Chapitre 1

Polynômes

1.1 Généralités

Un polynôme à une variable sur un corps $\mathbb{K}$ (nous serons essentiellement intéressés par les cas où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une expression

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n ,$$

où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$ (les *coefficients* du polynôme). Formellement, on peut définir un polynôme comme la suite infinie $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ de ses coefficients, tous nuls à partir d'un certain rang. Par exemple, le polynôme $1 + 2X^2 - X^3$ est codé par la suite $(1, 0, 2, -1, 0, 0, \ldots)$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$. Il est muni des deux opérations de l'addition et de la multiplication, qui en font un anneau commutatif, comme $\mathbb{Z}$.

On identifie un élément a de $\mathbb{K}$ au polynôme constant (codé $(a, 0, 0, \ldots)$). La multiplication par les éléments de $\mathbb{K}$ munit alors $\mathbb{K}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Soit P un polynôme non nul. Le *degré* de P est le plus grand entier n tel que le coefficient a_n de X^n dans P soit non nul. Ce coefficient a_n s'appelle alors le *coefficient dominant* de P, et on dit que P est *unitaire* si son coefficient dominant est 1. Par convention on peut décréter que le degré du polynôme nul est $-\infty$. On a

$$\begin{aligned} \deg(P+Q) &\leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \quad (\text{égalité si } \deg(P) \neq \deg(Q)) \\ \deg(PQ) &= \deg(P) + \deg(Q) . \end{aligned}$$

On dit qu'un polynôme B *divise* un polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$. Noter que le fait qu'à la fois B divise A et A divise B équivaut au fait qu'il existe une constante $c \neq 0$ telle que $A = cB$. Noter aussi que si B divise A et $\deg(A) < \deg(B)$, alors $A = 0$.

Soit $c \in \mathbb{K}$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ un polynôme sur $\mathbb{K}$. On pose $P(c) = a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n$. On dit que c est *racine* de P quand $P(c) = 0$. L'application $c \mapsto P(c)$ de $\mathbb{K}$ dans lui-même est la *fonction polynôme* associée au polynôme P.

On peut *substituer* un polynôme Q à la variable X dans un autre polynôme P pour obtenir un nouveau polynôme $P(Q)$ (noté aussi quelquefois $P \circ Q$: si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, alors $P(Q) = a_0 + a_1 Q + \cdots + a_n Q^n$. On a $P_1(Q) + P_2(Q) = (P_1 + P_2)(Q)$ et $P_1(Q) \times P_2(Q) = (P_1 P_2)(Q)$.

Exercice 1.1

Calculer par récurrence $(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \cdots (1 + X^{2^n})$.

Exercice 1.2

Si P est un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et c un élément de $\mathbb{K}$, combien faut-il d'opérations (additions et multiplications) dans $\mathbb{K}$ pour calculer $P(c)$?

Combien faut-il d'opérations dans $\mathbb{K}$ pour multiplier deux polynômes de degré n ?

Exercice 1.3

Soient A, B, C, U, V des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que si A divise B et C, il divise aussi $UB + VC$.

Exercice 1.4

Montrer que, si les trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ vérifient la relation

$$P^2(X) - XQ^2(X) = XR^2(X) ,$$

ils sont nuls (*faire jouer la parité du degré et les signes des coefficients dominants*). Est-ce encore vrai dans $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 1.5

Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $P(X) = X(X + a)(X + 2a)(X + 3a) + a^4$ est un carré dans $\mathbb{K}[X]$. En déduire une décomposition de $Q(X) = X(X + 1)(X + 2)(X + 3) - 8$ en produit dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.6

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P(X) - X$ divise $Q\big(P(X)\big) - Q(X)$.
2. Montrer que $P(X) - X$ divise $P\big(P(X)\big) - X$.

Exercice 1.7

Montrer que l'application $P \mapsto P(X + a)$ est une bijection de $\mathbb{K}[X]$ sur lui-même. Quelle est la bijection réciproque ?

1.2 Division euclidienne, pgcd de deux polynômes

Un point important qui fait que l'anneau des polynômes à une variable sur un corps $\mathbb{K}$ est très semblable à $\mathbb{Z}$ est l'existence d'une division euclidienne.

Théorème 1.1 *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec B différent du polynôme nul. Alors il existe des polynômes Q (quotient) et R (reste) tels que*

$$A = BQ + R \quad \text{avec } \deg R < \deg B \text{ ou } R = 0 .$$

De plus, le couple (Q, R) vérifiant ces propriétés est unique.

Proposition 1.2 *Le reste de la division euclidienne de P par $X - c$ est $P(c)$. En conséquence, un élément $c \in \mathbb{K}$ est racine de P si et seulement si P est divisible par $X - c$.*

Définition 1.3 *Si A et B sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, on dit que* le polynôme D est un plus grand commun diviseur (en abrégé, pgcd) de A et B *quand*

1. *D est un diviseur commun de A et B,*
2. *tout diviseur commun de A et B divise D.*

Autrement dit, l'ensemble des diviseurs de D est égal à celui des diviseurs communs de A et B.

Ceci ne définit pas le pgcd de manière unique, mais à un facteur constant non nul près. L'existence du pgcd est établie, comme pour les entiers, par l'algorithme d'Euclide. Soient A et B deux polynômes. On pose

$$R_0 = A \qquad R_1 = B$$

et, pour $n \geq 1$, tant que R_n est non nul, on définit R_{n+1} comme le reste de la division euclidienne de R_{n-1} par R_n :

$$R_{n-1} = R_n Q_n + R_{n+1} \quad \text{avec } \deg(R_{n+1}) < \deg(R_n) \text{ ou } R_{n+1} = 0 \,.$$

Comme la suite $\deg R_1,\ \deg R_2, \ldots$ est strictement décroissante, l'algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini N d'étapes avec $R_{N+1} = 0$.

Théorème 1.4 *Le polynôme R_N obtenu à la fin de l'algorithme (c'est le dernier reste non nul, si A et B sont différents de 0) est un pgcd de A et B.*

Si A et B sont tous les deux nuls, $\mathrm{pgcd}(A, B) = 0$. Sinon, un pgcd est un polynôme de degré maximal parmi ceux qui divisent à la fois A et B ; on peut rendre le pgcd unique en demandant qu'il soit unitaire (c'est comme cela que le pgcd est quelquefois défini).

Comme pour les entiers, on a :

Théorème 1.5 *Soient A et B deux polynômes, D un pgcd de A et B. Il existe des polynômes U et V tels que $D = UA + VB$.*

Définition 1.6 *Deux polynômes A et B sont dits* premiers entre eux *quand 1 est pgcd de A et B, autrement dit si et seulement si les seuls diviseurs communs de A et B sont les constantes non nulles.*

Théorème 1.7 (Identité de Bezout) *Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe des polynômes U et V tels que $UA + VB = 1$.*

Corollaire 1.8 *Soit A un polynôme premier avec chacun des polynômes $B_1, \ldots, B_r$. Alors A est premier avec le produit $B_1 \cdots B_r$.*

Théorème 1.9 (Lemme de Gauss) *Soient A, B et C des polynômes tels que A et B soient premiers entre eux et que A divise le produit BC. Alors A divise C.*

Définition 1.10 *Un polynôme M est un* plus petit commun multiple *(ppcm) de deux polynômes A et B si et seulement si*

1. *M est un multiple commun de A et B,*
2. *tout multiple commun de A et B est multiple de M.*

Si A ou B est nul, le ppcm de A et B est 0. Si A et B sont tous les deux non nuls, et si D est un pgcd de A et B, alors AB/D est un ppcm de A et B.

Théorème 1.11 *Soient $A_1, \ldots, A_r$ des polynômes premiers entre eux deux à deux (A_i premier avec A_j si $i \neq j$). Si chaque A_i divise B, alors la produit $A_1 \cdots A_r$ divise B.*

Dans les exercices on dira "le pgcd" ou "le ppcm", et on notera $\mathrm{pgcd}(A, B)$ ou $\mathrm{ppcm}(A, B)$ pour le pgcd ou le ppcm unitaire.

Exercice 1.8

Effectuer les divisions euclidiennes de

$$\begin{aligned} 2X^5 - 5X^3 - 8X \quad &\text{par} \quad X + 3 \,, \\ 4X^3 + X^2 \quad &\text{par} \quad X + 1 + i \,, \\ X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 5X - 5 \quad &\text{par} \quad X^2 + X + 1 \,. \end{aligned}$$

En déduire $\mathrm{pgcd}(X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 5X - 5, X^2 + X + 1)$.

Exercice 1.9

Calculer le reste de la division dans $\mathbb{R}[X]$ de

1. $(\cos a + X \sin a)^n$ par $X^2 + 1$,
2. $(X-1)^m + X^m - 1$ par $X^2 - X + 1$ selon la valeur de m modulo 6.

Exercice 1.10

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et a et b deux nombres réels distincts. Calculer le reste $R(X)$ de la division de $P(X)$ par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 1.11

Soit $P(X) = 3X^3 + 2X^2 + 2$ et $Q(X) = X^2 - 2$.

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le pgcd D de P et Q.
2. En déduire deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = D$.

Exercice 1.12

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\deg P$ le degré d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$. Soit $A(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$ et $B(X) = X^3 - 3X - 2$.

1. Calculer D le pgcd unitaire de A et B.
2. Trouver deux polynômes U_0 et V_0 de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $AU_0 + BV_0 = D$ avec $\deg U_0 < \deg B$ et $\deg V_0 < \deg A$.
3. Trouver le ppcm unitaire de A et B.

Exercice 1.13

On considère les polynômes $A(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $B(X) = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$. Déterminer leur pgcd D et écrire D sous la forme $AU + BV$.

Exercice 1.14

Soient a et b deux entiers strictement positifs. Quel est le pgcd de $X^a - 1$ et $X^b - 1$?

Exercice 1.15

Soit $D = \text{pgcd}(A, B)$ (où A et B ne sont pas nuls tous les deux), et soit (U, V) tels que $AU + BV = D$. Quel est le pgcd de U et V ?

Exercice 1.16

Soient $A(X) = (X-1)^2$ et $B(X) = (X+1)^2$.

1. Calculer le pgcd unitaire D de A et B.
2. Trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $UA + VB = D$.
3. Déduire une décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(X^2-1)^2}$.

Exercice 1.17

Soit P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. Montrer que, si m et n sont des entiers strictement positifs, P^m est premier avec Q^n.

Exercice 1.18

Trouver un polynôme P unitaire de degré ≤ 3, divisible par $X - 1$ et tel que les restes dans la division de P par $X - 2, X - 3$ et $X - 4$ soient égaux.

1.3 Décomposition en facteurs irréductibles

Définition 1.12 *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit* irréductible *si ce n'est pas une constante et s'il n'y a pas de factorisation de P en deux polynômes non constants (autrement dit P n'est pas constant et ses seuls diviseurs sont les constantes non nulles et les polynômes de la forme cP où c est une constante non nulle).*

Un polynôme du premier degré est toujours irréductible. Soit P un polynôme irréductible. Si P ne divise pas le polynôme A, alors P est premier avec A. Si Q est un autre polynôme irréductible, alors ou bien il existe une constante non nulle c telle que $Q = cP$, ou bien P et Q sont premiers entre eux.

Les polynômes irréductibles jouent le rôle des nombres premiers.

Théorème 1.13 *Soit A un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe une décomposition*

$$A = cP_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$$

où c est une constante non nulle, $P_1, \ldots, P_k$ sont des polynômes irréductibles unitaires distincts de $\mathbb{K}[X]$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des entiers strictement positifs. De plus, une telle décomposition est unique, à l'ordre des facteurs irréductibles près.

L'identification des polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ repose sur le fameux

Théorème 1.14 (D'Alembert - Gauss) *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a une racine dans $\mathbb{C}$.*

La démonstration de ce théorème sort du cadre du cours. On en déduit :

Théorème 1.15 *Sur $\mathbb{C}$, les polynômes irréductibles unitaires sont les $X - c$ avec $c \in \mathbb{C}$. Sur $\mathbb{R}$, les polynômes irréductibles unitaires sont les $X - c$ avec $c \in \mathbb{R}$ et les $X^2 + bX + c$ sans racine réelle (c.-à-d. avec $b^2 - 4c < 0$).*

Rappelons que, si c est un nombre complexe, $(X - c)(X - \overline{c}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(c)X + |c|^2 \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.19

Soit $P(X) = 3X^3 - 2X^2 - 7X - 2$ et $Q(X) = 2X^2 + 3X + 1$.

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le pgcd de P et Q.
2. Donner la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Quel est le ppcm de P et Q ?

Exercice 1.20

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants en facteurs irréductibles

$$\begin{array}{lll} X^3 + 1 & X^3 - 1 & X^3 + 2X^2 + 2X + 1 \\ X^4 + 1 & X^4 + X^2 + 1 & 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 \end{array}$$

Exercice 1.21

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{Q}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + 1$.

Exercice 1.22

Montrer qu'un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible sur un corps $\mathbb{K}$ si et seulement s'il n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$. En est-il de même pour un polynôme de degré 4 ?

Exercice 1.23

Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(X) = X^{2m} + (X+1)^n - 1$ par $X(X+1)$.

Dans toute la suite, on désigne par $A(X)$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 de $\mathbb{C}[X]$ et on pose $B(X) = [A(X)]^{2m} + (A(X)+1)^n - 1$.

2. Montrer que $[A(X)]^2 + A(X)$ divise $B(X)$.
3. Montrer que, si x_0 est racine de multiplicité 1 de $A(X)$, alors x_0 est racine de multiplicité 1 de $B(X)$.
4. On suppose que $A(X) = X^2+1$, $m = 1$, et $n = 3$. Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles du polynôme $B(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
5. On suppose que $A(X) = 1 - X + X^2$, $m = 1$ et $n = 2$.
   Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles du polynôme $B(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1.24

Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que, si $P(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, alors il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

On pourra montrer que, si $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$, alors $(A^2+B^2)(C^2+D^2)$ est encore une somme de deux carrés dans $\mathbb{R}[X]$.

Décomposer $X^4 + X^2 + 1$ en une somme de deux carrés dans $\mathbb{R}[X]$.

1.4 Racines : multiplicité, relations coefficients-racines

Définition 1.16 *Soit $c \in \mathbb{K}$, P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. On dit que c est* racine de multiplicité *k de P si $(X-c)^k$ divise P et $(X-c)^{k+1}$ ne le divise pas. Autrement dit, $P = (X-c)^k Q$ avec $Q(c) \neq 0$.*

Une racine de multiplicité 1 est dite *simple*, et une racine de multiplicité > 1 *multiple*.

Soient $c_1, \ldots, c_p$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Si c_i est racine de multiplicité k_i de P, pour $i = 0, \ldots, p$, alors $(X-c_1)^{k_1} \cdots (X-c_p)^{k_p}$ divise P. En conséquence :

Théorème 1.17 *Un polynôme de degré n de $\mathbb{K}[X]$ ne peut pas avoir plus de n racines comptées avec multiplicité dans $\mathbb{K}$.*

Ce théorème est souvent employé sous la forme suivante : *si un polynôme de degré $\leq n$ a plus de n racines comptées avec multiplicité, alors c'est le polynôme nul.*

Définition 1.18 *Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$. Son* polynôme dérivé *est par définition $P' = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$. On note $P'', \ldots, P^{(k)}, \ldots$ les polynômes dérivés successifs.*

Les règles usuelles de dérivation de somme ou de produit s'appliquent.

Pour les deux résultat suivants, il faut supposer que $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$ (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Théorème 1.19 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, et c un élément de $\mathbb{K}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *c est racine de multiplicité k de P.*
2. *$P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(k-1)}(c) = 0$ et $P^{(k)}(c) \neq 0$.*

En conséquence, c est racine de multiplicité $\geq k$ de P si et seulement si $P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(k-1)}(c) = 0$.

Théorème 1.20 (Formule de Taylor pour les polynômes) *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à d, et c un élément de $\mathbb{K}$. Alors*

$$P(X) = P(c) + P'(c)\,(X-c) + \frac{P''(c)}{2}\,(X-c)^2 + \frac{P^{(3)}(c)}{3!}\,(X-c)^3 + \cdots + \frac{P^{(d)}(c)}{d!}\,(X-c)^d\,.$$

Un polynôme de degré $n > 0$ est dit *scindé* sur $\mathbb{K}$ s'il a exactement n racines comptées avec multiplicité dans $\mathbb{K}$. Par exemple, le théorème de d'Alembert-Gauss entraîne que tout polynôme non constant est scindé sur $\mathbb{C}$.

Théorème 1.21 *Soit $P = a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ un polynôme unitaire de degré $n > 0$, scindé sur $\mathbb{K}$. Soit $c_1, \ldots, c_n$ ses racines comptées avec multiplicité (une racine de multiplicité k figure k fois). Alors :*

$$\begin{array}{rcl}
-a_{n-1} & = & \sum_{1\le i\le n} c_i \\
a_{n-2} & = & \sum_{1\le i_1<i_2\le n} c_{i_1}c_{i_2} \\
 & \vdots & \\
(-1)^k a_{n-k} & = & \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k} \\
 & \vdots & \\
(-1)^n a_0 & = & c_1c_2\cdots c_n\,.
\end{array}$$

Autrement dit, $(-1)^k a_{n-k}$ est la somme des produits k à k des racines. En particulier, a_{n-1} est l'opposé de la somme des racines et $(-1)^n a_0$ est le produit des racines.

Exercice 1.25

Soit P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ donné par $P(X) = 2X^3 + X^2 + X - 1$.

1. Montrer que, si P admet une racine rationnelle écrite sous forme irréductible p/q, alors p divise 1 et q divise 2.
2. En déduire toutes les racines rationnelles de P.
3. Trouver toutes les racines de P.

Exercice 1.26

Soit m, n et p trois entiers naturels. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2}$. Factoriser $X^8 + X^4 + X^3$. (On ne demande pas une décomposition en facteurs irréductibles).

Exercice 1.27

On considère le polynôme $P(X) = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$. Quelle est la multiplicité de 2 en tant que racine de P ?

Exercice 1.28

Trouver (a, b) pour que $(X-1)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$. Généraliser à $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice 1.29

Trouver $P(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $(X-1)^3$ divise $P(X) + 1$ et $(X+1)^3$ divise $P(X) - 1$

1. en utilisant le polynôme dérivé P'.
2. en utilisant l'identité de Bezout.

Exercice 1.30

Trouver un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 4 tel que

$$\begin{array}{rcl}
X^3 & \text{divise} & P(X)+1\,, \\
(X-1)^2 & \text{divise} & P(X)\,.
\end{array}$$

Donner la décomposition en produits de facteurs irréductibles du polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1.31

On considère le polynôme $P(X) = X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 20X^3 + 12X^2 - 4$ et on note P' son polynôme dérivé.

1. Déterminer le pgcd unitaire de P et P'.
2. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1.32

On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$ et on note P' son polynôme dérivé.

1. Calculer $D = \text{pgcd}(P, P')$.
   Trouver deux polynômes U et V tels que $D = UP + VP'$.
2. En déduire les racines doubles de P dans $\mathbb{C}[X]$ et ses décompositions en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1.33

Soit $A(X) = X^6 + aX^4 + bX^3 + c$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer a, b et c pour que 1 soit racine double de A et que j soit racine de A.
2. Montrer alors que $A \in \mathbb{R}[X]$ et que j est racine double.
3. Décomposer A en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.34

Soit $P(X) = 2X^3 - X^2 - 7X + a$.

Déterminer a pour que P ait deux racines de somme 1.

Exercice 1.35

Soit $P(X) = X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 11X^2 + 7X + 3$.

1. Calculer $P(j)$ et $P'(j)$. En déduire que P admet une unique racine réelle négative. Calculer cette racine en utilisant un coefficient du polynôme. Vérifier le résultat à l'aide d'un autre coefficient.
2. Donner la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Quel est le pgcd de P et P' ?

Exercice 1.36

Résoudre, dans $\mathbb{C}^3$, les systèmes symétriques suivants

$$1) \left\{ \begin{array}{rl} x+y+z & = 0 \\ xy+xz+yz & = -13 \\ xyz & = -12 \end{array} \right. , \qquad 2) \left\{ \begin{array}{rl} x+y+z & = -2 \\ x^2+y^2+z^2 & = 0 \\ x^3+y^3+z^3 & = 1 \end{array} \right. .$$

Exercice 1.37

Trouver un polynôme de degré trois dont les racines sont les carrés des racines du polynôme $X^3 + X^2 - 2X - 1$.