LICENCE
B05 : Polynômes, fractions rationnelles et séries formelles

Corrigé de l'examen du 22 Juin 2006

Question de cours.

Soit F une fraction rationelle de $\mathbb{K}(X)$. Définir ce qu'est un pôle de F dans K.

Supposons F écrite sous forme réduite (ou irréductible) $F = \dfrac{P}{Q}$, avec P et Q premiers entre eux. Alors $c \in \mathbb{K}$ est un pôle de F si et seulement si $Q(c) = 0$.

Exercice 1.

Soit

$$A = X^4 + X^3 - 3\,X^2 - 4\,X - 4\;, \qquad B = X^4 + X^3 + 5\,X^2 + 4\,X + 4\;.$$

1. *Calculer le pgcd unitaire de A et B.*

   Les divisions euclidiennes successives sont :

   $$\begin{array}{rcl} A & = & B - 8\,(X^2 + X + 1) \\ B & = & (X^2 + X + 1)\,(X^2 + 4) \end{array}$$

   et donc $X^2 + X + 1$ est le pgcd unitaire de A et B. On a

   $$A = (X^2 + X + 1)\,(X^2 - 4)\;.$$

2. *Factoriser A et B en produit de facteurs irréductibles, sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$.*

   Les factorisations en produits de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont :

   $$\begin{array}{rcl} A & = & (X^2 + X + 1)\,(X - 2)\,(X + 2) \\ B & = & (X^2 + X + 1)\,(X^2 + 4)\;. \end{array}$$

   Les factorisations en produits de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont :

   $$\begin{array}{rcl} A & = & (X - j)\,(X - j^2))\,(X - 2)\,(X + 2) \\ B & = & (X - j)\,(X - j^2))\,(X - 2i)\,(X + 2i)\;, \end{array}$$

   où $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 2.

Soit P le polynôme :

$$P = X^5 + 4\,X^4 - 23\,X^3 - 38\,X^2 + 220\,X - 200\ .$$

1. *Quelle est la multiplicité de 2 comme racine de P ?*

   On a $P(2) = 0$. Ensuite $P' = 5\,X^4 + 16\,X^3 - 69\,X^2 - 76\,X + 220$, et $P'(2) = 0$. Puis $P'' = 20\,X^3 + 48\,X^2 - 138\,X - 76$, et $P''(2) = 0$. Enfin $P^{(3)} = 60\,X^2 + 96\,X - 138$, et $P^{(3)}(2) = 294 \neq 0$. Donc 2 est racine de P de multiplicité 3.

2. *Montrer que P a une racine double différente de 2, que l'on déterminera.*

   Si c est cette racine double, alors on a avec la racine triple 2 les cinq racines de P comptées avec multiplicité. Comme P est unitaire, le coefficient de X^4 dans P doit être l'opposé de la somme des racines :

   $$4 = -(2 + 2 + 2 + c + c) \quad \text{d'où} \quad c = -5\ .$$

   On vérifie que -5 est bien racine double de P en calculant $P(-5) = 0$ et $P'(-5) = 0$. On peut aussi le faire en vérifiant que le terme constant, qui doit être égal à l'opposé du produit des racines, vaut bien $-2^3(-5)^2 = -200$.

Exercice 3.

Décomposer en éléments simples, sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(4\,X^2 + 1)\,X^3}\ .$$

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est de la forme

$$\frac{1}{(4\,X^2 + 1)\,X^3} = \frac{a}{X^3} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X} + \frac{dX + e}{4\,X^2 + 1}\ ,$$

où a, b, c, d et e sont des nombres réels.

On détermine d et e en multipliant par $4\,X^2 + 1$ et en faisant $X = i/2$. On obtient

$$d\,\frac{i}{2} + e = \frac{8}{i^3} = 8\,i\ , \quad \text{d'où} \quad d = 16 \text{ et } e = 0\ .$$

On obtient la partie polaire relative au pôle 0 en effectuant la division suivant les puissances croissantes de 1 par $1 + 4\,X^2$ à l'ordre 2 ; le quotient de cette division est $1-4X^2$. On obtient donc $a=1$, $b=0$ et $c=-4$. Finalement la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est :

$$\frac{1}{(4X^2+1)\,X^3} = \frac{1}{X^3} - \frac{4}{X} + \frac{16\,X}{4\,X^2+1} \ .$$

À titre de vérification, on peut constater que le fait que la fraction rationnelle soit impaire se retrouve bien dans la décomposition ($b=e=0$). En multipliant par X et en faisant tendre X vers l'infini, on obtient bien 0 des deux côtés. Pour $X=1$, on obtient $\frac{1}{5}$ des deux côtés.

Pour calculer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, il reste à décomposer :

$$\frac{16\,X}{4\,X^2+1} = \frac{\alpha}{2X+i} + \frac{\overline{\alpha}}{2X-i} \ ,$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Par identification on a $\alpha\,(2\,X+i) + \overline{\alpha}\,(2\,X-i) = 16\,X$, d'où $\alpha+\overline{\alpha}=8$ et $\alpha-\overline{\alpha}=0$ ce qui fait $\alpha=\overline{\alpha}=4$. Ainsi la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ est :

$$\frac{1}{(4X^2+1)\,X^3} = \frac{1}{X^3} - \frac{4}{X} + \frac{4}{2X+i} + \frac{4}{2X-i} \ ,$$

Exercice 4.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^2-2\,X+2}{(X^2+1)(1-2X)} \ .$$

Donner les cinq premiers termes ($a_0+a_1X+a_X^2+a_3X^3+a_4X^4$) du développement en série formelle de F.

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est de la forme

$$F = \frac{a\,X+b}{X^2+1} + \frac{c}{1-2\,X} \ .$$

En multipliant par X^2+1 et en faisant $X=i$, on obtient

$$a\,i+b = \frac{i^2-2\,i+2}{1-2\,i} = 1 \ ,$$

d'où $a=0$ et $b=1$. En multipliant par $1-2\,X$ et en faisant $X=\frac{1}{2}$, on obtient $c=1$. Donc :

$$F = \frac{1}{X^2+1} + \frac{1}{1-2X} \ .$$

On peut faire des vérifications par les procédés habituels.

On connaît les développements en série formelle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+X^2} &= 1 - X^2 + X^4 - \cdots \\ \frac{1}{1-2\,X} &= 1 + 2\,X + 4\,X^2 + 8\,X^3 + 16\,X^4 + \cdots \ , \end{aligned}$$

et donc

$$F = 2 + 2\,X + 3\,X^2 + 8\,X^3 + 17\,X^4 + \cdots \ .$$