

Feuille d'exercices sur les espaces euclidiens

Exercice 1

Soit q la forme quadratique sur \mathbb{R}^2 définie par $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + ax_2^2$. À quelle condition sur a la forme polaire b de q est-elle un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 ? Dans le cas où a vérifie cette condition, trouver une base orthonormale de \mathbb{R}^2 pour le produit scalaire b .

Exercice 2

Soit u_1, \dots, u_n n vecteurs d'un espace euclidien, orthogonaux deux à deux. Montrer qu'ils forment une famille libre.

Exercice 3

Soit u_1, \dots, u_n n vecteurs distincts, tous de norme 1, dans un espace euclidien. On suppose qu'il existe des nombres réels positifs ou nuls a_1, \dots, a_n tels que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ et $\|\sum_{i=1}^n a_i u_i\| = 1$. Montrer qu'alors un et un seul des a_i vaut 1, et tous les autres valent 0.

Exercice 4

Montrer que tout vecteur u de norme 1 de l'espace euclidien usuel \mathbb{R}^3 peut s'écrire sous la forme $u = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi \end{pmatrix}$. Compléter u en une base orthonormée de \mathbb{R}^3 décrite au moyen de fonctions trigonométriques de φ et ψ .

Exercice 5

On se place dans \mathbb{R}^3 avec le produit scalaire standard. Soit $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Trouver l'image de v par la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; sur le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; sur le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

On est dans \mathbb{R}^4 avec le produit scalaire standard. Trouver une base orthogonale, puis une base orthonormale, du sous-espace engendré par les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

On est dans \mathbb{R}^4 avec le produit scalaire standard. Soit P le plan de \mathbb{R}^4 donné par les équations

$$\begin{cases} y + z + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

Trouver des équations du plan orthogonal à P . Écrire la matrice de la projection orthogonale sur P dans la base canonique.

Exercice 8

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, il existe un unique triplet (a, b, c) de nombres réels tel que

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \int_0^1 (f(t) - a - bt - ct^2)^2 dt \leq \int_0^1 (f(t) - x - yt - zt^2)^2 dt.$$

2. Calculer (a, b, c) pour $f(t) = e^t$.

Exercice 9

Vérifiez que la formule $(M | N) = \text{trace}({}^t M N)$ définit bien un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est l'adjoint de l'endomorphisme $M \mapsto AM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire ?

Exercice 10

Trouver des matrices orthogonales $P \in O_3$ et $Q \in O_4$ telles que $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ soient diagonales, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

Soit A une matrice symétrique réelle 3×3 . On suppose que sa trace est négative ou nulle et que son déterminant est strictement positif. Quelle est sa signature ?

Exercice 12

Soit S une matrice symétrique réelle $n \times n$, définie positive. Montrer qu'il existe une matrice symétrique réelle $n \times n$ définie positive T telle que $T^2 = S$.

Exercice 13

Compléter la matrice $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & ? \\ 2 & ? & ? \\ 1 & -2 & ? \end{pmatrix}$ pour obtenir une matrice de rotation. Quel est l'axe et l'angle de cette rotation ?

Problème

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes, muni du produit scalaire défini par $(P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit E_n le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n ; on note q_n la projection orthogonale sur E_n .

1. Soit n un entier ≥ 1 . Montrer que $P_n = X^n - q_{n-1}(X^n)$ est l'unique polynôme unitaire de degré n orthogonal à E_{n-1} .
2. On pose $P_0 = 1$. Calculer P_1, P_2, P_3 .
3. Montrer que (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base orthogonale de E_n .
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, le polynôme $P_n - XP_{n-1}$ est combinaison linéaire de P_{n-1} et P_{n-2} . (On pourra remarquer que $(XP | Q) = (P | XQ)$ pour tous polynômes P, Q).
5. Soit a_1, \dots, a_k les racines distinctes du polynôme P dans $[0, 1]$ Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in E_k$ tel que $(P | Q) \neq 0$. En déduire que P_n a n racines distinctes dans $[0, 1]$.