

ALBI - Contrôle n° 4

Exercice 1. On est dans \mathbb{C}^2 avec sa structure hermitienne usuelle. Calculez la matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équation $y - ix = 0$.

La droite \mathcal{D} d'équation $y - ix = 0$ est engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = u$. La projection sur \mathcal{D} est donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{(u|X)}{\|u\|^2} \cdot u$$

$$(u|X) = \overline{1} \cdot x + \overline{i} \cdot y = x - iy$$

$$\|u\|^2 = |1|^2 + |i|^2 = 2$$

Ceci fait $\frac{(u|X)}{\|u\|^2} \cdot u = \begin{pmatrix} \frac{x - iy}{2} \\ \frac{ix + y}{2} \end{pmatrix}$. La matrice de

la projection sur \mathcal{D} est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 2. On est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec le produit scalaire hermitien $(M|N) = \text{trace}(M^*N)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Quel est l'adjoint de l'endomorphisme $N \mapsto AN$?

Soit $f: N \mapsto AN$. L'adjoint f^* vérifie, pour tous

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

$$M, N : (f^*(M)|N) = (M|f(N)) = (M|AN)$$

$$= \text{trace}(M^*AN)$$

$$= \text{trace}((A^*M)^*N) = (A^*M|N)$$

Donc $f^*(M) = A^*M$ et l'adjoint f^* est l'endomorphisme

$$M \mapsto A^*M \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

(cf. exercice 9 de la feuille sur les espaces euclidiens)

Exercice 3. On est dans \mathbb{R}^3 avec sa structure euclidienne standard. Soit $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (attention au $1/3$ dans vos calculs). Le polynôme caractéristique de B est $-X^3 - X^2 + X + 1$.

a) Citez un résultat qui vous permet d'affirmer qu'il existe une base orthonormale de vecteurs propres pour B . Trouvez-en une.

Le théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques dit que, puisque la matrice B est une matrice symétrique réelle, il existe une b.o.n. de vecteurs propres pour B .

Le polynôme caractéristique de B est $-(X+1)^2(X-1)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 a pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. Par Gram-Schmidt, on obtient une base orthogonale $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 a pour base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En normalisant les trois vecteurs obtenus, on obtient une b.o.n. de vecteurs propres pour B :

$$\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right).$$

b) Quelle est la signature de B ?

B a une valeur propre positive et une valeur propre double négative (les valeurs propres sont $1, -1, -1$). Donc la signature de B est $(1, 2)$