LICENCE
B05 : Polynômes, fractions rationnelles et séries formelles

Corrigé du contrôle continu n°4

Quel est le coefficient de X^{2007} dans le développement en série formelle de la fraction rationnelle

$$F = \frac{X\,(X-2)}{(X^2-1)(2X-1)} \ ?$$

Le résultat devra être justifié.

Décomposons la fraction rationnelle en éléments simples. La partie entière est nulle et la décomposition a la forme

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2X-1} \ .$$

Pour trouver a on multiplie F par $X-1$ et on fait $X=1$. Ceci donne : $a = \dfrac{-1}{2}$.
Pour trouver b on multiplie F par $X+1$ et on fait $X=-1$. Ceci donne $b = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
Pour trouver c on multiplie F par $2X-1$ et on fait $X = \dfrac{1}{2}$. Ceci donne $c = \dfrac{-3/4}{-3/4} = 1$.
On obtient donc

$$F = \frac{-1}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{1}{2X-1} = \frac{1}{2(1-X)} + \frac{1}{2(1+X)} - \frac{1}{1-2X} \ .$$

On peut vérifier en faisant $X=0$ (on trouve bien 0 des deux côtés), puis en multipliant par X et en faisant tendre X vers l'infini (on trouve $\dfrac{1}{2}$ des deux côtés).

On sait que le développement en série formelle de $\dfrac{1}{1-X}$ est $\sum_{n\geq 0} X^n$. Celui de $\dfrac{1}{1+X}$ est $\sum_{n\geq 0}(-1)^n X^n$ et celui de $\frac{1}{1-2X}$ est $\sum_{n\geq 0} 2^n X^n$. Donc le coefficient de X^{2007} dans le développement en série formelle de F est

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,(-1)^{2007} - 2^{2007} = -2^{2007} \ .$$