels, que $c = 0$, que g soit linéaire et que M_0, M_1 correspondent aux espaces des x_1, x_2 et des $x_3, x_4, \ldots$ respectivement (le cas où $\dim M \leq 2$ p. 132
étant trivial). On a alors $B \cap Q = \bigcup \Gamma_i$ avec $\Gamma_i \in \mathcal{N}$ de dim ≤ 2. Soit $\pi_1 : M_0 \times M_1 \to M_0$ la projection. D'après le théorème 2 (appliqué à $\pi_1 \circ \pi : M_0 \times M_1 \times N \to M_0$), $\beta_i = \pi_1(\pi(A) \cap \Gamma_i) = (\pi_1 \circ \pi)(A \cap (\Gamma_i \times N))$ sont semi-analytiques, mais (injectivité de $(\pi_1)_{\Gamma_i}$) $\pi(A) \cap \Gamma_i = (\beta_i \times M_1) \cap \Gamma_i$, donc $\pi(A) \cap Q = \bigcup \pi(A) \cap \Gamma_i$ est semi-analytique.

On tire des théorèmes 1 et 2 avec corollaire 1 (comme au bout du N° 21.b) ce suivant

Corollaire 2. *Soient M, N des variétés analytiques réelles, $f : A \to N$, où $A \subset M$, une application (de graphe) semi-analytique telle que l'image inverse de tout relativement compact est relativement compacte (en particulier, on peut supposer que $A = M$ et que f soit analytique, propre). Alors l'image de tout semi-analytique de dim ≤ 1 est semi-analytique ; de même, si l'image est contenue dans un semi-analytique de dim ≤ 2. Si* $\dim M \leq 2$*, alors l'image de tout semi-analytique est semi-analytique* [64].

En effet, il ne reste qu'à vérifier que $(\Gamma \times N) \cap f$ est de dim ≤ 1 si Γ est une variété analytique, semi-analytique, de dim ≤ 1. Or, si $(\Gamma \times N) \cap f$ était de dim ≥ 2, il contiendrait une variété de dim ≥ 2, ce qui contredit l'injectivité de $f \ni (x, y) \mapsto x \in \Gamma$ (cf. renvoi 31).

On peut encore observer, que si $f : A \to N$, $(A \subset M)$, est une application semi-analytique telle que l'image de tout relativement compact est relativement compacte, alors l'image inverse de tout semi-analytique est semi- p. 133

[64] Evidemment, la même conclusion, si $\dim f = 1$.

analytique, lorsque $\dim M \leq 2$ (cf. [64]) ; que si $g : B \to L$ ($B \subset N$, L variété analytique réelle) est une application semi-analytique telle que l'image inverse de tout relativement compact est relativement compacte, alors $g \circ f$ est semi-analytique, lorsque $\dim f \leq 1$ [65].

Nous allons donner maintenant deux exemples d'une sous-variété analytique compacte de dim 2 (la première dans $P_3 \times P_1$, où P_3, P_1 sont les espaces projectifs de dim 3, 1, et la seconde dans $\mathbb{R}^5$) dont la projection (par $P_3 \times P_1 \to P_3$ ou $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ respectivement) n'est pas semi-analytique.

Observons à cet effet le fait suivant (Osgood). Si $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ est positivement homogène de degré 1, analytique et non-algébrique, alors l'ensemble $\Gamma = \{z = \psi(x,y),\ (x,y) \in \Omega\}$ n'est pas semi-analytique (dans $\mathbb{R}^3$) pour aucun ouvert connexe Ω vérifiant $0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$.

En effet, dans le cas contraire Γ serait décrit dans une boule U de centre 0 par certaines $F_i \not\equiv 0$ analytiques, et alors une d'elles F_s s'annulerait sur $\psi \cap U$ (sinon, on aurait $F_i(c) \neq 0$ pour un $c \in \Gamma \cap U$, et Γ contiendrait un voisinage de c) ; or, on a $F_s = \sum_1^\infty H_\nu$ au voisinage de 0, où H_ν est un polynôme homogène de degré ν, d'où $H_\nu(x,y,\psi(x,y)) \equiv 0$, et (en prenant un $H_\nu \not\equiv 0$) ψ serait analytique-algébrique.

Observons ici, qu'il en résulte que le produit ou la somme de deux fonctions semi-analytiques n'est pas nécessairement semi-analytique. En effet, soit p. 134
$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un isomorphisme analytique, non algébrique. Alors la fonction $\gamma(\frac{y}{x})$ dans $\Omega = \{x^2 < y < 2x^2\}$ (de graphe $\{y - x\,\gamma^{-1}(z) = 0,\ x^2 < y < 2x^2\}$) est semi-analytique, tandis que $x\,\gamma(\frac{y}{x}))$ dans Ω n'est pas semi-analytique ; quant à la somme, on prend $(1+x)\,\gamma(\frac{y}{x}) - \gamma(\frac{y}{x}) = x\,\gamma(\frac{y}{x})$ dans Ω. Si l'on veut avoir des fonctions continues dans $\mathbb{R}^2$, on prend $f(x) = \gamma(\frac{y}{x})$ dans $\{x^2 < y < 2x^2\}$, $= \gamma(2x)$ dans $\{y \geq 2x^2\}$, $= \gamma(x)$ dans $\{y \leq x^2\}$, $= 0$ dans $\{x \leq 0\}$.

1). L'image de l'ensemble

$$\Lambda_0 = \left\{ z = x\, e^{\frac{1}{1+t^2}},\ y = x\,t \right\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

[65]On vérifie ceci comme ci-dessus en utilisant l'injectivité de $M \times g \to M \times N$.

par la projection $(x, y, z, t) \mapsto (x, y, z)$ est l'ensemble

$$\Gamma_0 = \{0\} \cup \left\{ z = x\, e^{\frac{x^2}{x^2+y^2}},\ (x, y) \neq 0 \right\}$$

(qui n'est pas semi-analytique). Identifions $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$ avec une carte affine de P_3 ou P_1 projective de manière que $(x, y, z, 1)$ ou $(t, 1)$ soient des coordonnées homogènes de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. ou de $t \in \mathbb{R}$ respectivement [66], et soient $\pi_3 : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \ni (x, y, z, u) \mapsto \mathbb{R}\,(x, y, z, u) \in P_3$ et $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ni (t, s) \mapsto \mathbb{R}\,(t, s) \in P_1$. Or, les fonctions

$$\frac{z - x\ \exp((1 + t^2)^{-1})}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{et} \quad \frac{y - t\,x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}\,\sqrt{1 + t^2}}$$

sont les restrictions à $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ des fonctions analytiques $\varphi, \psi : P_3 \times P_1 \to \mathbb{R}$ données "en coordonnées homogènes" par

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(x, y, z, u, t, s) &= \frac{z - x\ \exp\left(\frac{s^2}{t^2+s^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2}} \\ \widetilde{\psi}(x, y, z, u, t, s) &= \frac{s\,y - t\,x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2}\,\sqrt{t^2 + s^2}}\,, \end{aligned}$$

où $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ (\pi_3 \times \pi_1)$ et $\widetilde{\psi} = \psi \circ (\pi_3 \times \pi_1)$ [67]. Par conséquent, $\Lambda_0 = \Lambda \cap (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$, où $\Lambda = \{\varphi = \psi = 0\}$. On voit que $\{\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} = 0\}$ est une sous-variété p. 135
analytique dans $\mathbb{R}^6$, donc il en est de même avec Λ dans $P_3 \times P_1$ (cf. renvoi [67]), et Λ est compact. Soit $\pi : P_3 \times P_1 \to P_3$ la projection. Alors on voit que

$$\pi(\Lambda) \cap \mathbb{R}^3 = \pi(\Lambda_0) \cup \pi(\Lambda \cap (\mathbb{R}^3 \times (P_1 \setminus \mathbb{R}))) = \Gamma_0 \cup \{0\} = \Gamma_0$$

n'est pas semi-analytique.

2). Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction positivement homogène de degré 1, paire, positive et analytique non-algébrique (on peut prendre par exemple $\psi(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}\, e^{\frac{u^2}{u^2+v^2}}$). On voit alors que

$$\Lambda = \{(u, v) \neq 0,\ (\psi(u, v) - 2)^2 + z^2 = 1,\ x = z\,u,\ y = z\,v\}$$

[66]par les isomorphismes $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \mathbb{R}\,(x, y, z, 1) \in P_3$, et $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{R}\,(t, 1) \in P_1$, P_3 et P_1 étant considérés comme les variétés des droites homogènes de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$. x, y, z, u sont des coordonnées homogènes de $\mathbb{R}\,(x, y, z, u) \in P_3$, t, s celles de $\mathbb{R}\,(t, s) \in P_1$.

[67]L'analycité de $f : P_3 \times P_1 \to \mathbb{R}$ équivaut à celle de "f en coordonnées homogènes" c'est-à-dire de $f \circ (\pi_3 \times \pi_1)$. Un ensemble $V \subset P_3 \times P_1$ est une sous-variété analytique dans $P_3 \times P_1$ s'il en est de même avec $(\pi_3 \times \pi_1)^{-1}(V)$ dans $(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^5$, compacte, parce que $\{(u,v,z) : (u,v) \neq 0, (\psi(u,v)-2)^2+z^2 = 1\}$ est contenu dans l'ensemble $\{1 \leq \psi(u,v) \leq 3,\ |x| \leq 1\}$ qui est un sous-compact de $\{(u,v) \neq 0\}$. On voit ensuite que l'image de Λ par la projection $\pi : \mathbb{R}^5 \ni (x,y,z,u,v) \mapsto (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est

$$\begin{aligned} \pi(\Lambda) &= \{0\} \cup \{(x,y) \neq 0,\ z \neq 0,\ (\psi(x,y) - 2\,|z|)^2 + z^4 = z^2\} \\ &= \{0\} \cup \{(x,y) \neq 0,\ \psi(x,y) = z\,(2\,\mathrm{sign}\,z \pm \sqrt{1-z^2})\}\ . \end{aligned}$$

Si $\pi(\Lambda)$ était semi-analytique, il en serait de même avec $\{(x,y) \neq 0, |z| < 1,\ \psi(x,y) = z\,(2+\sqrt{1-z^2})\}$ qui est une composante connexe de $(\pi(\Lambda) \setminus \{0\}) \cap \{|z| < 1\}$, et avec $\{(x,y) \neq 0,\ \zeta = \psi(x,y),\ \zeta < \varepsilon\}$ qui est l'image de $\{(x,y) \neq 0,\ \psi(x,y) = z\,(2+\sqrt{1-z^2}),\ z < \varepsilon\}$ par l'isomorphisme analytique $\{|z| < \varepsilon'\} \ni (x,y,z) \mapsto (x,y,z\,(2+\sqrt{1-z^2})) \in \{|\zeta| < \varepsilon'_1\}$ avec certains $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon'_1$, mais ceci contredit l'observation précédente (Osgood) [68].

24 [Démonstration alternative de l'inégalité de Łojasiewicz]

p. 136

On va donner quelques applications du théorème 2 du N° 23, en particulier une démonstration des théorèmes 1 et 2 du N° 20 (en suivant l'idée de Hörmander).

Proposition. *Soit M une variété analytique réelle et soient $\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset M$. Supposons que φ, ψ sont semi-analytiques compacts, ou, plus généralement, que $\varphi = \pi_1(B_1)$ et $\psi = \pi_2(B_2)$ avec $B_1 \subset M \times \mathbb{R} \times N_1$, $B_2 \subset M \times \mathbb{R} \times N_2$ semi-analytiques compacts, où N_1, N_2 sont des variétés analytiques réelles et $\pi_1 : M \times \mathbb{R} \times N_1 \to M \times \mathbb{R}$, $\pi_2 : M \times \mathbb{R} \times N_2 \to M \times \mathbb{R}$ les projections, Alors*

$$\{\varphi = 0\} \subset \{\psi = 0\} \Longrightarrow |\psi(x)| \leq K\,|\varphi(x)|^\alpha \ \textit{dans } A,\ \textit{avec } K, \alpha > 0\ .$$

En effet, l'ensemble $Z = \{(\tau,\sigma) : \tau = \varphi(x),\ \sigma = \psi(x) \text{ pour un } x \in A\}$ est l'image du compact semi-analytique $\{(x,u,v,\tau,\sigma) \in M \times N_1 \times N_2 \times \mathbb{R}^2 :$

[68] On peut avoir une variété compacte donnée par des équations globales dans $\mathbb{R}^6$ en prenant $\psi(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}\,e^{u^2/u^2+v^2}$ et en ajoutant l'équation $t^4(u^2+v^2) = 1$ à celles qui définissent Λ.

$(x,\tau,u) \in B_1,\ (x,\sigma,v) \in B_2\}$ par la projection $(x,u,v,\tau,\sigma) \mapsto (\tau,\sigma)$, donc semi-analytique compact. Supposons que $\{\varphi = 0\} \neq \emptyset$ (l'autre cas étant trivial). Comme $Z \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{0\}$, donc ($Z$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$ étant régulièrement situés) on a $|\tau| \geq L\,|\sigma|^N$ pour $(\tau,\sigma) \in Z$, avec $L, N > 0$ [69], c'est-à-dire, $|\varphi(x)| \geq L\,|\psi(x)|^N$ dans A.

Corollaire. *Soient M, N des espaces euclidiens et soit $f : A \to N$, avec $A \subset M$, une application continue de graphe semi-analytique compact. Alors $|f(x) - f(y)| \leq K\,|x-y|^\alpha$ pour $x, y \in A$, avec $K, \alpha > 0$.* p. 137

Or, il suffit d'appliquer la proposition 1 aux fonctions $(x,y) \mapsto |f(x) - f(y)|$ et $(x,y) \mapsto |x-y|$.

Une démonstration du théorème 1 du N° 20. Il suffit de considérer des semi-analytiques compacts, et de prouver le suivant

Lemme. *Si A est semi-analytique compact d'un euclidien M, alors il existe une fonction semi-analytique continue $g : M \to \mathbb{R}$ vérifiant $\frac{1}{4}\,\rho(x,A) \leq g(x) \leq 4\,\rho(x,A)$ dans M.*

En effet, soient A, B semi-analytiques compacts ; on prend $g, \widetilde{g}$ selon le lemme pour $\rho(x,A)$ et $\rho(x, A \cap B)$; alors $\{g_B = 0\} \subset \{\widetilde{g}_B = 0\}$, donc (proposition) on a

$$\frac{1}{4}\,\rho(x, A \cap B) \leq \widetilde{g}(x) \leq K\,g(x)^\alpha \leq 4^\alpha\,K\,\rho(x,A)^\alpha$$

pour $x \in B$.

Remarque (Hörmander). Si A est semi-algébrique, alors $x \mapsto \rho(x,A)$ est semi-algébrique. Ceci résulte (comme au bout de la démonstration du lemme) du fait que, si A est fermé, l'ensemble $\{(x,t) : \rho(x,A) \leq t\} = \pi(\{(x,y,t) : |x-y| \leq t,\ y \in A\})$, où $\pi : (x,y,t) \mapsto (x,t)$, est semi-algébrique.

[69] On utilise le théorème 1 du N°18, Au lieu de ceci on peut raisonner de manière suivante. Soient $F_i \not\equiv 0$ des fonctions qui décrivent Z au voisinage de 0 ; on a $F_i = \tau^{k_i}\,G_i$ avec $G_i(0,\sigma) \not\equiv 0$, et alors il existe une partition normale $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{R}^2$ d'un $Q = \{|\tau| < \delta,\ |\sigma| < \varepsilon\}$ compatible avec les G_i ; de plus, Z est décrit par G_i, τ dans Q. Le membre $\Gamma_+ \in \mathcal{N}$ contenant $I_+ = \{0\} \times]0,\varepsilon[$ n'intersecte pas Z (comme un voisinage de I_+ n'intersecte pas Z et G_i sont de signe constant sur Γ_+) ; pareillement, le membre Γ_- contenant $\{0\} \times]-\varepsilon, 0[$ n'intersecte pas Z. Or (lemme 1 du N°18), $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ contient un $\{|\tau| < L'\,|\sigma|^N,\ |\sigma| < \varepsilon\}$ avec $L', N > 0$, d'où $\{|\tau| < L\,|\sigma|^N\} \cap Z = \emptyset$ avec $L > 0$ suffisamment petit.

Démonstration du lemme. On peut supposer que M soit vectoriel de dim n. Considérons l'ensemble $B = \{(x, u, t) : x + u \in A,\ |u| \leq t\}$; il est semi-analytique [70]. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des supplémentaires de $M \times \{0\} \times \mathbb{R}$ dans p. 138
$M^2 \times \mathbb{R}$ est ouvert dans la variété des sous-espaces de dim n de $M^2 \times \mathbb{R}$. Chaque $W \in \mathcal{S}_0$ est de la forme $W = \{(x, u, t) : x = \varphi(u),\ t = \psi(u)\}$ avec $\varphi : M \to M$, $\psi : M \to \mathbb{R}$ linéaires, et l'application $W \mapsto (\varphi, \psi)$ est continue ; la projection sur $M \times \{0\} \times \mathbb{R}$ parallèlement à W est l'application $(x, u, t) \mapsto (x - \varphi(u), 0, t - \psi(u))$, et on voit que si $|\varphi| < 1$, B est W-relativement compact. Par conséquent, d'après la proposition 3 du N° 22, il existe un $W \in \mathcal{S}_0$, avec $|\varphi| < \frac{1}{2}$, $|\psi| < \frac{1}{2}$, tel que l'image de B par $\pi : M^2 \times \mathbb{R} \ni (x, u, t) \mapsto (x - \varphi(u), t - \psi(u)) \in M \times \mathbb{R}$ est semi-analytique. Or on a

$$\begin{aligned} \pi(B) &= \{(x - \varphi(u), t - \psi(u)) : x + u \in A,\ |u| \leq t\} \\ &= \{(\xi, \tau) : \xi + u + \varphi(u) \in A,\ |u| \leq \tau + \psi(u) \text{ pour un } u\}\ , \end{aligned}$$

donc, si l'on note avec χ l'inverse de $u \mapsto u + \varphi(u)$ et si l'on pose $\sigma(v) = |\chi(v)| - \psi(\chi(v))$, on obtient

$$\begin{aligned} \pi(B) &= \{(\xi, \tau) : \xi + v \in A,\ \sigma(v) \leq \tau \text{ pour un } v\} \\ &= \{(\xi, \tau) : \sigma(y - \xi) \leq \tau \text{ pour un } y \in A\} = \{(\xi, \tau) : g(\xi) \leq \tau\}\ , \end{aligned}$$

où $g(\xi) = \inf_{y \in A} \sigma(y - \xi)$ est continue dans M et vérifie l'inégalité exigée à cause de $\frac{1}{4}|v| \leq \sigma(v) \leq 4|v|$. Par conséquent, I'ensemble $\{(\xi, \tau) : g(\xi) \leq \tau\}$ est semi-analytique, donc il en est de même avec son intérieur $\{g(\xi) < \tau\}$, et avec $\{g(\xi) = \tau\}$.

25 [Stratifications de Whitney]

p. 139

Soit M une variété analytique réelle.

On dira qu'un ensemble $E \subset M$ jouit de la *propriété* (s), si chaque $a \in \overline{E} \setminus E$ possède une base de voisinages $\{U_\nu\}$ telle que $U_\nu \cap E$ soient connexes. Alors, si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, $\overline{f} \cap (\{a\} \times \mathbb{R})$ est connexe pour chaque $a \in \overline{E}$ [71].

[70] C'est l'image de $\{y \in A,\ |y - x| \leq t\}$ par un isomorphisme linéaire.

[71] car on a $\overline{f} \cap (\{a\} \times \mathbb{R}) = \{a\} \times \bigcap \overline{f(U_\nu \cap E)}$, et $f(U_\nu \cap E)$ sont des intervalles.

On va définir (par récurrence) *subdivision prismatique* $\mathcal{N}^\sharp$ *d'une partition normale* $\mathcal{N}$. Supposons que $\mathcal{N}$ est une partition normale d'un Q dans $\mathbb{R}^n$. Si $n = 1$, on admet $\mathcal{N}^\sharp = \mathcal{N}$. Supposons que la subdivision prismatique soit définie pour les partitions normales dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Soit $Q = Q_* \times]-\delta, \delta[$, où $Q_* = \pi(Q)$ et $\pi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$, soit $\mathcal{N}_*$ la partition normale correspondante de Q_* (proposition 3 du N° 11), et $\mathcal{N}_*^\sharp$ sa subdivision prismatiqiue. Prenons un $\Gamma_* \in \mathcal{N}_*$ et soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ tous les membres de $\mathcal{N}$ vérifiant $\pi(\Gamma_i) = \Gamma_*$; en considérant Γ_ν comme $\Gamma_\nu : \Gamma_* \to \mathbb{R}$, on peut supposer que $\Gamma_1 < \ldots < \Gamma_s$ dans Γ_* ; posons $\Gamma_0 = -\delta$ et $\Gamma_{s+1} = \delta$ dans Γ_*. Notons avec $\mathcal{N}(\Gamma_*)$ la collection des ensembles

$$(\sharp) \qquad \begin{array}{l} \{\Gamma_\nu(u) < t < \Gamma_{\nu+1}(u),\ u \in \Lambda'\},\ \nu = 0, \dots, s, \\ \{t = \Gamma_\nu(u),\ u \in \Lambda'\},\ \nu = 1, \dots, s, \end{array}$$

avec $\Lambda' \in \mathcal{N}_*^\sharp$, $\Lambda' \subset \Gamma_*$. Alors on définit $\mathcal{N}^\sharp = \bigcup\{\mathcal{N}(\Gamma_*) : \Gamma_* \in \mathcal{N}_*\}$. Dans le cas général où $\mathcal{N}$ est une partition normale dans M, on définit $\mathcal{N}^\sharp$ comme l'image (par la carte) de la subdivision prismatique de la partition normale correspondante dans $\mathbb{R}^n$.

On voit que chaque $\Lambda \in \mathcal{N}^\sharp$ est une sous-variété analytique, semi-analy- p. 140
tique.

Lemme 1. *Chaque* $\Lambda \in \mathcal{N}^\sharp$ *jouit de la propriété* (s).

En effet, ceci est trivial pour $n = 1$. Admettons-le vrai pour $n - 1$. Alors, si l'on prend Λ' et Γ_ν comme dans $(\sharp)$, $\overline{(\Gamma_\nu)_{\Lambda'}}$ est une application continue de $\overline{\Lambda'}$ dans $\mathbb{R}$. Ceci (avec la propriété (s) de Λ') entraîne facilement que les ensembles $(\sharp)$ jouissent de la propriété (s).

Lemme 2. *Soit $B \subset M \times N$ un semi-analytique (N une variété analytique réelle) et soit $\theta \in N$. Posons $B_x = \{y \in N : (x, y) \in B\}$ pour $x \in M$. Alors l'ensemble $F = \{x \in M : \theta$ est intérieur à $B_x\}$ est semi-analytique.*

Démonstration. On va prouver l'assertion du lemme pour $B \subset A \times N$ avec $A \subset M$ semi -analytique, par récurrence sur $k = \dim A$. Elle est triviale si $k = 0$ (car alors F est isolé) ; supposons-la vraie pour $k - 1$. Soit $a \in M$ et soit $\mathcal{N}$ une partition normale d'un Q en (a, θ), compatible avec $A \times \{\theta\}$, $A \times N$ et B. On a donc $Q \cap (A \times \{\theta\}) = A' \cup \bigcup \Gamma_i$ avec $\Gamma_i \in \mathcal{N}$ de dim k et $A' \subset M \times \{\theta\}$ semi-analytique de dim $< k$. Par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $B \cap (\pi(A') \times N)$, où $\pi : M \times N \to M$ est la projection, $F \cap \pi(A')$ est semi-analytique, donc il en est de même

avec $F' \cap A'$, où $F' = F \times \{\theta\}$, et il reste à prouver que $F' \cap \bigcup \Gamma_i$ est semi-analytique [72]. Soit $(x, \theta) \in F' \cap \Gamma_i$; on a donc $\{x\} \times U \subset B$ avec un p. 141
voisinage U de θ ; prenons une variété σ transversale à $\pi(\Gamma_i)$ en x, telle que $\sigma \cap A = \{x\}$ (ce qu'on peut exiger car $\pi(\Gamma_i)$ est dans l'intérieur de A) ; alors $\sigma \times U$ est transversal à Γ_i en (x, θ) et (proposition 4 du N°19) pour chaque $\Gamma \in \mathcal{K} = \{\Gamma \in \mathcal{N} : \Gamma \subset A \times N,\ \Gamma_i \subset \overline{\Gamma}\}$ on a $(\{x\} \times U) \cap \Gamma = (\sigma \times U) \cap \Gamma \neq \emptyset$, d'où $\Gamma \subset B$; par conséquent $\bigcup \{\Gamma : \Gamma \in \mathcal{K}\}$, qui contient Γ_i dans son intérieur dans $A \times N$, est contenu dans B, donc $\Gamma_i \subset F'$. Ceci montre que $F' \cap \bigcup \Gamma_i = \bigcup \{\Gamma_i : \Gamma_i \cap F' \neq \emptyset\}$, d'où $F' \cap \bigcup \Gamma_i$ est semi-analytique.

Proposition. *Soit $A \subset M$ un semi-analytique et soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue, semi-analytique. Alors l'endemble $\{x \in \overline{A} \setminus A : \lim_{u \to x} f(u) = 0\}$ est semi-analytique.*

En effet, si l'on prend une subdivision prismatique d'une partition normale (en un point quelconque de M) compatible avec A, on voit qu'il suffit de considérer le cas où A jouit de la propriété (s). Or, l'ensemble en question est (cf. renvoi [72]) $(\overline{A} \setminus A) \cap \{\varphi_x = \{0\}\}$, où $\varphi_x = \{t : (x, t) \in \overline{f}\}$. Comme φ_x est connexe, on a $\{\varphi_x = \{0\}\} = \{0 \in \varphi_x\} \cap \{0 \text{ est intérieur à } \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \varphi_x)\}$; on en applique le lemme 2 avec $B = (M \times \{0\}) \cup ((M \times \mathbb{R}) \setminus \overline{f})$, en observant que alors $B_x = \mathbb{R} \setminus \varphi_x$, et on obtient ainsi que $\{\varphi_x = \{0\}\}$ est semi analytique.

Supposons pour le moment que M est un espace affine, V son espace vectoriel. Notons avec $\mathcal{J}$ l'ensenble de couples V', V'' de sous-espaces de V p. 142
vérifiant $V' \subset V''$. Si $\mathcal{G}', \mathcal{G}''$ sont les variétés de sous-espaces de V à k ou à ℓ dimensions, où $k \leq \ell$, alors $\mathcal{J} \cap (\mathcal{G}' \times \mathcal{G}'')$ est un sous-compact de $\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$. Soient N_0, N deux sous-variétés différentiables de M, de dimension k ou ℓ, où $k < \ell$, et notons avec τ_x^0 ou τ_z l'espace tangent de N_0 en x ou de N en z, respectivement ; soit $c \in N_0 \cap \overline{N}$. On dit que N_0, N jouissent en c de la *propriété* (A) *de Whitney*, si (τ_c^0, τ_z) tend vers $\mathcal{J}$ (dans $\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$) lorsque $z \in N$ tend vers c ; que N_0, N jouissent en c de la *propriété* (B) *de Whitney*, si $(\mathbb{R}\,(z - x), \tau_z)$ tend vers $\mathcal{J}$ (dans $P \times \mathcal{G}''$, où P est la variété des droites homogènes) lorsque $(x, z) \in (N_0 \times N) \cap \{x \neq z\}$ tend vers (c, c).

Observons maintenant que si des suites $x_\nu \in N_0$, $z_\nu \in N$ convergent vers un $a \in M$, alors la condition "$(\tau_{x_\nu}^0, \tau_{z_\nu})$ converge vers $\mathcal{J}$" est invariante par rapport aux difféomorphismes ; il en est de même avec la condition

[72] parce que alors $Q \cap F'$ est semi-analytique, ce qui donne la semi-analyticité de F' donc de F

“$(\mathbb{R}(v_\nu - u_\nu), t_{z_\nu})$ converge vers $\mathcal{J}$”, où u_ν, v_ν sont des suites convergentes vers a, telles que $u_\nu \neq v_\nu$ [73].

Par conséquent, on peut prendre pour M chaque variété différentiable et dire que deux sous-variétés différentiables N_0, N (de dimensions $k < \ell$) jouissent de la propriété (A) ou (B) (de Whitney) en un point $c \in N_0 \cap \overline{N}$, s'il en est de même avec ses images par une carte en c (ce qui ne dépend pas de la carte).

Théorème. *Soient N_0, N des sous-variétés analytiques, semi-analytiques de* p. 143
M (analytique) de dimension k, ℓ, où $k < \ell$. Alors les ensembles φ et ψ des points de $N_0 \cap \overline{N}$ où N_0, N jouissent de la propriété (A) ou (B) respectivement, sont semi-analytiques. Si $N_0 \subset \overline{N}$ alors $N_0 \setminus \varphi$ et $N_0 \setminus \psi$ sont rares dans N_0.

Avant la démonstration observons quelques faits de nature technique. Supposons que M soit euclidien, que V soit son espace vectoriel. Pour chaque couple de sous-espaces N', N'' de V tel que $\dim N' < \dim N''$ posons :

$$\begin{aligned}
\gamma(N', N'') &= \frac{|t' \wedge g''|}{|t'|\,|g''|}\ , \text{ où } t', g'' \text{ sont des multivecteurs (non nuls) de } N' \\
&\qquad \text{ou du supplémentaire orthogonal de } N\text{” respectivement,} \\
\sigma(N', N'') &= \sup\{\rho(x, N'' \cap S) <: x \in N' \cap S\} \text{ où } S = \{|x| = 1\}\ , \\
\sigma_1(N', N'') &= \sup\{\rho(x, N'') : x \in N' \cap S\} = |\pi'| \text{ où } \pi' \text{ est la projection} \\
&\qquad \text{orthogonale de } N' \text{ sur le supplémentaire orthogonal de } N''\ , \\
\sigma_0(N', N'') &= \inf\{|x - y| : x \in N' \cap S,\ y \in N'' \cap S\}\ .
\end{aligned}$$

On a alors $\mathcal{J} = \{\gamma = 1\} = \{\sigma = 0\} = \{\sigma_1 = 0\}$ [74]. Les restrictions des $\gamma, \sigma, \sigma_1, \sigma_0$ à $\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$ sont continues ; par conséquent, $\{\gamma > \theta\}_{\theta < 1}$, $\{\sigma < \varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ et $\{\sigma_1 < \delta\}_{\delta > 0}$ sont des bases du filtre des voisinages de $\mathcal{J} \cap (\mathcal{G}' \times \mathcal{G}'')$ dans $\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$, et la condition “$(N'_\nu, N''_\nu)$ tend vers $\mathcal{J}$” s'exprime par $\gamma(N'_\nu, N''_\nu) \to 1$ ou par $\sigma(N'_\nu, N''_\nu) \to 0$ ou par $\sigma_1(N'_\nu, N''_\nu) \to 0$.
On a ensuite les propriétés suivantes : $\sigma(N', N'') \leq \sigma(\widetilde{N'}, \widetilde{N''})$ si $N' \subset \widetilde{N'}$ et p. 144

[73] On vérifie ceci en décomposant le difféomorphisme considéré en un isomorphisme affine et des difféomorphismes de différentielle égale à identité (aux points considérés).

[74] Si $t' = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$, $|t'| = 1$, avec $e_i = e'_i + e''_i$, $e'_i \in N''$ et e''_i orthogonal à N'', alors $\gamma = |e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_k|$, et la condition $\gamma = 1$ signifie que $t' = e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_k$, c'est-à-dire que $N' \subset N''$.

$N'' \supset \widetilde{N''}$; $\sigma(N', N) \leq \sigma(N', N'') + \sigma(N'', N)$ [75] ; $\sigma(N', N'') = \sigma(N'', N')$ si $\dim N' = \dim N''$ [76] ; $\sigma_1(N' + N'', N) \leq \dfrac{\sigma_1(N', N) + \sigma_1(N'', N)}{\sigma_0(N', N'')}$ si $N' \cap N'' = \{0\}$ [77] ; enfin $\sigma_1(N', N'') \leq |\varphi' - \varphi''|$ si N', N'' sont (les images canoniques de) les graphes des applications linéaires $\varphi', \varphi'' : M_1 \to M_2$, où M_1, M_2 sont supplémentaires orthogonaux dans M [78]. Observons encore que si N' est une droite, $\gamma(N', N'')$ est le cosinus de l'angle entre N' et N'' (cf. renvoi 45).

Lemme 3. *Soit Ω un ouvert d'un euclidien. Alors, pour $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable,* $\inf\{|\mathrm{d}_u\varphi| : u \in \Omega\}$ *tend vers* 0 *avec* $\sup\{|\varphi(u)| : u \in \Omega\}$ [79].

En effet, soit $r > 0$ si petit qu'une boule $\{|u - c| \leq r\}$ soit contenue dans Ω ; alors, si $|\varphi(u)| \leq \dfrac{1}{3}\, r^2$ dans Ω, la fonction $\Omega \ni u \mapsto \varphi(u) + |u - c|^2 - r^2$ est $\geq -\dfrac{1}{3}\, r^2$ sur $\{|u - c| = r\}$ et $\leq -\dfrac{2}{3}\, r^2$ en c, donc atteint son minimum dans $\{|u - c| \leq r\}$ en un $u_0 \in \{|u - c| < r\}$. Par conséquent, $\mathrm{d}_{u_0}\varphi$ est égal à la différentielle de $u \mapsto -|u - c|^2 + r^2$ en u_0, donc à l'application $v \mapsto\; 2(u - c)\, v$, d'où $|\mathrm{d}_{u_0}\varphi| \leq 2r$.

Lemme 4. *Soient N_0, N des sous-variétés analytiques, semi-analytiques de* p. 145
M, supposé affine, telles que $\emptyset \neq N_0 \subset \overline{N} \setminus N$; notons avec τ_x^0, τ_z l'espace tangent de N_0 en $x \in N_0$ ou de N en $z \in N$ respectivement. Alors il existe un $b \in N_0$ tel que (τ_b^0, τ_z) tend vers $\mathcal{J}$ lorsque $z \in N$ tend vers b.

Démonstration. Comme la condition de la thèse est invariante par rapport aux isomorphismes analytiques, il suffit de considérer le cas où N_0 est un sous-ouvert d'un sous-espace M_0 de dimension k de M ; de plus, d'après la proposition 1 du N° 19, on peut admettre (vu les propriétés de σ) que $\dim N = k + 1$. Prenons une partition normale $\mathcal{N}$ d'un Q en un point de N_0, compatible avec N_0 et N, telle que M_0 corresponde (par la carte) à l'espace

[75] On a $\rho(x', S \cap N) \leq \rho(x', x'') + \rho(x'', S \cap N) \leq \rho(x', x'') + \sigma(N'', N)$ où $x' \in S \cap N'$, $x'' \in S \cap N''$, ce qui donne $\rho(x', S \cap N) \leq \rho(x', S \cap N'') + \sigma(N'', N)$, et l'inégalité en question.

[76] Car il existe une isométrie qui échange N' et N''

[77] Soit π la projection orthogonale sur le supplémentaire orthogonal de N''. Si $|\pi(x')| \leq A'\,|x'|$ dans N' et $|\pi(x'')| \leq A''\,|x''|$ dans N'', alors $|\pi(x' + x'')| \leq A'\,|x'| + A''\,|x''| \leq ((A' + A'')/\sigma_0(N', N''))\,|x' + x''|$.

[78] En effet, si $x' \in N' \times S$, on a $x' = u' + \varphi'(u')$, et $x'' = u' + \varphi''(u') \in N''$, donc $\rho(x', N'') \leq |x' - x''| \leq |\varphi' - \varphi''|\,|u'| \leq |\varphi' - \varphi''|$.

[79] Ceci n'est plus vrai si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^k$ avec $k \geq 2$.

des $(x_1, \dots, x_k)$. Alors il existe $\Gamma_0, \Gamma \in \mathcal{N}$ vérifiant $\dim \Gamma_0 = k$, $\Gamma_0 \subset N_0$, $\Gamma \subset N$, $\Gamma_0 \subset \overline{\Gamma}$. On peut admettre que Γ_0 est de la dimension minimale (en prenant une partition engendrée en un point de Γ_0), et enfin que $\mathcal{N}$ est une partition normale dans $\mathbb{R}^n$ selon $\{H_j^i\}$. Alors Γ est le graphe d'une application analytique $\varphi = (\varphi_{k+2}, \dots, \varphi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n-k-1}$ avec $\Omega = \pi(\Gamma)$ ouvert (dans $\mathbb{R}^{k+1}$), où $\pi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{k+1})$; en outre $\Gamma_0 = Q_0 \times \{0\}$ avec $Q_0 = \pi_0(Q)$, où $\pi_0 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$. Comme on a (prop. 7 du N°11) $(\overline{\Omega} \setminus \Omega) \cap \pi(Q) = \pi(\Gamma_0) = \pi(Q) \cap \{x_{k+1} = 0\}$, donc, par exemple, $\Omega = \pi(Q) \cap \{x_{k+1} > 0\} = Q_0 \times \{0 < t < \delta\}$. D'après le lemme 1 du N° 19, $\lim_{t \to 0} \varphi(u, t) = 0$ pour $u \in Q_0$ (uniformément dans chaque sous-compact de Q_0).

Soient $\varepsilon > 0$ et $c \in \Gamma_0$. Prenons une partition normale $\mathcal{N}'$ en c, compatible avec les ensembles Γ_0, Γ et

$$\left\{ \left| \frac{\partial H_j^{k+1}}{\partial x_i} \right| \leq \varepsilon \left| \frac{\partial H_j^{k+1}}{\partial x_j} \right| \right\} \ , i = 1 \dots, k, \ j = k+2, \dots n \ .$$

On a alors $\left| \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| \leq \varepsilon$ ou $\left| \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| > \varepsilon$ sur $\pi(\Gamma'')$ quel que soit $\Gamma'' \in \mathcal{N}'$, $\Gamma'' \subset \Gamma$. p. 146
Soit $\Gamma' \in \mathcal{N}'$, $\Gamma' \subset \Gamma_0$, de dimension k. Prenons un $c' \in \Gamma'$ et un $\Gamma'' \in \mathcal{N}'$ vérifiant $\Gamma'' \subset \Gamma$, $\overline{\Gamma''} \supset \Gamma'$; alors il existe un voisinage $U = Q_1 \times]-\tau, \tau[\times Q_2$ de c' tel que $Q_+ = Q_1 \times]0, \tau[$ soit connexe et contenu dans $\Omega = \pi(\Gamma)$ et $U \cap \Gamma = (Q_+ \times \mathbb{R}^{n-k-1}) \cap \Gamma$ soit disjoint avec $\overline{\Gamma''} \setminus \Gamma''$ (observons â cet effet que Γ' est ouvert dans $\overline{\Gamma''} \setminus \Gamma''$) ; par conséquent $U \cap \Gamma \subset \Gamma''$ (car Γ'' est ouvert dans Γ) et $Q_+ \subset \pi(\Gamma'')$; si l'on avait $\left| \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| > \varepsilon$ sur $\pi(\gamma'')$, alors $|\mathrm{d}_u \varphi_j^t| > \varepsilon$ sur Q_+, où $\varphi_j^t : u \mapsto \varphi_j(u, t)$, contrairement au lemme 3 ; on a donc $\left| \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| \leq \varepsilon$ sur $\pi(\Gamma'')$, $(i = 1, \dots, k;\ j = k+2, \dots, n)$, d'où $\sigma_1(\tau_{c'}^0, \tau_z) \leq |\mathrm{d}_u \varphi^t| \leq n^2 \varepsilon$ sur Q_+, où $\varphi^t : u \mapsto \varphi(u, t)$ et $z = (u, t, \varphi(u, t))$, c'est-à-dire, $\sigma_1(\tau_{c'}^0, \tau_z) \leq n^2 \varepsilon$ pour $z \in U \cap \Gamma$. Ceci montre que $\lim \sup_{\Gamma \ni z \to x} \sigma_1(\tau_x^0, \tau_z) \leq n^2 \varepsilon$ lorsque $x \in \Gamma'$. Par conséquent, ceci subsiste pour x dans un sous-ouvert dense de Γ_0, donc (Baire) pour un $b \in \Gamma_0$ on a $\lim_{\Gamma \ni z \to b} \sigma_1(\tau_b^0, \tau_z) = 0$.

Démonstration du Théorème. On peut admettre que M soit euclidien. Notons avec τ_x^0, τ_z l'espace tangent de N_0 en $x \in N_0$ et de N en $z \in N$, respectivement. Grâce aux propriétés de σ, si $c \in N_0 \cap \overline{N}$, alors $\sigma(\tau_c^0, \tau_x^0)$ tend vers 0 lorsque $x \in \Gamma_0$ tend vers c, donc la condition $\lim_{N \ni z \to c} \sigma(\tau_c^0, \tau_z) = 0$

équivaut à $\lim_{N_0 \ni x \to c,\ N \ni z \to c} \sigma(\tau_x^0, \tau_z) = 0$. Par conséquent,

$$\varphi = \{c \in N_0 \cap \overline{N} : \lim_{(x,z)\to(c,c)} \gamma(\tau_x^0, \tau_z) = 1\} \ .$$

On a

$$\psi = \{c \in N_0 \cap \overline{N} : \lim_{(x,z)\to(c,c),\ x\neq z} \gamma(\mathbb{R}\,(z-x), \tau_z) = 1\} \ .$$

Soit $c \in M$ et soit $\mathcal{N}$ une partition normale, d'un Q en c, compatible avec N_0 et N. Comme $N_0^* = \bigcup\{\Gamma \in \mathcal{N} : \Gamma \subset N_0,\ \dim\Gamma = k\}$ et $N^* =$ p. 147
$\bigcup\{\Gamma \in \mathcal{N} : \Gamma \subset N,\ \dim\Gamma = \ell\}$ sont denses dans $N_0 \cap Q$ et $N \cap Q$ respectivement, et comme $(N_0 \cap Q) \times (N \cap Q) \ni (x,z) \mapsto \gamma(\tau_x^0, \tau_z) \in \mathbb{R}$ est continue, donc

$$\varphi \cap Q = \{c \in N_0 \cap \overline{N} \cap Q : \lim_{N_0^* \times N^* \ni (x,z)\to(c,c)} \gamma(\tau_x^0, \tau_z) = 1\} \ .$$

Pareillement

$$\psi \cap Q = \{c \in N_0 \cap \overline{N} \cap Q : \lim_{N_0^* \times N^* \ni (x,z)\to(c,c)} \gamma(\mathbb{R}\,(z-x), \tau_z) = 1\} \ .$$

Or $g(z) = \operatorname{grad} \widehat{H}_{\ell+1}^{\ell}(z) \wedge \cdots \wedge \operatorname{grad} \widehat{H}_n^{\ell}(z)$ et $t(x) = g_0(x)^*$, où $g_0(x) = \operatorname{grad} \widehat{H}_{k+1}^{k}(x) \wedge \cdots \wedge \operatorname{grad} \widehat{H}_n^{k}(x)$ sont analytiques au voisinage de $\overline{Q}$, et si $x \in N_0^*$ et $z \in N^*$, alors $t(x)$ et $g(z)$ sont des multivecteurs non nuls de τ_x^0 ou du supplémentaire orthogonal de τ_z, respectivement. Par conséquent,

$$N_0^* \times N^* \ni (x,z) \longmapsto \gamma(\tau_x^0, \tau_z) = \frac{|t(x) \wedge g(z)|}{|t(x)|\,|g(z)|} \in \mathbb{R}$$

ainsi que

$$N_0^* \times N^* \ni (x,z) \longmapsto \gamma(\mathbb{R}\,(z-x), \tau_z) = \frac{|(z-x) \wedge g(z)|}{|z-x|\,|g(z)|} \in \mathbb{R}$$

sont continues, de graphes semi-analytiques, d'où il résulte, en vertu de la proposition, que $\varphi \cap Q$ et $\psi \cap Q$ sont semi-analytiques. Ceci montre la semi-analyticité de φ et ψ.

Supposons maintenant que $N_0 \subset \overline{N}$.

$N_0 \setminus \varphi$ *est rare dans* N_0. Comme $N_0 \setminus \varphi$ est semi-analytique, ceci résulte immédiatement du lemme 4 (où on remplace N par $N \setminus \overline{N_0}$).

$N_0 \setminus \psi$ *est rare dans* N_0. Soit $a \in N_0$ et soit M_1 le supplémentaire de τ_a^0. 11 existe un voisinage U de a tel que M_1 soit supplémentaire à τ_c^0 pour chaque $c \in U \cap N_0$ et que $U \cap N_0 \cap (z + M_1) = \{p(z)\}$ où $p : U \to N_0$ est analytique (projection de U dans N_0 parallèlement à M_1). Posons $\psi_1 = \{c \in N_0 \cap U : \lim_{z \to c,\ z \neq p(z)} \sigma(\mathbb{R}\,(z - p(z)), \tau_z) = 0\}$. On a $\varphi \cap \psi_1 \subset \psi$. En effet, soit $c \in \varphi \cap \psi_1$; si $(x, z) \in (N_0 \times N) \cap \{x \neq z\}$ tend vers (c, c), alors, si $x = p(z)$, $\sigma(\mathbb{R}\,(z - x), \tau_z) \to 0$, et si $x \neq p(z)$, on a $\sigma(\tau_c^0, \tau_z) \to 0$, et $\sigma(\mathbb{R}\,(x - p(z)), \tau_c^0) \to 0$ d'où $\sigma(\mathbb{R}\,(x - p(z)), \tau_z) \to 0$; maintenant, si $z = p(z)$, $\sigma(\mathbb{R}\,(x - z), \tau_z) \to 0$, et si $z \neq p(z)$, on a $\sigma(\mathbb{R}\,(z - p(z)), \tau_z) \to 0$, p. 148
mais $\liminf \sigma_0(\mathbb{R}\,(x - p(z)), \mathbb{R}\,(z - p(z)) \geq \sigma_0(\tau_c^0, M_1) > 0$, donc (propriétés de σ_1) $\sigma(\tau'_{x,z}, \tau_z) \to 0$ où $\tau'_{x,z} = \mathbb{R}\,(x - p(z)) + \mathbb{R}\,(z - p(z))$ ce qui entraîne $\sigma(\mathbb{R}\,(x - z), \tau_z) \to 0$ parce que $\mathbb{R}\,(x - z) \subset \tau'_{x,z}$; ceci montre que $c \in \psi$.

Comme $(N_0 \setminus \varphi) \cap U$ est rare dans $N_0 \cap U$, il suffit de prouver que ψ_1 est dense dans $N_0 \cap U$, puisque alors $\psi \cap U$ sera dense dans $N_0 \cap U$, d'où l'ensemble $(N_0 \setminus \psi) \cap U$ semi-analytique (dans U) sera sans points intérieurs, donc rare (dans $N_0 \cap U$).

II reste donc à prouver que $(N_0 \cap U) \setminus \psi_1$ n'a pas de points intérieurs, ou bien (Baire) que l'ensemble

$$\{c \in N_0 \cap U : \liminf_{z \to c,\ z \neq p(z)} \gamma(\mathbb{R}\,(z - p(z)), \tau_z) \geq 1 - 2\delta\}$$

(qui est fermé) n'en a pas, quelque soit $\delta > 0$. Supposons le contraire. Il existe alors un voisinage $W \subset U$ dans M d'un $c \in N_0 \cap U$ tel que $\liminf_{z \to x,\ z \neq p(z)} \gamma(\mathbb{R}\,(z - p(z)), \tau_z) \leq 1 - 2\delta$ pour $x \in W \cap N_0$. On a vu que

$$\gamma(\mathbb{R}\,(z - p(z)), \tau_z) = \frac{|(z - p(z)) \wedge g(z)|}{|z - p(z)|\,|g(z)|}$$

dans $\{z \in W \cap N : g(z) \neq 0,\ p(z) \neq z\}$, avec un g analytique dans W et $\not\equiv 0$ dans $W \cap N$, pourvu que W soit suffisamment petit ; par conséquent, l'ensemble

$$B' = \{z \in W \cap N : g(z) \neq 0,\ p(z) \neq z,\ \gamma(\mathbb{R}\,(z - p(z)), \tau_z) \leq 1 - \delta\}$$

est semi-analytique (dans W). Soit $\mathcal{N}$ une partition normale, d'un $Q \subset W$, en c, compatible avec B', N_0 et N. Prenons un $\Gamma_0 \in \mathcal{N}$, $\Gamma_0 \subset N_0$ de dim k ; on a alors $\Gamma_0 \subset \overline{\Gamma}$ avec un $\Gamma \in \mathcal{N}$, $\Gamma \subset B'$ de dim ℓ. En effet, dans le cas contraire, l'ensemble $B_1 = \bigcup\{\Gamma \in \mathcal{N} : \overline{\Gamma} \supset \Gamma_0,\ \Gamma \subset N,\ \dim \Gamma = \ell\}$ qui est dense dans $B_0 \cap N$, où $B_0 = \bigcup\{\Gamma \in \mathcal{N} : \overline{\Gamma} \supset \Gamma_0\}$ est un ouvert contenant Γ_0, serait disjoint avec B', donc on aurait $\gamma(\mathbb{R}\,(z - p(z)), \tau_z) > 1 - \delta$

dans l'ensemble $B_1 \cap \{g(z) \neq 0,\ p(z) \neq z\}$ qui est dense dans $B_0 \cap N$, p. 149
d'où $\gamma(\mathbb{R}\,(z - p(z)), \tau_z) \geq 1 - \delta$ dans $B_0 \cap N \cap \{p(z) \neq z\}$, ce qui donnerait $\liminf_{z \to x,\ z \neq p(z)} \gamma(\mathbb{R}\,(z - p(z)), \tau_z) \geq 1 - \delta$ pour $x \in \Gamma_0$. On a donc $\gamma(\mathbb{R}\,(z - p(z)), \tau_z) \leq 1 - \delta$ pour $z \in \Gamma$. Or, si l'on prend un $b \in \Gamma_0$, on a (proposition 4 du N° 19), $b \in \overline{\Gamma \cap (b + M_1)}$, donc (comme $p(z) = b$ sur $\Gamma \cap (b + M_1)$) $\liminf_{z \to b} \gamma(\mathbb{R}\,(z - b), \tau_z) \leq 1 - \delta$, ce qui contredit la proposition 3 du N° 19.

Partitions normales avec les propriétés (A) **et** (B)**.** On dit que $\mathcal{N}$ est une partition normale avec les propriétés (A) et (B), si chaque couple $\Gamma_0, \Gamma \in \mathcal{N}$ vérifiant $\Gamma_0 \subset \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ jouit des propriétés (A) et (B) en chaque point de Γ_0.

On va démontrer que chaque partition normale admet un raffinement avec les propriétés (A) et (B), ou, ce qui revient au même, que, quelles que soient les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ analytiques au voisinage d'un $c \in M$, il existe une partition normale en c, avec les propriétés (A) et (B). compatible avec $f_1, \ldots, f_p$.

II suffit de considérer le cas où M est vectoriel et $c = 0$. Construisons un système normal de la manière standard, avec les facteurs suivants. On prend $\varphi_n = f_1 \cdots f_p$. Soit $k < n$. On considère les sous-variétés analytiques $C_0^j = \{x \in U_j : \widehat{H}_{j+1}^j = \ldots = \widehat{H}_n^j = 0,\ \widehat{D}_{j+1}^j \neq 0, \ldots,\ \widehat{D}_n^j \neq 0\}$, $j = n, \ldots, k$, avec un voisinage U_j de 0 suffisamment petit, et $\widehat{D}_\ell^j = \widetilde{D}_\ell^j \circ \pi_j$, où $\pi_j : \sum_i^n \xi_i\, e_i \mapsto \sum_1^j \xi_i\, e_i$. L'ensemble S_j des points de $C_0^k \cap \overline{C_0^j}$ où C_0^k, C_0^j ne jouissent pas au moins d'une des propriétés (A), (B), est semi-analytique, $j = k+1, \ldots, n$. Les S_j sont décrits par des fonctions $g_1^k, \ldots, g_{r_k}^k$ au voisinage p. 150
de 0. On prend

$$\varphi_k = \left(\prod_{i=1}^{p} \sigma^{(\widetilde{H}_{k+1}^k, \ldots, \widetilde{H}_n^k)} f_i \right) \left(\prod_{\nu=1}^{k} \sigma^{(\widetilde{H}_{k+1}^k, \ldots, \widetilde{H}_n^k)} g_\nu^k \right) .$$

Soit $\mathcal{N}$ une partition normale (selon ce système) d'un $Q \subset \bigcap_1^{n-1} U_j$ suffisamment petit ; alors (remarque 3 du N° 14) $\mathcal{N}$ est compatible avec $f_1, \ldots, f_p$ et on a $g_\nu^k \equiv 0$ ou $g_\nu^k \neq 0$ sur chaque $\Gamma_0 \in \mathcal{N}$ de dimension k ; par conséquent, $\Gamma_0 \subset S_j$ ou $\Gamma_0 \cap S_j = \emptyset$ (pour $j > k$). Soient $\Gamma_0, \Gamma \in \mathcal{N}$, $\Gamma_0 \subset \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$, $\dim \Gamma_0 = k$; alors $j = \dim \Gamma > k$. Comme $\Gamma_0 \subset C_0^k$ et $\Gamma \subset C_0^j$, selon le théorème $\Gamma_0 \cap S_j$ est rare dans Γ_0, donc on a forcément $\Gamma_0 \cap S_j = \emptyset$, ce qui montre que Γ_0 et Γ jouissent des propriétés (A) et (B) en chaque point de Γ_0.

Stratifications primaire et secondaire de Whitney. Soit M une variété analytique de dimension n. Soit $\mathcal{T}$ une partition localement finie de M en variétés analytiques, semi-analytiques On dira que $\mathcal{T}$ est une *stratification primaire* si pour chaque $\Gamma \in \mathcal{T}$, $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ est réunion localement finie de certains $\Gamma' \in \mathcal{T}$ de dimension $< \dim \Gamma$; que $\mathcal{T}$ est une *stratification secondaire*, si, de plus, chaque couple $\Gamma_0, \Gamma \in \mathcal{T}$ vérifiant $\Gamma_0 \subset \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ jouit des propriétés (A) et (B) en chaque point de Γ_0. On dira que $\mathcal{T}$ *est compatible avec une famille φ de sous-ensembles de M*, si on a $\Gamma \subset E$ ou $\Gamma \subset M \setminus E$ quels que soient $\Gamma \in \mathcal{T}$ et $E \in \varphi$.

On va construire une stratification primaire et une stratification secondaire de M, compatibles avec une famille localement finie d'ensembles semi-analytiques φ, donnée arbitrairement.

On définit des sous-variétés analytiques, semi-analytiques $V^n, \ldots, V^0$ par p. 151
récurrence (descendante) de la manière suivante : Soit $n \geq k \geq 0$. On pose $Z^k = M \setminus (V^n \cup \cdots \cup V^{k+1})$ (donc $Z^n = M$), on note avec W^k l'ensemble des points réguliers de dimension k de Z^k, on note (pour tout $E \subset M$ semi-analytique) avec $r_k(E)$ ou $s_k(E)$ l'intérieur (dans W^k) de $W^k \cap E$ ou de $W^k \setminus E$ respectivement, et on définit V^k (étant donnés $V^n, \ldots, V^{k+1}$) par

$$1) \qquad V^k = \bigcap_{j>k} \left(r_k(\overline{\Gamma^j_\nu}) \cup s_k(\overline{\Gamma^j_\nu}) \right) \cap \bigcap \{ r_k(A) \cup s_k(A) : A \in \varphi \} \ ,$$

ou bien par

$$2) \quad V^k = \bigcap_{j>k} \left(\left(r_k(\overline{\Gamma^j_\nu}) \setminus \overline{\Lambda^j_{k,\nu}} \right) \cup s_k(\overline{\Gamma^j_\nu}) \right) \cap \bigcap \{ r_k(A) \cup s_k(A) : A \in \varphi \} \ ,$$

où Γ^j_ν sont les composantes connexes de V^j et $\Lambda^j_{k,\nu}$ dénote l'ensemble des points de $r_k(\overline{\Gamma^j_\nu})$ où $r_k(\overline{\Gamma^j_\nu}), \Gamma^j_\nu$ ne jouissent pas au moins d'une des propriétés (A), (B). Alors Γ^j_ν est une stratification, et une stratification primaire ou secondaire selon le cas 1) ou 2), compatible avec φ.

Démonstration. En supposant que $V^n, \ldots, V^{k+1}$ sont des sous-variétés analytiques, semi-analytiques, on a, quel que soit un ouvert G de M, pour chaque E semi-analytique qui n'intersecte pas G, $r_k(E) \cap G = \emptyset$ et $s_k(E) \cap G = W^k \cap G$, donc

$$(*) \qquad V^k \cap G = \bigcap \left\{ r_k(\overline{\Gamma^j_\nu}) \cup s_k(\overline{\Gamma^j_\nu}) : j > k, \ \overline{\Gamma^j_\nu} \cap G \neq \emptyset \right\} \cap$$
$$\cap \bigcap \{ r_k(A) \cup s_k(A) : A \in \varphi, \ A \cap G \neq \emptyset \} \cap G$$

dans le cas 1) , et pareillement dans le cas 2) (avec $r_k(\overline{\Gamma^j_\nu}) \setminus \overline{\Lambda^j_{k,\nu}}$ au lieu de $r_k(\overline{\Gamma^j_\nu})$. Ceci montre que V^k est un sous-ouvert de W^k, une sous-variété analytique, semi-analytique, et ainsi la récurrence marche (dans la définition de V^k). Il en résulte ensuite, que V^k est un sous-ouvert de Z^k, donc (récurrence, $Z^{k-1} = Z^k \setminus V^k$) les Z^k sont fermés. On a maintenant $Z^{k-1} = Z^k \setminus V^k = (Z^k \setminus W^k) \cup (W^k \setminus V^k)$ et (vu $(*)$) $(W^k \setminus V^k) \cap G = (W^k \cap G) \setminus (V^k \cap G)$ est réunion finie d'ensembles de la forme p. 152

$$W^k \setminus r_k(E) \setminus s_k(E) \subset ((W^k \cap E) \setminus r_k(E)) \cup ((W^k \setminus E) \setminus s_k(E)) ,$$

ou encore, dans le cas 2), de la forme

$$W^k \setminus (r_k(E) \setminus \Lambda) \setminus s_k(E) \subset ((W^k \cap E) \setminus r_k(E)) \cup \Lambda \cup ((W^k \setminus E) \setminus s_k(E))$$

avec E semi-analytique et Λ semi-analytique rare dans $r_k(E)$; par conséquent, $W^k \setminus V^k$ est rare dans W^k et la récurrence (avec la proposition 5 du N° 17) donne $\dim Z^k \leq k$. En particulier, Z^0 est discret, $V^0 = W^0 = Z^0$ (car $r_0(E) \cup s_0(E) = W_0$ et $\Lambda^j_{0,\nu} = \emptyset$ vu la proposition 3 du N° 19), donc on a $M = V^n \cup \cdots \cup V^0 = \bigcup \Gamma^j_\nu$, et on voit que ceci est une partition localement finie de M.

Pour avoir l'alternative $\Gamma^k_\mu \subset \overline{\Gamma^\ell_\lambda}$ ou $\Gamma^k_\mu \cap \overline{\Gamma^\ell_\lambda} = \emptyset$ (pour $k < \ell$) il suffit de vérifier que $\Gamma^k_\mu \cap \overline{\Gamma^\ell_\lambda}$ est ouvert dans Γ^k_μ ; or, ceci a lieu, parce que $\Gamma^k_\mu \subset r_k(\overline{\Gamma^\ell_\lambda}) \cup s_k(\overline{\Gamma^\ell_\lambda})$, d'où $\Gamma^k_\mu \cap \overline{\Gamma^\ell_\lambda} \subset r_k(\overline{\Gamma^\ell_\lambda})$ et $\Gamma^k_\mu \setminus \overline{\Gamma^\ell_\lambda} = \Gamma^k_\mu \cap s_k(\overline{\Gamma^\ell_\lambda})$, le second membre étant ouvert dans Γ^k_μ. Comme on a $\overline{\Gamma^\ell_\lambda} \setminus \Gamma^\ell_\lambda \subset \overline{V^\ell} \setminus V^\ell \subset Z^\ell \setminus V^\ell = V^{\ell-1} \cup \cdots \cup V^0$, donc $\overline{\Gamma^\ell_\lambda} \setminus \Gamma^\ell_\lambda$ est réunion de certains Γ^k_μ avec $k < \ell$.

Ensuite, quel que soit $A \in \varphi$, Γ^k_μ est contenu dans la réunion des sous-ouverts disjoints $r_k(A)$ et $s_k(A)$ de W^k, donc dans l'un d'eux, ce qui donne p. 153
l'alternative $\Gamma^k_\mu \subset A$ ou $\Gamma^k_\mu \subset M \setminus A$.

Enfin, dans le cas 2), si $\Gamma^k_\mu \subset \overline{\Gamma^\ell_\lambda}$, on a $\Gamma^k_\mu \subset \left(r_k(\overline{\Gamma^\ell_\lambda}) \setminus \overline{\Lambda^\ell_{k,\lambda}} \right) \cup s_k(\overline{\Gamma^\ell_\lambda})$, donc $\Gamma^k_\mu \subset r_k(\overline{\Gamma^\ell_\lambda}) \setminus \Lambda^\ell_{k,\lambda}$, ce qui montre que $\Gamma^k_\mu, \Gamma^\ell_\lambda$ jouissent des propriétés (A) et (B) en tout point de Γ^k_μ.

Index