Chapitre 2

Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

2.1 Formes bilinéaires symétriques

Dans ce qui suit, E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

2.1.1 Définition

Définition 2.1 *Une application*

$$b : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

est appelée une **forme bilinéaire** *quand*

$$\begin{array}{lll} \forall x_1, x_2, y \in E & \forall \lambda \in \mathbb{K} & b(x_1 + \lambda x_2, y) = b(x_1, y) + \lambda b(x_2, y) \\ \forall x, y_1, y_2 \in E & \forall \lambda \in \mathbb{K} & b(x, y_1 + \lambda y_2) = b(x, y_1) + \lambda b(x, y_2) \end{array}$$

(bilinéarité = linéarité à gauche + linéarité à droite).

On dit que b est **symétrique** *quand*

$$\forall x, y \in E \qquad b(x, y) = b(y, x)\ .$$

Remarquer que la symétrie permet de ne vérifier la linéarité que d'un seul côté.

Exemples :

1. $E = \mathbb{K}$. La multiplication $(x, y) \mapsto xy$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

2. $E = \mathbb{R}^2$. Le produit scalaire usuel
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$$
est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
3. $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$. L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,dt \end{array}$$
est une forme bilinéaire symétrique.
4. $E = M_n(\mathbb{K})$. L'application
$$\begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{trace}(AB) \end{array}$$
est une forme bilinéaire symétrique (vérifier la symétrie).

2.1.2 Matrice d'une forme bilinéaire symétrique

On suppose E de dimension finie n. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$.

Définition 2.2 *La matrice $M_{\mathcal{E}}(b)$ de b dans la base $\mathcal{E}$ est la matrice symétrique $n \times n$ qui a pour coefficients $b(e_i, e_j)$ (i numéro de ligne entre 1 et n, j numéro de colonne entre 1 et n). Si x et y sont des éléments de E dont les vecteurs colonnes de coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ sont X et Y respectivement, on a*
$$b(x,y) = {}^tX\, M_{\mathcal{E}}(b)\, Y\ .$$

Dans l'autre sens, si M est une matrice symétrique dans $M_n(\mathbb{K})$, alors $(x,y) \mapsto {}^tX\, M\, Y$ (où X et Y sont les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{E}$) est bien une forme bilinéaire symétrique.

Exemple : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice (dans la base canonique) de la forme bilinéaire symétrique
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto 3x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1\ .$$

Soit $\mathcal{E}'$ une autre base de E et P la matrice de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$.

Rappel : Changement de base.

Définition 2.3 *La matrice de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est la matrice inversible P dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{E}$.*

Proposition 2.4 *Soit x un élément de E, X (resp X') le vecteur colonne de ses coodonnées dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$). Alors $X = P\,X'$. Soit u un endomorphisme de E, M (resp. M') sa matrice dans la base $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$). Alors $M' = P^{-1}\,A\,P$.*

Proposition 2.5 (Changement de base pour les f.b.s.) *La matrice de la forme bilinéaire symétrique dans la nouvelle base $\mathcal{E}'$ est*

$$M_{\mathcal{E}'}(b) = {}^tP\,M_{\mathcal{E}}(b)\,P\,.$$

2.1.3 Forme bilinéaire et dualité

Soit $b : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. Pour tout $x \in E$, l'application

$$\begin{array}{rcl} b(\cdot, x) : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & b(y, x) \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}$, c'est à dire un élément du dual E^*.

Proposition 2.6 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_b : E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & b(\cdot, x) \end{array}$$

est linéaire. On appelle φ_b **l'application linéaire de E dans son dual associée à la forme bilinéaire symétrique** *b. Si E est de dimension finie et $\mathcal{E}$ est une base de E, alors la matrice de b dans E est égale à la matrice de $\varphi_b : E \to E^*$ où E est muni de la base $\mathcal{E}$ et E^* de la base duale $\mathcal{E}^*$.*

Définition 2.7 *Le* **noyau** *de la forme bilinéaire symétrique b, noté* $\ker(b)$ *est le noyau de φ_b, c.-à-d. :*

$$\ker(b) = \{x \in E \mid \forall y \in E\ b(y, x) = 0\}\,.$$

La forme bilinéaire symétrique b est dite **non dégénérée** *quand son noyau est réduit à $\{0\}$.*
Si E est de dimension finie, le **rang** *de b est le rang de l'application φ_b, c.-à-d. aussi le rang de la matrice de b dans une base de E.*

On peut vérifier que toutes les formes bilinéaires symétriques données en exemple après la définition 2.1 sont non dégénérées.

En dimension finie, une forme bilinéaire symétrique b sur $E \times E$ est donc non dégénérée si et seulement si sa matrice dans une base de E est inversible.

Proposition 2.8 *Soit b une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $E \times E$, où E est de dimension finie. Alors, pour toute forme linéaire $\ell \in E^*$, il existe un unique $x \in E$ tel que*

$$\forall y \in E \quad \ell(y) = b(y,x) \ .$$

2.1.4 Orthogonalité

Dans ce paragraphe, b est une forme bilinaire symétrique sur $E \times E$.

Définition 2.9 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'orthogonal de F pour b est le sous-espace de E défini par*

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F \ b(y,x) = 0\}$$

Par exemple, pour le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$, l'orthogonal d'une droite vectorielle D est bien le plan vectoriel orthogonal (au sens usuel) à D.

Le lien avec l'orthogonal pour la dualité se fait grâce à l'application linéaire $\varphi_b : E \to E^*$ associée à b.

Proposition 2.10 $F^\perp = (\varphi_b(F))^\circ$.

Théorème 2.11 *On suppose E de dimension finie n.*
- *Si b est non dégénérée, alors* $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$.
- *En général* $\dim(F^\perp) = n - \dim(F) + \dim(F \cap \ker(b))$.

Proposition 2.12 *On a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$. Si E est de dimension finie et b non dégénérée, on a $F = (F^\perp)^\perp$.*

2.2 Formes quadratiques

À partir de maintenant et pour tout le reste du chapitre, le corps $\mathbb{K}$ est supposé de caractéristique différente de 2, ce qui veut dire que $2 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ (par exemple, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est exclu). On désigne toujours par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2.2.1 Définitions

Définition 2.13 *Une application $q : E \to \mathbb{K}$ est appelée forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique b sur $E \times E$ telle que*

$$\forall x \in E \quad q(x) = b(x, x) \ .$$

La forme quadratique q est dite **associée à la forme bilinéaire symétrique** *b.*

Les formes quadratiques associées aux formes bilinéaires symétriques données en exemple après la définition 2.1 sont respectivement

1. $x \mapsto x^2$ (sur $\mathbb{K}$),
2. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2$ (sur $\mathbb{R}^2$),
3. $f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)^2 \, dt$ (sur $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$),
4. $A \mapsto \mathrm{trace}(A^2)$ (sur $M_n(\mathbb{K})$).

Proposition 2.14 *Si q est une forme quadratique sur E, alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique b sur $E \times E$ telle que q soit associée à b. On l'appelle la* **forme polaire de** *q, et elle est définie par*

$$b(x, y) = \frac{1}{2} \left(q(x + y) - q(x) - q(y) \right) .$$

Si E est de dimension finie et $\mathcal{E}$ une base de E, la ***matrice*** M ***de la forme quadratique*** q ***dans la base*** $\mathcal{E}$ est la matrice de sa forme polaire. La forme quadratique s'exprime alors matriciellement comme $q(x) = {}^tX \, M \, X$, où X est le vecteur colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{E}$.

Une forme quadratique q s'exprime comme un polynôme homogène du second degré en fonction des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$: c'est une somme de monômes en x_i^2 ou $x_i x_j$. Par exemple, la forme quadratique

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 7x_2^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Une forme quadratique q est dite ***non dégénérée*** quand sa forme polaire l'est. On définit le ***noyau*** et le ***rang*** d'une forme quadratique comme ceux de sa forme polaire. De même, l'***orthogonal d'un sous-espace*** pour une forme quadratique est son orthogonal pour la forme polaire.

Définition 2.15 *Un élément x de E est dit* **isotrope** *pour la forme quadratique q quand $q(x) = 0$.*

Exemple : La forme quadratique q sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Elle est non dégénérée, son noyau est réduit à $\{0\}$. Mais l'ensemble de ses vecteurs isotropes est la réunion des deux droites vectorielles d'équations $x_2 = x_1$ et $x_2 = -x_1$.

Proposition 2.16 *Soit q une forme quadratique sur E. Si x est un élément non isotrope de E, alors $\mathrm{Vect}(x)^\perp$ est un hyperplan de E supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x)$.*

2.2.2 Base orthogonale, décomposition en carrés

Définition 2.17 *Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie n, et soit b sa forme polaire. Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est dite* **orthogonale (pour** q**)** *quand $b(e_i, e_j) = 0$ pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$. Autrement dit, une base est orthogonale pour q quand la matrice de q dans cette base est diagonale.*

Théorème 2.18 *Toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie admet des bases orthogonales.*

Le carré d'une forme linéaire est une forme quadratique. Le théorème suivant permet de décomposer n'importe quelle forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie en carrés de formes linéaires.

Théorème 2.19 (Décomposition en carrés) *Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie n. Alors il existe des formes linéaires linéairement indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_r \in E^*$ et des constantes non nulles $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{K}$ telles que*

$$q = c_1\, \ell_1^2 + \cdots + c_r\, \ell_r^2 \,.$$

Dans toute décomposition de ce type (avec les ℓ_i linéairement indépendantes), le nombre r de formes linéaires est égal au rang de q.

Le théorème de décomposition en carrés est une conséquence du théorème d'existence de bases orthogonales. Mais on l'obtient aussi de manière algorithmique, au moyen de l'algorithme de Gauss. Cet algorithme, étant donné une forme quadratique $q(x_1, \dots, x_n)$ en n variables, produit une décomposition en carrés. Il procède par récurrence sur le nombre de variables. Pour éliminer les variables, on distingue deux cas.

1. La forme quadratique q contient le carré d'une variable. On peut supposer qu'il s'agit de x_1^2, et q peut alors s'écrire
$$q(x_1, \dots, x_n) = c\, x_1^2 + x_1\, \ell(x_2, \dots, x_n) + r(x_2, \dots, x_n)\ ,$$
où c est une constante non nulle, ℓ une forme linéaire et r une forme quadratique. On complète alors le carré en
$$q = c\,(x_1 + \frac{1}{2c}\,\ell)^2 + r - \frac{1}{c}\,\ell^2\ .$$
On a bien que $x_1 + \frac{1}{2c}\,\ell(x_2, \dots, x_n)$ est une forme linéaire, et
$$q'(x_2, \dots, x_n) = r(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{c}\,\ell(x_2, \dots, x_n)^2$$
est une forme quadratique **qui ne dépend plus de la variable** x_1.
2. La forme quadratique q ne contient aucun carré de variable. Si elle est non nulle, elle contient au moins un produit de variables $x_i x_j$. On peut supposer qu'il s'agit de $x_1 x_2$, et alors q peut s'écrire
$$q(x_1, \dots, x_n) = c\, x_1 x_2 + x_1\, \ell(x_3, \dots, x_n) + x_2\, m(x_3, \dots, x_n) r(x_3, \dots, x_n)\ ,$$
où c est une constante non nulle, ℓ et m des formes linéaires et r une forme quadratique. On complète le produit en
$$q = c\,(x_1 + \frac{1}{c}\,m)\,(x_2 + \frac{1}{c}\,\ell) + r - \frac{1}{c}\,\ell\, m\ .$$
On transforme le produit des formes linéaires $k_1 = x_1 + \frac{1}{c}\,m$ et $k_2 = x_2 + \frac{1}{c}\,\ell$ en
$$k_1 k_2 = \frac{1}{4}\,\left((k_1 + k_2)^2 - (k_1 - k_2)^2\right)\ ,$$
qui est une combinaison linéaire des carrés de formes linéaires $k_1 + k_2$ et $k_1 - k_2$. Il reste après la forme quadratique
$$q'(x_3, \dots, x_n) = r(x_3, \dots, x_n) - \frac{1}{c}\,\ell(x_3, \dots, x_n)\, m(x_3, \dots, x_n)\ ,$$
qui ne dépend plus des variables x_1 **et** x_2.

L'algorithme de Gauss produit une décomposition en carrés
$$q = c_1\, \ell_1^2 + \cdots + c_r\, \ell_r^2$$
avec $c_1, \dots, c_r$ éléments non nuls de $\mathbb{K}$ et $\ell_1, \dots, \ell_r$ des formes linéaires *linéairement indépendantes* sur $\mathbb{K}^n$. On peut alors compléter cette famille libre en une base $(\ell_1, \dots, \ell_r, \ell_{r+1}, \dots, \ell_n)$ de $(\mathbb{K}^n)^*$. La base duale $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ sera une base orthogonale pour q, dans laquelle la matrice de q est diagonale avec $c_1, \dots, c_r, 0, \dots, 0$ comme coefficients diagonaux.

2.3 Classification des formes quadratiques

2.3.1 Matrices congruentes

Définition 2.20 *Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont dites congruentes (sur $\mathbb{K}$) quand il existe une matrice P inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = {}^tP\,A\,P$.*

La relation de congruence est une relation d'équivalence.

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension n, A la matrice de q dans une base $\mathcal{E}$ de E. Une matrice symétrique B de taille n est congruente à A si et seulement s'il existe une base $\mathcal{F}$ de E dans laquelle B est la matrice de q.

2.3.2 Classification sur $\mathbb{C}$

Proposition 2.21 *Soit q une forme quadratique de rang r sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est*

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}^{r} & 0 \\ 0 & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.22 *Deux matrices symétriques complexes sont congruentes sur $\mathbb{C}$ si et seulement si elles ont même rang.*

2.3.3 Classification sur $\mathbb{R}$, signature

Définition 2.23 *Une forme quadratique q sur un espace vectoriel réel E est dite* **définie positive** *(resp. négative) quand, pour tout $x \in E$ non nul, on a $q(x) > 0$ (resp. $q(x) < 0$).*

Théorème 2.24 (Théorème d'inertie de Sylvester) *Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. Soit q une forme quadratique sur E et $\mathcal{E}$ une base de E orthogonale pour q. Soit $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ la matrice de q*

dans $\mathcal{E}$. Soit s le nombre d'indices i tels que $a_i > 0$, t le nombre d'indices i tels que $a_i < 0$. Alors le couple (s,t) ne dépend pas du choix de la base orthogonale. On l'appelle la signature de la forme quadratique q.

L'entier s (resp. t) de la signature est le maximum des dimensions des sous-espaces de E sur lesquels la restriction de q est définie positive (resp. négative). La somme $s+t$ est le rang de q.

L'algorithme de décomposition en carrés de Gauss fournit un moyen de calculer la signature : si $q = \sum_{i=1}^{r} c_i\,\ell_i^2$, où les ℓ_i sont des formes linéaires linéairement indépendantes, alors s (resp. t) est le nombre de coefficients c_i positifs (négatifs).

Proposition 2.25 *Soit q une forme quadratique de signature (s,t) sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est*

$$
\begin{array}{l}
\hphantom{(}\overbrace{\hphantom{1 \quad \ddots \quad 1}}^{r} \qquad \overbrace{\hphantom{-1 \quad \ddots \quad -1}}^{s} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & 0 & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & -1 & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & -1 & & & \\
 & & & & & & 0 & & \\
 & 0 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

.

Théorème 2.26 *Deux matrices symétriques réelles sont congruentes sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elles ont même signature.*