GROUPES de TYPE MULTIPLICATIF

17 mai 2021
Matilde

1. DÉSCRIPTION de $D(M)$
2. PROPRIÉTÉS
3. GROUPES DIAGONALISABLES: ÉQUIVALENCE de CATÉGORIES
4. DIAGONALISABILITÉ des REPRÉSENTATIONS

- $k :=$ un corps
- Tout groupe $/k$ est supposé affine

1.1 DÉSCRIPTION de $D(M)$ - CARACTÈRES

Déf Soit G un groupe algébrique sur k.
Un caractère de G est un k-homomorphisme $\chi : G \longrightarrow \mathbb{G}_m$.

Se donner un caractère équivaut à se donner un élément inversible $a \in \mathcal{O}(G)$ tel que $\Delta a = a \otimes a$. Un tel élément est dit group-like.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m & G \arrow[l, "\chi"'] \\ \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \arrow[u, "m_{\mathbb{G}_m}"] & G \times G \arrow[l, "\chi \times \chi"] \arrow[u, "m_G"'] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} k[T,T^{-1}] \arrow[r, "\chi^*"] \arrow[d, "\Delta_{\mathbb{G}_m}"'] & \mathcal{O}(G) \arrow[d, "\Delta_G"] \\ k[T,T^{-1}] \otimes k[T,T^{-1}] \arrow[r, "\chi^* \otimes \chi^*"'] & \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G) \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} T \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a \arrow[d, dashed, mapsto] \\ T \otimes T \arrow[r, mapsto] & a \otimes a \end{tikzcd}$$

Lem Les éléments group-like de $\mathcal{O}(G)$ sont linéairement indépendants.

Dém Soit $a = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$ tel que a, a_i sont group-like, $c_i \in k$ et les a_i sont l.i. (n minimal)

Alors
$$\Delta a = a \otimes a = \sum_{i,j} c_i c_j \, a_i \otimes a_j$$
$$\Delta\Big(\sum_i c_i a_i\Big) = \sum_i c_i \Delta a_i = \sum_i c_i \, a_i \otimes a_i$$

Comme les $a_i \otimes a_j$ sont l.i., on obtient $\begin{cases} c_i c_i = c_i & \forall i \\ c_i c_j = 0 & \forall i \neq j \end{cases}$

Donc soit un des c_i est égal à 1 et les autres sont 0, ce qui donne $a = a_i$, soit ils sont tous 0. Ce dernier cas n'est pas possible car un élément group-like est par définition non nul. $\boxtimes$

Si on note $\begin{cases} \chi + \chi' : G \longrightarrow \mathbb{G}_m \\ \qquad\qquad g \longmapsto \chi(g) \cdot \chi'(g) \end{cases}$ sur le foncteur de points, cela rend

$X(G) := \{\text{caractères de } G\}$ un groupe abélien

1.2 FONCTEUR D(M)

<u>Déf</u> Soit M un groupe abélien de type fini. On pose

$$k[M] := \{ \sum_i a_i m_i,\ a_i \in k,\ m_i \in M \text{ somme finie} \}$$

le k-espace vectoriel ayant M comme base. C'est

- une k-algèbre avec la multiplication $(\sum_i a_i m_i)\cdot(\sum_j b_j m_j) := \sum_{i,j} a_i b_j \underbrace{m_i m_j}_{\text{produit en } M}$ dite l'algèbre de groupe de M
- une algèbre de Hopf avec $\begin{cases} \Delta(m) := m \otimes m \\ \varepsilon(m) := 1 \\ S(m) := m^{-1} \end{cases}$ pour tout $m \in M$

Par exemple, $(id \otimes \Delta)\Delta(m) = m \otimes \Delta(m) = m \otimes (m \otimes m)$

$(\Delta \otimes id)\Delta(m) = \Delta(m) \otimes m = (m \otimes m) \otimes m$

<u>Rem</u> En tant que k-algèbre, $k[M]$ est engendrée par un ensemble de générateurs de M en tant que groupe. Comme M est un groupe abélien de type fini, $k[M]$ est une k-algèbre de type fini.

<u>Prop-Déf</u> Soit M un groupe abélien de type fini. Le foncteur

$$D(M) : (k\text{-Alg}) \longrightarrow (Grp)$$
$$R \longmapsto \mathrm{Hom}_{Grp}(M, R^\times)$$

est représenté par le groupe algébrique $\mathrm{Spec}\, k[M]$.

Après choix d'une base pour M, on a un isomorphisme $D(M) \simeq \mathbb{G}_m^d \times \mu_{m_1} \times \dots \times \mu_{m_r}$

<u>Dém</u> $D(M)(R) \underset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{Grp}(M, R^\times) \underset{\text{étend par } k\text{-linéarité}}{=} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[M], R) \underset{\text{équivalence}}{=} \mathrm{Hom}_{k\text{-Sch}}(\mathrm{Spec} R, \mathrm{Spec}\, k[M])$

donc $D(M)$ est représenté par $k[M]$.

Si on fixe une base de M en tant que $\mathbb{Z}$-module, on a $M \simeq \mathbb{Z}^d \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$

- $M = \mathbb{Z}\cdot e$, $k[M] = \{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i e^i,\ c_i \in k \text{ somme finie} \} \simeq k[e, e^{-1}]$ avec
  $\Delta(e) = e \otimes e$, $\varepsilon(e) = 1$ et $S(e) = e^{-1}$ donc $k[\mathbb{Z}] \simeq \mathcal{O}(\mathbb{G}_m)$
- $M \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendré par e. Alors $k[M] = \{ \sum_{i=0}^{m-1} c_i e^i,\ c_i \in k \}$ avec
  $\Delta(e) = e \otimes e$, $\varepsilon(e) = 1$ et $S(e) = e^{-1}$ donc $k[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}] \simeq \mathcal{O}(\mu_m)$.

En plus $\begin{cases} k[M \times N] \xrightarrow{\sim} k[M] \otimes k[N] \\ (m, m) \longmapsto m \otimes m \end{cases}$ est un iso d'algèbres de Hopf, donc

$M \simeq \mathbb{Z}^d \oplus \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z} \implies k[M] \simeq \mathcal{O}(\mathbb{G}_m)^{\otimes d} \otimes \mathcal{O}(\mu_{m_1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(\mu_{m_r})$

et finalement $D(M) = \mathrm{Spec}\, k[M] \simeq \mathbb{G}_m^d \times \mu_{m_1} \times \dots \times \mu_{m_r}$. $\boxtimes$

2. PROPRIÉTÉS

<u>Lem</u> Les éléments group-like de $D(M)$ sont précisément les éléments de M, càd $X(D(M)) \simeq M$.

<u>Dém</u> Si $m \in M$, par déf. de la structure de algèbre de Hopf sur $k[M]$, $\Delta m = m \otimes m$ donc il est group-like. Inversement, soit $a \in k[M]$ un élément group-like. On peut écrire $a = \sum_i c_i m_i$ avec $c_i \in k$ et $m_i \in M$ linéairement indépendants. Avec le même calcul qu'avant, on trouve $\exists!\, j$ tel que $a = m_j$ donc $a \in M$. ⊠

<u>Prop</u> Soit p l'exposante caractéristique de k, càd $p=1$ si $\mathrm{car}\, k = 0$, $p = \mathrm{car}\, k$ si $\mathrm{car}\, k > 0$

(1) $D(M)$ est connexe $\iff$ la seule torsion en M est la p-torsion

(2) $D(M)$ est lisse $\iff$ M n'a pas de p-torsion

(3) $D(M)$ est lisse et connexe $\iff$ M est libre.

<u>Dém</u> $D(M) \simeq \mathbb{G}_m^d \times \mu_{m_1} \times \dots \times \mu_{m_r}$ donc il suffit de le vérifier pour $\mathbb{G}_m$ et μ_m.

(1) • $\mathbb{G}_m$ connexe et $\mathbb{Z}$ libre

• $\mu_m = \mu_q \times \mu_{p^m}$ où $(p,q)=1$ (en caractéristique 0 on a juste μ_q)

son sous-schéma réduit est $\mathrm{Spec}\, k$, en particulier il est connexe

$\mathrm{Spec}(k[X,X^{-1}]/X^q - 1)$ avec $p \nmid q \Rightarrow T^q - 1$ est séparable donc μ_q est étale

$\mu_q = \mathrm{Spec}\, k_1 \amalg \dots \amalg \mathrm{Spec}\, k_r$ avec $r \leq q$ et k_i/k séparable. En particulier s'il est nontrivial il n'est pas connexe.

(2) • $\mathbb{G}_m$ lisse et $\mathbb{Z}$ libre

• μ_{p^m} n'est pas réduit car $X^{p^m} - 1 = (X-1)^{p^m}$, donc en particulier pas lisse.

• $\mu_q = \mathrm{Spec}(k[T,T^{-1}]/T^q - 1)$ avec $p \nmid q \Rightarrow T^q - 1$ est un polynôme séparable donc μ_q est lisse, car si on passe à $\bar{k}$ c'est $\mathrm{Spec}\,\bar{k} \amalg \dots \amalg \mathrm{Spec}\,\bar{k}$

(3) conséquence de (1) et (2) ⊠

3. ÉQUIVALENCE de CATÉGORIES

Déf Un groupe algébrique G/k est dit diagonalisable si les éléments group-like de $\mathcal{O}(G)$ l'engendrent en tant que k-espace vectoriel.

Thm Un groupe algébrique G est diagonalisable $\iff$ G est isomorphe à $D(M)$ pour un certain M groupe abélien de type fini.

Dém $\boxed{\Leftarrow}$ $G = D(M) = \operatorname{Spec} k[M]$. Les éléments group-like de $k[M]$ sont les éléments de M, qui engendrent $k[M]$ par définition.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit G tels que ses éléments group-like engendrent $\mathcal{O}(G)$. On pose $M := X(G)$. Les éléments group-like sont toujours l.i. donc M est une base de $\mathcal{O}(G)$ et $k[M] \simeq \mathcal{O}(G)$ en tant que k-algèbre. De plus $\Delta m = m \otimes m$ dans $k[M]$ et $\mathcal{O}(G)$ pour tout $m \in M$, donc l'iso respecte la structure d'algèbre de Hopf. ⊠

Thm On a une (anti) équivalence de catégories

$$\begin{aligned}
\{\text{groupes abéliens de type fini}\} &\longrightarrow \{\text{groupes alg}/k \text{ diagonalisables}\} \\
M &\longmapsto D(M) \\
X(G) &\longleftarrow\!\shortmid\; G
\end{aligned}$$

En plus les foncteurs X et D sont exacts, càd que une suite de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si la suite correspondante de k-groupes algébriques

$$0 \longrightarrow D(M'') \longrightarrow D(M) \longrightarrow D(M') \longrightarrow 0$$

est exacte.

Dém Un k-groupe alg. est diagonalisable ssi de la forme $D(M)$, càd D est essentiellement surjectif. Il nous reste à montrer que D est pleinement fidèle càd que

$$\begin{cases}
\operatorname{Hom}_{Grp}(M,N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{k\text{-}gp}(D(N), D(M)) \\
(f: M \longrightarrow N) \longmapsto \begin{pmatrix} D(N)(R) = \operatorname{Hom}_{Grp}(N, R^\times) \longrightarrow D(M)(R) = \operatorname{Hom}_{Grp}(M, R^\times) \\ g \longmapsto g \circ f \end{pmatrix}
\end{cases}$$

est bijectif pour tout M, N. Comme $k[M \oplus M'] \simeq k[M] \otimes k[M']$, on a $D(M \oplus M') \simeq D(M) \times D(M')$: il suffit de montrer que l'application est bijective dans les cas où M et N sont tous les deux cycliques. Par exemple :

- si $M=N=\mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}_{Grp}(M,N) = \mathrm{End}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-}gp}(\mathbb{G}_m,\mathbb{G}_m) = \{\text{éléments group-like de } \mathcal{O}(\mathbb{G}_m) = k[T,T^{-1}]\}$$
$$= \{T^i : i \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$$

$\boxed{\supseteq}$ $\Delta T^i = T^i \otimes T^i$

$\boxed{\subseteq}$ les T^i forment une base et les éléments group-like sont l.i.

- si $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $N=\mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}_{Grp}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-}gp}(\mathbb{G}_m, \mu_m) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}Hopf}(k[T,T^{-1}]/T^m-1,\ k[X,X^{-1}])$$

Soit $P(X)$ l'image de T par un tel morphisme, alors $P(X)^m=1$ donc $P(X)$ est une constante $\lambda \in k$. En plus, $\varepsilon(T)=1$ donc $\varepsilon(P(X)) = \varepsilon(\lambda) = 1$ et on obtient $\lambda = 1$.

Pour montrer que X et D sont exacts on utilise le lemme suivant :

<u>Lem</u> Soit $\varphi : G \longrightarrow Q$ un morphisme de groupes algébriques affines tel que $\mathcal{O}(Q) \xrightarrow{\varphi^\#} \mathcal{O}(G)$ est injectif. Alors φ est un quotient

<u>Dém</u> (idée) : on factorise φ en $G \xrightarrow{q} H \xrightarrow{i} Q$ avec q fidèlement plat, i immersion fermée et H un k-groupe alg. affine. On a $\varphi^\# : \mathcal{O}(Q) \xrightarrow{i^\#} \mathcal{O}(H) \xrightarrow{q^\#} \mathcal{O}(G)$ injectif par hypothèse, donc $i^\#$ injectif. D'autre part $i^\#$ est aussi surjectif car i est une immersion fermée, donc i est un iso et φ est fidèlement plat.

Soit $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte. Alors $k[M'] \longrightarrow k[M]$ est injectif. D'après le lemme, $\pi := D(i) : D(M) \longrightarrow D(M')$ est un quotient. On regarde son noyau :

$$\begin{cases} \pi_R : D(M)(R) = \mathrm{Hom}_{Grp}(M,R^\times) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Grp}(M',R^\times) = D(M')(R) \\ \qquad\qquad g \longmapsto g\circ i = g_{|M'} \end{cases}$$

donc $\ker(\pi)(R) = \ker(\pi_R) = \{g : M \longrightarrow R^\times : g\circ i = g_{|M'} = 0\} = \{\bar{g} : M/M' \longrightarrow R^\times\}$
$$= \{\bar{g} : M'' \longrightarrow R^\times\} = \mathrm{Hom}_{Grp}(M'',R^\times) = D(M'')(R)$$

et on conclut que $\ker(\pi) = D(M'')$ donc D est exact.

De plus, D et X sont quasi-inverses : si D exact, X l'est aussi. ⊠

Cor Soit $G = D(M)$. Alors $\underline{Aut}(G)$ est le schéma en groupes constant associé au groupe discret $Aut(M)^{opp}$ càd $\coprod_{\gamma \in Aut M} \operatorname{Spec} k$ une somme disjointe de $\operatorname{Spec} k$ indicés par $Aut(M)$.

Dém L'équivalence de catégories $\{\text{groupes abéliens TF}\} \longrightarrow \{\text{groupes diagonalisables}\}$ reste vraie sur un anneau R de base quelconque. Dans ce cas on note D_R le foncteur.
Alors $\underline{Aut}(G) : (k\text{-Alg}) \longrightarrow (Grp)$ est le foncteur
$$\underline{Aut}(G)(R) := Aut_{R\text{-}gp}(G_R) = Aut_{R\text{-}gp}(D_R(M)) = Aut_{Grp}(M)^{opp}$$
équivalence de catég.

donc il est constant. $\boxtimes$

Conséquence: un groupe G connexe ne peut pas agir nontrivialement sur un tore.
Supposons $G \curvearrowright T$, alors on a un morphisme $G \longrightarrow \underline{Aut}(T)$. Si $T = \mathbb{G}_m^n = D(\mathbb{Z}^n)$ alors $\underline{Aut}(T) = (Aut(\mathbb{Z}^n))_k = (GL_n(\mathbb{Z}))_k$ est discret. Donc G connexe, $\underline{Aut}(T)$ discret impliquent que l'image est triviale.

Ex Soit G/k un groupe alg. lisse et connexe et $T \subset G$ un tore. Si T est distingué, alors il est central : G agit sur T par conjugaison et donc l'action est triviale.

4. DIAGONALISABILITÉ des REPRÉSENTATIONS

Déf Une représentation (V, r) d'un groupe alg G/k est diagonalisable si elle est une somme de sous-représentations de dimension 1.

Rem Si V est de dimension finie, (V,r) est diagonalisable si et seulement si il existe une base de V telle que $r(G) \subset \mathbb{D}_n$, càd $r_R : G(R) \longrightarrow \mathbb{D}_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$
où on a fixé une base de V et on voit $V \otimes R \simeq R^n$ donc $GL_V(R) = GL_n(R)$.

Thm Soit G un k-groupe algébrique. LCSSE :

(a) G est diagonalisable
(b) Toute représentation de G est diagonalisable
(c) Toute représentation de G de dimension finie est diagonalisable
(d) Pour toute représentation (V,r) de G on a $V = \bigoplus_{\chi \in X(G)} V_\chi$, où
$$V_\chi := \{ v \in V : \ g \cdot v_R = \chi(g) v_R, \ \forall g \in G(R), \ \forall R \ k\text{-alg} \}$$
G agit à travers le caractère χ sur V_χ

Dém (a)$\Rightarrow$(b) : soit (V,r) une représentation de G et $\rho : V \longrightarrow V\otimes \mathcal{O}(G)$ le comodule associé.
Comme une sous-représentation correspond à un sous-comodule, ISM que V est une somme de sous-comodules de dimension 1, càd que V est engendré par des vecteurs u tels que $\rho(u) \in \langle u \rangle \otimes \mathcal{O}(G)$.
Soit $v\in V$. G est diagonalisable, donc les éléments group-like $(e_i)_{i\in I}$ forment une base de $\mathcal{O}(G)$. On écrit donc $\rho(v) = \sum_i u_i \otimes e_i$ avec $u_i \in V$ (somme finie). Or, on a

- $(id\otimes\Delta)\circ\rho(v) = \sum u_i \otimes \Delta e_i = \sum u_i \otimes e_i \otimes e_i$
  $\|$
  $(\rho\otimes id)\circ \rho(v) = \sum \rho(u_i)\otimes e_i$ donc $\rho(u_i) = u_i \otimes e_i \in \langle u_i\rangle \otimes \mathcal{O}(G)$
- $v = (id,\varepsilon)\circ\rho(v) = \sum u_i \varepsilon(e_i) = \sum u_i$

Si on applique cela à tous les v qui forment une base de V, on obtient un ensemble de u_i tels que $\langle u_i\rangle$ est un sous-comodule $\forall i$ et tels qu'ils engendrent V.
(b)$\Rightarrow$(a) : En particulier, la représentation régulière est diagonalisable $\begin{cases} V = \mathcal{O}(G) \\ \rho = \Delta \end{cases}$
donc $\mathcal{O}(G)$ est engendré par les vecteurs propres de r. Soit $f\in\mathcal{O}(G)$ un tel vecteur propre qui agit à travers le caractère χ, càd

$$f(g) = r_R(g)(f) = \chi(g) f \qquad \forall g \in G(R)\ \forall R\ k\text{-alg}$$

Alors $f(gh) = r_R(gh)(f) = \chi(gh) f = \chi(g)\chi(h) f = \chi(g) f(h) \qquad \forall g,h\in G(R)$
donc en particulier $f(g) = f(g\cdot 1) = \chi(g) f(1)$ et on a f multiple de χ. On en déduit que $\mathcal{O}(G)$ est engendré par ses caractères.
(b)$\Rightarrow$(c) : ok
(c)$\Rightarrow$(b) : toute représentation est union filtrée de ses sous-représentations de dimension finie.
(b)$\Rightarrow$(d) : il faut montrer que la somme est directe, $\sum_{\chi\in X(G)} V_\chi = \bigoplus_{\chi \in X(G)} V_\chi$.
On note $a(\chi)$ l'élément group-like de $\mathcal{O}(G)$ qui correspond à χ. Pour tout $v\in V_\chi$ on a
$\rho(v) = r_{\mathcal{O}(G)}(id_{\mathcal{O}(G)})(v\otimes 1) = \chi(id_{\mathcal{O}(G)})(v\otimes 1) = v\otimes a(\chi)$
Si la somme n'est pas directe, on a $v_1 + \dots + v_m = 0$ avec $v_i \in V_{\chi_i}$, $v_i \neq 0$.
En appliquant ρ on a $0 = \rho(v_1) + \dots + \rho(v_m) = v_1 a(\chi_1) + \dots + v_m a(\chi_m)$
ce qui donne une contradiction car les $a(\chi_i)$ sont linéairement indépendants.
(d)$\Rightarrow$(b) : tout V_χ est une somme de représentations de dimension 1. $\boxtimes$