Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques
L3 Mathématiques 2009-2010

ALBI – Indications pour les exercices sur les espaces hermitiens

Exercice 1

$$q(x) = |x_1|^2 + 3\,|x_2|^2 + 6\,|x_3|^2 + i\,\overline{x_1}\,x_2 - i\,x_1\,\overline{x_2} + 2i\,x_2\,\overline{x_3} - 2i\,\overline{x_2}\,x_3 \ .$$

1. La matrice de la forme hermitienne f telle que $q(x) = f(x,x)$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & -2i \\ 0 & 2i & 6 \end{pmatrix} .$$

2. On a
$$\begin{aligned} q(x) &= \Big((\overline{x_1} - i\,\overline{x_2})(x_1 + i\,x_2) - |x_2|^2\Big) + 3\,|x_2|^2 + 6\,|x_3|^2 + 2i\,x_2\,\overline{x_3} - 2i\,\overline{x_2}\,x_3 \\ &= |x_1 + i\,x_2|^2 + 2\,|x_2|^2 + 6\,|x_3|^2 + 2i\,x_2\,\overline{x_3} - 2i\,\overline{x_2}\,x_3 \\ &= |x_1 + i\,x_2|^2 + 2\,|x_2 - i\,x_3|^2 + 4\,|x_3|^2 \ . \end{aligned}$$
Donc $q(x)$ est positif ou nul pour tout x, et nul si et seulement si $x_1 + i\,x_2 = x_2 - i\,x_3 = x_3 = 0$, c.-à-d. si et seulement si $x = 0$. Ceci montre que f est un produit scalaire sur $\mathbb{C}^3$.

3. On inverse la matrice dont les lignes sont les coefficients des formes linéaires $x_1 + i\,x_2$, $x_2 - i\,x_3$ et x_3, et les colonnes (u, v, w) de l'inverse forment une base de vecteurs orthogonaux pour f :
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad v = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} .$$
Les coefficients de la décomposition de q en sommes de carrés de modules donnent $\|u\|^2 = 1$, $\|v\|^2 = 2$, $\|w\|^2 = 4$. On obtient une b.o.n. en prenant $(u, \frac{1}{\sqrt{2}}\,v, \frac{1}{2}w)$. (Attention, ce n'est pas une b.o.n. pour la structure hermitienne standard de $\mathbb{C}^3$.)

Exercice 2

On a $x_1 - x_2 + i\,x_3 = (u \mid x)$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$ (attention à la conjugaison !). Donc $F^\perp$ est la droite vectorielle engendrée par u. La projection orthogonale sur $F^\perp$ se calcule facilement par
$$p_{F^\perp}(x) = \frac{(u \mid x)}{\|u\|^2}\,u = \frac{x_1 - x_2 + i\,x_3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} .$$
Comme $p_F + p_{F^\perp}$ est l'identité de $\mathbb{C}^3$, on a
$$\mathrm{Mat}(p_F) = I_3 - \mathrm{Mat}(p_{F^\perp}) = I_3 - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ -1 & 1 & -i \\ -i & i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -i \\ 1 & 2 & i \\ i & -i & 2 \end{pmatrix} .$$
Pour obtenir une base orthogonale de F, on peut appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à une base de F, par exemple la base (v, w) avec $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient la base orthogonale

(v, w') où

$$w' = w - \frac{(v \mid w)}{\|w\|^2}\, v = w - \frac{i}{2}\, v = \begin{pmatrix} -i/2 \\ i/2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 3

1. On vérifie que $(P, Q) \mapsto (P \mid Q)$ est bien linéaire à droite, semi-linéaire à gauche et que $(Q \mid P) = \overline{(P \mid Q)}$. On a $(P \mid P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2\, dt \geq 0$, et cette quantité ne peut être nulle que si $P(e^{it}) = 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$; ceci oblige le polynôme P à être nul puisqu'il doit avoir une infinité de racines. Donc $(P, Q) \mapsto (P \mid Q)$ est une forme hermitienne définie positive, c.-à-d. un produit scalaire hermitien.
2. On calcule
$$(X^k \mid X^\ell) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(\ell - k)it}\, dt = \delta_{k,\ell} ,$$
ce qui montre que $(1, X, \ldots, X^n)$ est une b.o.n. de $\mathbb{C}_n[X]$.
3. L'hyperplan F est formé des polynômes $P = p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n$ tels que $\sum_{k=0}^n p_k a^k = 0$. Puisque $(1, X, \ldots, X^n)$ est une b.o.n., $\sum_{k=0}^n p_k a^k$ est le produit scalaire $(A \mid P)$, où $A = \sum_{k=0}^n \overline{a^k}\, X^k$. Donc A engendre la droite vectorielle $F^\perp$. Posons
$$\varphi_0 = \frac{1}{\|A\|}\, A = \frac{1 + \overline{a}\, X + \cdots + \overline{a^n}\, X^n}{\sqrt{1 + |a|^2 + \cdots + |a|^{2n}}} .$$
En complétant φ_0 par une b.o.n. $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de F, on obtient une b.o.n. de $\mathbb{C}_n[X]$ telle que $\varphi_1(a) = \ldots = \varphi_n(a) = 0$.
4. Soit $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ la b.o.n. construite ci-dessus. On décompose $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k\, \varphi_k$ dans cette base ; on a $\|P\|^2 = \sum_{k=0}^n |\lambda_k|^2$ et
$$P(a) = \sum_{k=0}^n \lambda_k\, \varphi_k(a) = \lambda_0\, \varphi_0(a) = \lambda_0\, \sqrt{1 + |a|^2 + \cdots + |a|^{2n}} .$$
Le maximum de $|P(a)|$ pour $\|P\| = 1$ est atteint pour $|\lambda_0| = 1$ (et $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$), et ce maximum vaut $\sqrt{1 + |a|^2 + \cdots + |a|^{2n}}$.

Exercice 4

L'ensemble $\mathcal{H}_n$ des matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, contient la matrice 0, est stable par addition, mais n'est pas stable par multiplication par les scalaires complexes puisque $I_n \in \mathcal{H}_n$ mais $i\, I_n \notin \mathcal{H}_n$. Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel complexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par contre comme $\mathcal{H}_n$ est stable par multiplication par les scalaires réels, c'est un sous-espace vectoriel réel. Notons $E_{k,\ell}$ la matrice élémentaire qui a le coefficient 1 en k-ème ligne et ℓ-ème colonne, et des coefficients 0 partout ailleurs. Alors les $E_{k,k}$ pour $k = 1, \ldots, n$, les $E_{k,\ell} + E_{\ell,k}$ et les $i\,(E_{k,\ell} - E_{\ell,k})$ pour $1 \leq k < \ell \leq n$ forment ensemble une base de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathbb{R}$. En effet toute matrice hermitienne $H = (h_{k,\ell})$ (avec donc $h_{k,k}$ réel et $h_{\ell,k} = \overline{h_{k,\ell}}$ pour $k \neq \ell$) s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire à coefficients réels de ces matrices ($\Re$ désine la partie réelle et $\Im$ la partie imaginaire) :

$$H = \sum_{k=1}^n h_{k,k}\, E_{k,k} + \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \Re(h_{k,\ell})\, (E_{k,\ell} + E_{\ell,k}) + \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \Im(h_{k,\ell})\, i\, (E_{k,\ell} - E_{\ell,k}) .$$

Le décompte des éléments de la base montre que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_n = n^2$.

Exercice 5

Si $M = H + i\, L$ avec $H, L \in \mathcal{H}_n$, alors $M^* = H^* - i\, L^* = H - i\, L$, d'où $H = \frac{1}{2}\, (M + M^*)$ et $L = \frac{1}{2i}\, (M - M^*)$. Ceci assure l'unicité. Par ailleurs, si l'on définit H et L par les formules obtenues ci-dessus, on vérifie immédiatement qu'elles sont toutes les deux hermitiennes et que $M = H + i\, L$.

On a $M^*\, M = (H - i\, L)\,(H + i\, L) = H^2 + L^2 + i\,(H\, L - L\, H)$ et $M\, M^* = H^2 + L^2 + i\,(L\, H - H\, L)$. Donc $M^*\, M = M\, M^*$ si et seulement si $H\, L - L\, H = L\, H - H\, L$, c.-à-d. si et seulement si $HL = LH$.

Exercice 6

Soit $U = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$. Puisque U est unitaire on a $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ et $\overline{\alpha}\,\gamma + \overline{\beta}\,\delta = 0$. La deuxième équation, et le fait que α et β ne sont pas nuls tous les deux, entraîne qu'il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que $\delta = t\,\overline{\alpha}$ et $\gamma = -t\,\overline{\beta}$. La condition $\det(U) = 1$ impose $\alpha\,(t\,\overline{\alpha}) + \beta\,(t\,\overline{\beta}) = 1$, donc $t = 1$. Donc $U = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$; réciproquement, toute matrice de cette forme avec α et β complexes vérifiant $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ est bien unitaire de déterminant1.

Exercice 7

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $-(X-5)^2\,(X-2)$. Le sous-espace propre $E(5)$ associé à la valeur propre 5 est $\mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on trouve une base orthogonale, puis une base orthonormale de $E(5)$ formée des vecteurs

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;, \quad v = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;.$$

La droite vectorielle $E(2)$ est engendrée par le vecteur de norme 1 $w = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient donc une b.o.n. (u, v, w) formée de vecteurs propres pour A. La matrice unitaire de passage est $U = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 2i & i\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, et $U^{-1}\,A\,U$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $5, 5, 2$.

Exercice 8

1. Posons $v_k = {}^t(1, \zeta^k, \zeta^{2k}, \ldots, \zeta^{(n-1)k})$. On calcule

$$C\,v_k = \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell\,\zeta^{\ell k}\right)\, v_k \;,$$

et donc v_k est un vecteur propre de C de valeur propre associée $\sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell\,\zeta^{\ell k}$.

2. On a

$$(1-\zeta^k) \sum_{\ell=0}^{n-1} \zeta^{\ell k} = 1 - \zeta^{nk} = 1 - e^{2ik\pi} = 0 \;.$$

Si n ne divise pas k, alors $\zeta^k = e^{2ik\pi/n} \neq 1$ et par conséquent $\sum_{\ell=0}^{n-1} \zeta^{\ell k} = 0$.

3. On remarque que $\overline{\zeta} = \zeta^{-1}$. Donc $(v_k \mid v_m) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \zeta^{\ell(m-k)}$. Ceci fait n pour $k = m$ et, d'après la question précédente, 0 pour $0 \leq k < m < n$. Ceci montre que $(\frac{1}{\sqrt{n}}\,v_0, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\,v_{n-1})$ est une b.o.n., et elle est formée de vecteurs propres pour C.

4. Puisque C diagonalise en b.o.n., elle est normale. En effet il existe une matrice unitaire U telle que $D = U^{-1}\,C\,U = U^*\,C\,U$ soit diagonale, et donc puisque les deux matrices diagonales D et D^* commutent, on a

$$C\,C^* = (U\,D\,U^*)\,(U\,D\,U^*)^* = U\,D\,D^*\,U^* = U\,D^*\,D\,U^* = (U\,D\,U^*)^*\,(U\,D\,U^*) = C^*\,C \;.$$