Chapitre 2

Racines, interpolation

2.1 Racines

2.1.1 Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers

Proposition 2.1 *Soit $A = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers avec $a_n a_0 \neq 0$. Si p/q est une racine rationnelle de A (avec p et q entiers premiers entre eux), alors p divise a_0 et q divise a_n ; de plus, le quotient de la division de A par $qX - p$ est à coefficients entiers.*

Exercice 2.1

Si A est un polynôme unitaire à coefficients entiers, toute racine rationnelle de A est un entier.

Exercice 2.2

Trouver toutes les racines rationnelles des polynômes suivants :

1. $5X^3 - 4X^2 + 3X + 2$
2. $3X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 6X - 4$
3. $X^4 - X^3 - 32X^2 - 62X - 56$

Exercice 2.3

Si A est un polynôme à coefficients entiers et p/q une racine rationnelle de A, avec p et q premiers entre eux, alors, pour tout entier m, $qm - p$ divise $A(m)$.

Exercice 2.4

Soit $A = 6X^3 + 13X^2 - 22X - 8$. Calculez $A(-2), A(-1), A(1), A(2)$. Trouvez toutes les racines rationnelles de A (vous pouvez utiliser l'exercice précédent).

2.1.2 Bornes sur les racines

Proposition 2.2 *Soit $A = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ avec $a_n \neq 0$. Alors toute racine $z \in \mathbb{C}$ de A vérifie*

$$|z| \leq \max(1, \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|a_n|}) .$$

Exercice 2.5

Montrer que si z est racine de $A = a_n X^n + \cdots + a_0$ (avec $a_n a_0 \neq 0$) si et seulement si $1/z$ est racine de $a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_0 X^n$. En déduire une borne inférieure > 0 sur le module des racines de A.

Exercice 2.6

Soit $A = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$

1. On suppose $0 < a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a_1 \leq a_0$. Montrer que toute racine $z \in \mathbb{C}$ de A vérifie $|z| \geq 1$. (*On pourra raisonner par l'absurde et considérer* $(1-z)A(z)$.)
2. On suppose $a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_1 \geq a_0 > 0$. Montrer que toute racine $z \in \mathbb{C}$ de A vérifie $|z| \leq 1$.

Soit $B = b_n X^n + \cdots + b_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$, tous > 0. Soit u le minimum (resp. v le maximum) des quantités b_{n-1}/b_n, b_{n-2}/b_{n-1},. . .,b_0/b_1.

3. Montrer que toute racine $z \in \mathbb{C}$ de B vérifie $u \leq |z| \leq v$.
4. Vérifier que toutes les racines dans $\mathbb{C}$ de $7X^4 + 6X^3 + 2X^2 + 3X + 1$ ont un module compris entre $1/4$ et $3/2$.

2.1.3 Comptage de racines réelles

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La *suite de Sturm de* P est la suite de polynômes obtenus dans l'algorithme d'Euclide pour la recherche du pgcd de P et de son polynôme dérivé P', à ceci près que l'on prend à chaque fois **l'opposé du reste de la division euclidienne**, au lieu de prendre le reste : $P_0 = P$, $P_1 = P'$, $P_{k+1} =$ l'opposé du reste de la division euclidienne de P_{k-1} par P_k pour $k \geq 1$, $P_N =$ le dernier polynôme non nul obtenu (un pgcd de P et P').

Si a n'est pas une racine de P, on pose $v_P(a) =$ le nombre de changements de signe dans la suite des valeurs $P_0(a), P_1(a), \ldots, P_N(a)$. On compte un changement de signe quand $P_k(a)P_{k+1}(a) < 0$, ou quand $P_k(a)P_{k+\ell}(a) < 0$ et que $P_{k+1}(a) = \ldots = P_{k+\ell-1}(a) = 0$.

Théorème 2.3 (Théorème de Sturm) *Soient $a < b$ deux nombres réels qui ne sont pas racines de P. Alors le nombre de racines réelles distinctes de P dans $]a, b[$ est égal à $v_P(a) - v_P(b)$.*

Exemple : la suite de Sturm de $P = X^2 - 1$ est $X^2 - 1$, $2X$, 1. On a $v_P(-2) = 2$, $v_P(0) = 1$, $v_P(2) = 0$. On sait bien qu'il y a une racine de P dans $]-2, 0[$ et une dans $]0, 2[$.

Le théorème de Sturm permet d'isoler les racines réelles de P dans des intervalles, par dichotomie. On peut ensuite obtenir des valeurs approchées des racines en utilisant l'algorithme de Newton.

Un autre résultat permet de majorer facilement le nombre de racines réelles.

Théorème 2.4 (Règle de Descartes) *Le nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) dans $]0, +\infty[$ est inférieur ou égal au nombre de changements de signe dans la suite des coefficients de P, et la différence est paire.*

Par exemple, le nombre de racines du polynôme $X^9 + 3X^7 - 24X^6 + X^2 - 63$ dans $]0, +\infty[$ est égal à 1 ou 3.

Exercice 2.7

Calculez la suite de Sturm de $X^3 - 3X + 1$. Trouvez des bornes pour ses racines, et isolez les racines réelles dans des intervalles.

Exercice 2.8

Sans calcul, que pouvez-vous dire du nombre de racines réelles de $X^{2011} + 1407X^{1789} - 1210X^{1492} + 1$?

2.2 Interpolation

2.2.1 Interpolation de Lagrange

Théorème 2.5 (Polynôme d'interpolation de Lagrange) *Soient $c_0, c_1, \ldots, c_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ (pas forcément distincts). Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(c_i) = a_i$ pour $i = 0, \ldots, n$. Ce polynôme est donné par*

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{j \neq i}(X - c_j)}{\prod_{j \neq i}(c_i - c_j)}\, a_i \ .$$

Par exemple, le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(-1) = 2$, $P(0) = 1$, $P(1) = -1$ est

$$P = 2\,\frac{X(X-1)}{(-1)\times(-2)} + \frac{(X+1)(X-1)}{1\times(-1)} - \frac{(X+1)X}{2\times 1} \ .$$

2.2.2 Polynômes de Bernstein

Les polynômes de Bernstein de degré n sont les polynômes

$$B_{n,i} = \binom{n}{i} X^i (1-X)^{n-i} \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n.$$

Les polynômes de Bernstein sont ce qu'on trouve en développant $(X + (1-X))^n = 1$ suivant la formule du binôme.

Théorème 2.6 *Les polynômes de Bernstein de degré n forment une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. Si l'on décompose un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ dans cette base :*

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n,i} \ ,$$

alors le nombre de racines (comptées avec multiplicité) de P dans l'intervalle $]0,1[$ est inférieur ou égal au nombre de changement de signes dans la suite $a_0, \ldots, a_n$, et la différence est paire.

Les polynômes de Bernstein (surtout de degré 3) sont utilisés pour la construction des splines, un outil esssentiel de dessin de courbes. Le théorème ci-dessus et des techniques de subdivision d'intervalles, utilisant l'algorithme de De Casteljau, sont à la base des algorithmes les plus performants d'isolation de racines réelles.

Exercice 2.9

Ecrire le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(-2) = 7$, $P(1) = 2$ et $P3) = 1$, et le mattre sous la forme $aX^2 + bX + c$.

Exercice 2.10

Soient $c_0, c_1, \ldots, c_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. On pose, pour $i = 0, \ldots, n$,

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i}(X - c_j)}{\prod_{j \neq i}(c_i - c_j)} \ .$$

Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

Exercice 2.11

On définit les polynômes $\binom{X}{k} \in \mathbb{R}[X]$ pour $k \in \mathbb{N}$ par $\binom{X}{0} = 1$, $\binom{X}{1} = X$ et $\binom{X}{k} = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$ pour $k \geq 2$.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$, et on définit par récurrence $\Delta^k P = \Delta(\Delta^{k-1}P)$ pour $k \geq 2$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est bien le coefficient binomial (avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $n < k$).
2. Vérifier que pour tout polynôme non constant P, $\deg(\Delta P) = \deg(P) - 1$. En déduire que $\deg(P) \leq k$ si et seulement si $\Delta^{k+1}P = 0$.
3. Vérifier que si $\Delta P = \Delta Q$ et $P(0) = Q(0)$, alors $P = Q$.
4. Vérifier que $\Delta \binom{X}{k} = \binom{X}{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.
5. Vérifier que $\Delta(\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \Delta P_i$.
6. Etablir par récurrence sur le degré de P que pour tout polynôme P de degré $\leq k$, on a
$$P(X) = P(0) + \Delta P(0)\binom{X}{1} + \Delta^2 P(0)\binom{X}{2} + \cdots + \Delta^k P(0)\binom{X}{k}.$$
7. Dans le tableau suivant, chaque nombre est la différence entre celui au-dessus à droite et celui juste au-dessus.

-4	0	1	1	2	6	15
4	1	0	1	4	9	
-3	-1	1	3	5		
2	2	2	2			
0	0	0				

Expliquer pourquoi la première ligne de ce tableau est formée des valeurs d'un polynôme P du troisième degré en 0, 1, 2, …, 6. Que valent $P(7)$, $P(8)$? Exprimer P en fonction des $\binom{X}{k}$.

Exercice 2.12

Montrer que $B_{n,i} = XB_{n-1,i-1} + (1-X)B_{n-1,i}$, si l'on convient que $B_{n-1,-1} = B_{n-1,n} = 0$. Montrer, avec la même convention, que $B'_{n,i} = B_{n-1,i} - B_{n-1,i-1}$.

Exercice 2.13

Montrer que $B_{n,i}(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que si $P = \sum_{i=0}^n a_i B_{n,i}$, alors, pour tout $x \in [0,1]$, on a $\min(a_0, \ldots, a_n) \leq P(x) \leq \max(a_0, \ldots, a_n)$.