Chapitre 1

Formes linéaires et dualité

.

1.1 Définition, espace dual

Définition 1.1 *Une* **forme linéaire** *sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires sur E, avec l'addition définie par $(\ell + m)(x) = \ell(x) + m(x)$ et la multiplication par les scalaires définie par $(\lambda\,\ell)(x) = \lambda\,\ell(x)$, est un espace vectoriel sur K, appelé l'***espace vectoriel dual** *de E et noté E^*.*

Exemples :

1. Une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$ est de la forme $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$; elle est déterminée par sa matrice $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$ (matrice ligne).
2. L'application $f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
3. L'application qui a une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ associe sa trace (somme des coefficients diagonaux) est une forme linéaire.

Si x est un vecteur de E et ℓ une forme linéaire sur E, on utilise parfois la notation $\langle \ell, x\rangle$ (**crochet de dualité**) pour désigner $\ell(x)$. Les propriétés du crochet de dualité sont

$$\begin{aligned}
\langle \ell, x + y\rangle &= \langle \ell, x\rangle + \langle \ell, y\rangle \\
\langle \ell, \lambda\, x\rangle &= \lambda\,\langle \ell, x\rangle \\
\langle \ell + m, x\rangle &= \langle \ell, x\rangle + \langle m, x\rangle \\
\langle \lambda\ell, x\rangle &= \lambda\,\langle \ell, x\rangle
\end{aligned}$$

1.2 Hyperplans et formes linéaires

Définition 1.2 *Un* **hyperplan vectoriel** *d'un espace vectoriel E est un supplémentaire d'une droite vectorielle de E. Si E est de dimension finie n, alors les hyperplans vectoriels de E sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.*

Rappel : Supplémentaire.

Définition 1.3 *On dit qu'un espace vectoriel E est* **somme directe** *de ses sous-espaces F et G quand tout élément x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, et on note alors $E = F \oplus G$.*

Si F et G sont deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$, on dit que F et G sont **supplémentaires** *dans E.*

Proposition 1.4 *Soit E un espace de dimension finie. Soit F, G des sous-espaces de E, $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_q)$ une base de G. Alors $E = F \oplus G$ si et seulement si $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E.*

Théorème 1.5 (de la base incomplète) *Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{G}$ une partie génératrice de E, $(e_1, \dots, e_\ell)$ une famille libre de E. Alors on peut compléter cette famille libre en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E en choisissant les vecteurs $e_{\ell+1}, \dots, e_n$ dans G.*

Proposition 1.6 *Dans un espace de dimension finie, tout sous-espace admet un supplémentaire.*

Proposition 1.7 *Soit ℓ une forme linéaire non nulle sur E. Alors $\ker(\ell)$ est un hyperplan vectoriel de E.*

Pour tout hyperplan vectoriel H de E, il existe une forme linéaire non nulle ℓ sur E telle que $H = \ker(\ell)$; cette forme linéaire est unique au produit par un scalaire inversible près.

Exemples :

1. Un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ est décrit par une équation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ avec au moins un des a_i non nul.
2. Le sous-espace de $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ formé des f tels que $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$. est un hyperplan vectoriel.
3. Le sous-espace de $M_n(\mathbb{K})$ formé des matrices de trace nulle est un hyperplan vectoriel.

1.3 Base duale

Ici E est supposé de dimension finie n.

Proposition 1.8 *Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ les formes linéaires coordonnées dans la base $\mathcal{E}$. Autrement dit, on a $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ (de Kronecker). Alors $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.*

En conséquence, on a $\dim(E^*) = \dim(E)$.

Définition 1.9 *La base $\mathcal{E}^*$ de E^* est appelée* **base duale** *de la base $\mathcal{E}$ de E.*

Si $x \in E$, alors $x = \sum_{i=1}^n \langle e_i^*, x \rangle \, e_i$. Si $\ell \in E^*$, alors $\ell = \sum_{i=1}^n \langle \ell, e_i \rangle \, e_i^*$.

Exemples :

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Les vecteurs colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$ dont la base duale est donnée par les lignes de A^{-1}. Cet exemple est important car il donne un moyen pratique de calcul d'une base duale d'une base de $\mathbb{K}^n$.
2. (**Interpolation de Lagrange**) Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leq n$. Soient $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ nombres réels distincts. Alors les formes linéaires $P \mapsto P(a_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$ forment une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$, duale de la base $(L_0, \ldots, L_n)$ où

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \ .$$

   Si on se donne $b_0, \ldots, b_n$, il existe un unique $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $P(a_i) = b_i$ pour $i = 0, \ldots, n$, qui est donné par $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i$.

1.4 Bidual

Soit $x \in E$. Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, x \rangle : E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \ell & \longmapsto & \langle \ell, x \rangle \end{array}$$

est une forme linéaire sur E^*, c.-à-d. un élément du **bidual** E^{**} de E.

Proposition 1.10 *L'application $E \to E^{**}$ définie par $x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$ est une application linéaire injective.*

Si E est de dimension finie, cette application est un isomorphisme.

L'injectivité de $x \mapsto \langle \cdot, x\rangle$ veut dire que $x = y$ si et seulement si $\langle x, \ell\rangle = \langle y, \ell\rangle$ pour tout $\ell \in E^*$ (par définition du crochet de dualité, on a $\ell = m$ si et seulement si $\langle \ell, x\rangle = \langle m, x\rangle$ pour tout $x \in E$).

Si E est de dimension finie, on identifiera E avec son bidual au moyen de l'isomorphisme $x \mapsto \langle \cdot, x\rangle$; cet isomorphisme est « canonique » dans le sens qu'il ne dépend pas du choix d'une base de E. De cette manière, E et E^* jouent des rôles complètement symétriques. En particulier, toute base de E^* admet une base duale de E. On a aussi $\langle \ell, x\rangle = \langle x, \ell\rangle$, où le deuxième crochet de dualité est sur E^*.

1.5 Orthogonalité

Définition 1.11 *Soit A une partie de E, B une partie de E^*. On définit*

$$\begin{aligned} A^\circ &= \{\ell \in E^* \mid \forall x \in A \ \langle \ell, x\rangle = 0\} , \\ B^\circ &= \{x \in E \mid \forall \ell \in B \ \langle \ell, x\rangle = 0\} . \end{aligned}$$

On appelle A° (resp B°) **l'orthogonal** *de A (resp. de B) pour la dualité (on dit quelquefois aussi l'annulateur de A, par exemple dans le lire de Grifone).*

Exemple : Si $\ell_1, \dots \ell_p$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$, l'orthogonal de $\{\ell_1, \dots \ell_p\}$ est le sous-espace des solutions du système linéaire homogène

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ell_1(x_1, \dots x_n) &=& 0 \\ &\vdots& \\ \ell_p(x_1, \dots x_n) &=& 0 \end{array} \right. .$$

Proposition 1.12 *Soit A, A_1, A_2 des parties de E, B une partie de E^*. Alors :*

1. *A° est un sous-espace vectoriel de E^*.*
2. *On a $B \subset A^\circ$ si et seulement si $A \subset B^\circ$.*
3. *Si $A_1 \subset A_2$, alors $A_2^\circ \subset A_1^\circ$.*
4. $(\mathrm{Vect}(A))^\circ = A^\circ$.

Les mêmes propriétés sont vraies en échangeant les rôles de E et de E^*.

Proposition 1.13 *On suppose E de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

1. $\dim(F^\circ) = n - \dim(F)$.
2. $(F^\circ)^\circ = F$.

Les mêmes propriétés sont vraies pour un sous-espace de E^*.