Exposé 10/05

<u>Rappel</u> : Tous nos groupes algébriques sont des groupes affines sur k un corps. Dans cet exposé, une algèbre sur k est un k-espace vectoriel ($k$ev) muni d'une application k-bilinéaire $A \times A \to A$, pas forcément associative ou commutative (comme dans Bourbaki)

1) Algèbres de Lie, définitions

Ici, k est un anneau.

Def : ① Une algèbre de Lie sur k est un k-module $\mathfrak{g}$ muni d'une application k-bilinéaire : $[\circ,\circ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, appelée "crochet" telle que :

a) $\forall x \in \mathfrak{g}, [x,x]=0$

b) $\forall x,y,z \in \mathfrak{g}, [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$.

"Identité de Jacobi".

② Un morphisme d'algèbres de Lie est une application k-linéaire $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ telle que :

$$\forall x,y \in \mathfrak{g},\ u([x,y]) = [u(x), u(y)]$$

③ Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-k-module $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\forall x, y \in \mathfrak{s}, [x,y] \in \mathfrak{s}$.

<u>Rq</u> : La condition a) appliquée à $[x+y, x+y]$ donne

$$[x,y] = -[y,x].$$

Ex : ① L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$ est le k-module des matrices de taille 2 avec trace nulle, muni du crochet : $[x,y] = xy - yx$.

Les éléments $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en forment une base et $[X,Y] = H$; $[H,X] = 2X$; $[H,Y] = -2Y$.

② Soit A une algèbre associative. Alors $\begin{aligned} A \times A &\to A \\ (x,y) &\mapsto xy - yx \end{aligned}$ munit A d'une structure de k-algèbre de Lie.

(3) Dans l'exemple précédent, si $\boxed{A = \mathrm{End}_{k\text{-lin}}(V)}$ où V est un k-module, cette algèbre de Lie est notée $\boxed{\mathfrak{gl}_V}$.
Si $\boxed{A = \mathcal{M}_n(k)}$, la structure d'algèbre de Lie est notée $\boxed{\mathfrak{gl}_n}$.
Les matrices E_{ij} forment une base de $\mathfrak{gl}_n$, et

$$\forall i, j, \quad [E_{ij}, E_{i'j'}] = \delta_{ji'} E_{ij'} - \delta_{j'i} E_{i'j}.$$

(4) Soit A une k-algèbre et M un A-module. Une application linéaire $D : A \to M$ est appelée une <u>k-dérivation de A dans M</u> si :

$$\boxed{\forall f, g \in A, \quad D(fg) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)}$$ (règle de Leibniz)

Par exemple, $D(1) = 1 \cdot D(1) + D(1) \cdot 1$, donc $D(1) = 0$. Donc par linéarité on a $D(c) = 0$ pour tout $c \in k$.
Réciproquement, toute application additive vérifiant Leibniz est une k-dérivation. Dans le cas $M = A$,
la composée de deux dérivations n'en est pas une, mais leur crochet si : $[D, E] : D \circ E - E \circ D$.
Donc, l'ensemble $\mathrm{Der}_k(A) := \mathrm{Der}_k(A, A)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_A$.

Déf : Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie. Soit $x \in \mathfrak{g}$. L'application k-linéaire notée $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est appelée <u>application adjointe</u>.

L'identité de Jacobi nous dit que, $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}_x([y, z]) = [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)].$$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, ad_x est une dérivation, appelée "dérivation intérieure".
De plus, on a $\forall x, y \in \mathfrak{g}$, $[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]_{\mathrm{Der}_k(\mathfrak{g})} = \mathrm{ad}_{[x,y]}$. Ainsi,

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_k(\mathfrak{g})$$ est un morphisme d'algèbres de Lie, appelé <u>représentation adjointe</u>

2 Algèbre de Lie d'un groupe algébrique

A Description fonctorielle

Déf° : Soit G un k-groupe algébrique. Soit $R[\varepsilon] = \left| \begin{array}{l} R \oplus \varepsilon R \\ \varepsilon^2 = 0 \end{array} \right.$ où R est une k-algèbre

Soit $p : R(\varepsilon) \to R$, $\varepsilon \mapsto 0$ et $i : R \hookrightarrow R(\varepsilon)$

On note $e : \mathcal{O}(G) \to k$ la counité.

On définit un foncteur :

$L(G) : \{k\text{-algèbre}\} \longrightarrow \mathrm{Ens}$

$R \longmapsto L(G)(R) = \mathrm{Ker}\left(G(R(\varepsilon)) \xrightarrow{G(p)} G(R) \right)$

Et on note $\boxed{L(G) := L(G)(k)} = \mathrm{Ker}(G(k(\varepsilon)) \to G(k))$.

On a une suite exacte scindée :

$$0 \to I \to \mathcal{O}(G) \underset{i}{\overset{e}{\rightleftarrows}} k \to 0$$

où $I = \mathrm{Ker}(e : \mathcal{O}(G) \to k)$ l'idéal d'augmentation.

Lorsque l'on tensorise par R, on obtient :

$$0 \to I \otimes R \to \mathcal{O}(G) \otimes R \xrightarrow{e_R} R \to 0$$

Par définition, les éléments de $L(G)(R)$ sont les morphismes $f : \mathcal{O}(G) \otimes R \to R(\varepsilon)$ tels que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(G) \otimes R \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "e_R"'] & R(\varepsilon) \arrow[r, "\varepsilon \mapsto 0"] & R \end{tikzcd}$$

Ainsi, f envoie l'idéal d'augmentation $I \otimes R$ dans (ε). Comme $\varepsilon^2 = 0$, f se factorise à travers

$$\frac{\mathcal{O}(G) \otimes R}{(I \otimes R)^2}$$

Or, $\mathcal{O}(G) \otimes R \overset{R\text{-lin}}{\tilde{\to}} R \oplus (I \otimes R)$

$a \otimes 1 \mapsto (e_R(a \otimes 1), (a - e_R(a \otimes 1) \otimes 1))$

$x \otimes 1 + \lambda \cdot \otimes 1 \longleftarrow (\lambda, x \otimes 1)$

Donc, $$\frac{\mathcal{O}(G)\otimes R}{(I\otimes R)^2} \simeq R \oplus \frac{(I\otimes R)}{(I\otimes R)^2}$$

$$\overline{x\otimes 1} \longmapsto \left(\varepsilon(x\otimes 1), \overline{x\otimes 1 - \varepsilon(x)\otimes 1}\right)$$

$$\overline{\lambda\cdot 1\otimes 1 + x\otimes 1} \longleftarrow\!\!\shortmid \left(\lambda, \overline{x\otimes 1}\right)$$

Regardons alors:

$$\begin{tikzcd}
\frac{\mathcal{O}(G)\otimes R}{(I\otimes R)^2} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & R(\varepsilon) \\
R\oplus \frac{I\otimes R}{(I\otimes R)^2} \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Alors, $\overline{\varphi}(a, b\otimes 1) = \varphi(a\cdot\overline{1\otimes 1} + b\otimes 1)$

$= \varphi(a\otimes 1) + \varphi(b\otimes 1)$

$= \overset{R}{\hat{a}} + \varepsilon \underbrace{D(b\otimes 1)}_{\in R}$ car $\varphi(I\otimes R) \subseteq (\varepsilon)$.

Ainsi, on a montré:

$$L(G)(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R\text{-lin}}\left(\frac{I\otimes R}{(I\otimes R)^2}, R\right)$$

$$\varphi \longmapsto D$$

$$id + D\cdot\varepsilon : \longleftarrow\!\!\shortmid D$$

$= (a + \bar{b}) \mapsto a + D(\bar{b})\varepsilon$

On définit alors: $\boxed{\mathrm{Lie}(G)(R) := \mathrm{Hom}_{R\text{-lin}}\left(\frac{I\otimes R}{(I\otimes R)^2}, R\right)}$

Si $R = k$, on appelle $\mathrm{Lie}(G)(k)$ l'algèbre de Lie de G. C'est alors un k ev. On la note $\mathrm{Lie}(G)$.

$$\boxed{\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Hom}_{k\text{-lin}}\left(I/I^2, k\right)}$$

Ainsi, $\mathrm{Lie}(G)(R) \simeq \mathrm{Hom}_{R\text{-lin}}\left(\frac{I\otimes R}{(I\otimes R)^2}, R\right)$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-lin}}\left(\frac{I}{I^2}, k\right)\otimes R$$

$$\simeq \mathrm{Lie}(G)\otimes R.$$

* Soient G, H deux groupes algébriques. Soit $f : G \to H$.

Alors on a :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L(G)(R) & \hookrightarrow & G(R(\varepsilon)) & \xrightarrow{G(p)} & G(R) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow f_{R(\varepsilon)} & & \downarrow f_R & & \\ 0 & \to & L(H)(R) & \hookrightarrow & H(R(\varepsilon)) & \xrightarrow[H(p)]{} & H(R) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Soit alors $x \in \mathrm{Lie}(G)(R)$. Alors $f_R(G(p))(x) = 0$

i.e $H(p)(f_{R(\varepsilon)}(x)) = 0$.

i.e. $f_{R(\varepsilon)}(x) \in \ker(H(p))$

i.e. $f_{R(\varepsilon)}(x) \in L(H)(R)$.

Ainsi, $f : G \to H$ induit : $f_{R(\varepsilon)} : L(G)(R) \to L(H)(R)$.

En particulier : $L : \{\text{Gpes algébriques}\} \to \mathrm{Ens}$ est
$G \longmapsto L(G)$

un foncteur.

De plus, on a prouvé que, $\forall$ k-algèbre R :
$\mathrm{Lie}(G)(R) \xrightarrow{\sim} L(G)(R)$ Soit $X \in \underset{\mathrm{Lie}(G)\otimes R}{\overset{}{\mathrm{Lie}(G)(R)}}$. On note $e^{\varepsilon X} \in L(G)(R)$
l'élément de $L(G)(R)$ qui lui correspond via cet isomorphisme.
Soit alors $f : G \to H$ un morphisme. Alors,

$$f_{R(\varepsilon)}(e^{\varepsilon X}) = e^{\varepsilon \mathrm{Lie}(f)(X)} \quad \forall X \in \mathrm{Lie}(G)\otimes R.$$

Cela montre que l'isomorphisme

$$\mathrm{Lie}(G)\otimes R \simeq \mathrm{Lie}(G)(R) \quad \text{est fonctoriel en } G.$$

ie: $\mu : \mathrm{Lie} \to L$ est une Transformation nat.

N.B: On peut voir ce foncteur:

$$\mathrm{Lie}(G) : \{k\text{-alg}\} \to \mathrm{Ens}$$
$$R \mapsto \mathrm{Lie}(G)\otimes R.$$

il est représentable par $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathrm{Lie}(G)^\vee))$.

(B) Description en terme de dérivations

Rq: Soit A une k-algèbre et $u : A \to k(\varepsilon)$ une application k-linéaire. On écrit : $u(f) = u_0(f) + \varepsilon u_1(f)$. Alors,

$$u(fg) = u(f)u(g) \iff \begin{cases} u_0(fg) = u_0(f)u_0(g) \\ u_1(fg) = u_0(f)u_1(g) + u_0(g)u_1(f) \end{cases}$$

i.e. u_0 est un morphisme de k-algèbres $A \to k$ et si on l'utilise pour faire de k un A-module, alors $u_1 : A \to k$ est une k-dérivation.

Prop°: Soit $\mathcal{O}(G)$ agissant sur k par $e : \mathcal{O}(G) \to k$. On a une bijection : $L(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{k,e}(\mathcal{O}(G), k)$.

Proof: Par déf°, $L(G) = \{u : \mathcal{O}(G) \to k(\varepsilon)$ morphismes de k-alg, $p\circ u = e$ où $p : k(\varepsilon) \to k,\ \varepsilon \mapsto 0\}$.

$$\text{i.e. } L(G) = \{u : \mathcal{O}(G) \to k(\varepsilon),\ u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x),\ u_0(x) = e(x)\}$$

$$= \{u : \mathcal{O}(G) \to k(\varepsilon),\ u = e + \varepsilon u_1\}$$

Ainsi, la bijection est donnée par:

$$L(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{k,e}(\mathcal{O}(G), k)$$
$$e + \varepsilon u_1 \longmapsto u_1$$
$$e + \varepsilon D \longleftarrow D$$

$\square$

Enfin, voici une dernière identification possible : on peut voir que : $L(G) \xrightarrow{\sim} \{D \in \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(G), \mathcal{O}(G)),\ \Delta \circ D = (id \otimes D) \circ \Delta\}$

où $\Delta : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$ est la comultiplication.

Cet ensemble est appelé l'ensemble des dérivations de $\mathcal{O}(G)$ qui sont <u>invariantes à gauche</u>.

<u>Résumé :</u>

$$L(G) := \mathrm{Ker}(G(k[\varepsilon]) \to G(k)) \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-lin}}(I/I^2, k) =: \mathrm{Lie}(G).$$

$$\simeq \mathrm{Der}_{k,e}(\mathcal{O}(G), k)$$

$$\simeq \{D \in \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(G), \mathcal{O}(G)),\ \Delta \circ D = (id \otimes D) \circ \Delta\}$$

C) Exemples

1) Soit $G = GL_n$. Alors,

$$L(G) = \{I_n + A\varepsilon,\ A \in \mathcal{M}_n(k)\}$$

De plus, $G = \mathrm{Spec}(k[T_{i,j}, \det(T_{ij})^{-1}])$, et

$$e : k[T_{ij}, \det[T_{ij}]^{-1}] \longrightarrow k$$
$$T_{ii} \longmapsto 1$$
$$i \neq j.\ T_{ij} \longmapsto 0$$

Ainsi, $I = (T_{ij} - \delta_{ij})$, et donc le kev I/I^2 a comme base $\{\overline{T_{ij} - \delta_{ij}}\}$. Ainsi, $\underset{\mathrm{Lie}(G)}{\overset{\|}{\mathrm{Hom}_{k\text{-lin}}(I/I^2, k)}} \simeq \mathcal{M}_n(k)$

$$f \longmapsto (f(\overline{T_{ij} - \delta_{ij}}))_{ij}$$

De plus, on peut voir que l'isomorphisme $L(G) \simeq \mathrm{Lie}(G)$ est donné par :

$$\mathrm{Lie}(G) \xrightarrow{\sim} L(G)$$
$$A \longmapsto I_n + A\varepsilon.$$

On définit un crochet sur $Lie(Gl_n)$ par :

$$[A, B] = AB - BA.$$

Ainsi, $Lie(Gl_n) \underset{\text{iso. d'alg de Lie.}}{\simeq} gl_n$

② Soit V un espace vectoriel. Soit $\mathbb{V}_a$ le groupe défini par $\mathbb{V}_a = \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(V^*))$

Alors, $\operatorname{Sym}(V^*) = \dfrac{\bigoplus_{n \geq 0} (V^*)^{\otimes n}}{(x \otimes y - y \otimes x)}$ et $\begin{array}{ccc} \operatorname{Sym}(V^*) & \xrightarrow{e} & k \\ x \in V & \longmapsto & 0 \end{array}$

Alors, l'idéal d'augmentation est $I = \dfrac{\bigoplus_{n \geq 1} (V^*)^{\otimes n}}{(x \otimes y - y \otimes x)}$,

et $I / I^2 \simeq V^{* \otimes 1} = V^*$.

Ainsi, $Lie(\mathbb{V}_a) \simeq \operatorname{Hom}_{k\text{-lin}}(V^*, k) \simeq V$.

Ainsi, $\mathbb{V}_a \simeq (Lie(\mathbb{V}_a))_a$.

③ Soit $G = Sl_n$.

$$G(k(\varepsilon)) \cong Sl_n(k(\varepsilon)) \xrightarrow{f} Sl_n(k) \simeq G(k).$$
$$A + B\varepsilon \longmapsto A$$

$L(G/k) = \{A + B\varepsilon \in Sl_n(k(\varepsilon)), A = I_n\}$

On peut voir que, sous cette décomposition, B est de trace nulle.

Ex avec Sl_2 : $X \in Sl_2(k(\varepsilon))$ et $X = Id + B\varepsilon$. Alors : $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 + a\varepsilon & b\varepsilon \\ c\varepsilon & 1 + d\varepsilon \end{pmatrix}.$$

$\det(X) = 1 = 1 + \varepsilon(a + d)$. Ainsi, $a + d = 0$.

Ainsi, $Lie(Sl_n) = sl_n =$ les matrices de trace nulle.

3) La représentation adjointe, définition du crochet.

Jusqu'ici, les objets définis n'étaient que des k-ev ($L(G)$ ou $\mathrm{Lie}(G)$). Nous allons les munir d'une structure d'algèbre de Lie.

A) La notation exponentielle:

Soit $X \in \mathrm{Lie}(G)(R) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-lin}}\left(\frac{I\otimes R}{(I\otimes R)^2}, R\right)$. On note $e^{\varepsilon X}$ son image via l'isomorphisme: $\mathrm{Lie}(G)(R) \xrightarrow{\sim} L(G)(R)$.

Ex: Si $G = GL_n$, alors $\mathrm{Lie}(G)(R) \cong \mathfrak{gl}_n(R)$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie}(G)(R) &\xrightarrow{\sim} \{Id + \varepsilon A,\ A \in M_n(R)\} = L(G)(R) \\ X &\longmapsto \boxed{1+\varepsilon X := e^{\varepsilon X}} \end{aligned}$$

loi de groupe dans $\mathrm{Lie}(G)(R)$

Prop: $\forall X, X' \in \mathrm{Lie}(G)(R)$, on a: $e^{\varepsilon(X+X')} = e^{\varepsilon X}\cdot e^{\varepsilon X'}$

Proof: 1) Car $\mathrm{Lie}(G)(R) \xrightarrow{\sim} L(G)(R)$ est un morphisme de groupes abéliens.

Prop: Soit $f: G \to H$ un morphisme de groupes algébriques. Alors, le diagramme commute pour tout R = k-algèbre

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lie}(G)\otimes R \arrow[r, "\sim", "X \mapsto e^{\varepsilon X}"'] \arrow[d, "\mathrm{Lie}(f)_R"] & L(G)(R) \arrow[d, "f_R"] \\ \mathrm{Lie}(H)\otimes R \arrow[r, "\sim"] & L(H)(R) \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Lie}(f)$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(I_G/I_G^2, k) \arrow[d, "I_H \xrightarrow{f^*} I_G \to I_G/I_G^2 \to k"] & \ell \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}(I_H/I_H^2, k) & \end{tikzcd}$$

ou

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_A"'] & B \arrow[dl, "e_B"] \\ k & \end{tikzcd}$$

i.e. $\forall X \in \mathrm{Lie}(G)\otimes R$, $f_R(e^{\varepsilon X}) = e^{\varepsilon\,\mathrm{Lie}(f)_R(X)}$.

où $\mathrm{Lie}(f)_R$ provient de: $f_k : L(G)(k) := \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H) := L(H)(k)$

$$\mathrm{Lie}(f)_R : \mathrm{Lie}(G)\otimes R \xrightarrow{f_k \otimes id} \mathrm{Lie}(H)\otimes R$$

Ⓑ La représentation adjointe :

Soit G un groupe algébrique.
On a une action :

$$\chi : G(R(\varepsilon)) \times L(G)(R) \longrightarrow L(G)(R)$$
$$(g, \varphi) \longmapsto g \cdot \varphi \cdot g^{-1}$$

multiplication dans

$$(g \cdot g' : \mathcal{O}(G) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G) \xrightarrow{g \otimes g'} R(\varepsilon) \otimes R(\varepsilon) \to R(\varepsilon)) \quad G(R(\varepsilon)).$$

Comme $G(R)$ est un sous-groupe de $G(R(\varepsilon))$, il agit également.
Ainsi, on obtient un morphisme :

$$Ad_R : G(R) \longrightarrow Aut_{R\text{-lin}}(L(G)(R))$$

qui est naturel en R, et donc définit une représentation :

$$Ad : G \to GL_{L(G)}$$ appelée $\boxed{\text{représentation adjointe}}$

Ex : $G = GL_n$. L'action est donnée par :

$$GL_n(R) \times gl_n(R) \to gl_n(R)$$
$$(A, I_n + X\varepsilon) \longmapsto I_n + AXA^{-1}\varepsilon.$$

i.e. :
$$GL_n(R) \to Aut_{R\text{-lin}}(gl_n(R))$$ est l'action par
$$A \longmapsto (X \mapsto AXA^{-1})$$ conjugaison

On définit une action de $G(R)$ sur $Lie(G)(R)$. Soit $x \in G(R)$ et $X \in Lie(G)(R)$

On définit : $Ad : G(R) \times Lie(G) \xrightarrow{\sim} G(R) \times L(G) \xrightarrow{\chi} L(G)(R) \xrightarrow{\sim} Lie(G)(R)$

On a alors :

$$x \cdot e^{\varepsilon X} \cdot x^{-1} = e^{\varepsilon Ad_x(X)} \quad (\text{par définition}).$$

Soit f un morphisme $f : G \to H$. On a : $Lie(G) := Spec(Sym(Lie(G)^*))$

$$\begin{array}{ccc} & (x, X) \longmapsto Ad_x(X) & \\ G \times Lie(G) & \longrightarrow & Lie(G) \\ f \times Lie(f) \downarrow & & \downarrow Lie(f) \\ H \times Lie(H) & \xrightarrow{(y, Y) \mapsto Ad_y(Y)} & Lie(H) \end{array}$$

i.e. : $\underbrace{\mathrm{Lie}(f)(\mathrm{Ad}_x(X))}_{LHS} = \underbrace{\mathrm{Ad}_{f(x)}(\mathrm{Lie}(f)(X))}_{RHS}$ $\forall x \in G(k)$ et $\forall X \in \mathrm{Lie}(G) \otimes k$. 6

En effet,

$$e^{\varepsilon LHS} = f(e^{\varepsilon \mathrm{Ad}_x X}) = f(x \cdot e^{\varepsilon X} \cdot x^{-1})$$

et $e^{\varepsilon RHS} = f(x) \cdot e^{\varepsilon \mathrm{Lie}(f)(X)} \cdot f(x)^{-1} = f(x) f(e^{\varepsilon X}) f(x)^{-1}$

$$= f(x \cdot e^{\varepsilon X} \cdot x^{-1})$$

- Soit $\mathrm{Ad} : G \to GL_{\mathrm{Lie}(G)}$. Si on applique le foncteur

$\mathrm{Lie} : \{k\text{-grp algébrique}\} \longrightarrow \{k\ \mathrm{ev}\}$ à Ad, on

$G \longmapsto \mathrm{Lie}(G)$.

obtient un morphisme : $\mathrm{Lie}(G) \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathrm{End}(\mathrm{Lie}(G))$ de k ev. Soient $x, y \in \mathrm{Lie}(G)(k)$. On pose :

$$[x, y] = \mathrm{ad}_x(y).$$

Voici le crochet désiré.

En effet :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lie}(G) \times \mathrm{Lie}(G) \arrow[r, "(x,X) \mapsto \mathrm{ad}_x(X)"] \arrow[d, "\mathrm{Lie}(f)\times\mathrm{Lie}(f)"'] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[d, "\mathrm{Lie}(f)"] \\ \mathrm{Lie}(H) \times \mathrm{Lie}(H) \arrow[r, "(y,Y) \mapsto \mathrm{ad}_y(Y)"] & \mathrm{Lie}(H) \end{tikzcd}$$

. Cela montre que $\mathrm{Lie}(f)$ préserve le crochet.

i.e. $\forall x, y \in \mathrm{Lie}(G)$, $\mathrm{Lie}(f)([x,y]_G) = [\mathrm{Lie}(f)(x), \mathrm{Lie}(f)(y)]_H$.

(i.e. le foncteur Lie est un ~~algèbre~~ foncteur en algèbres de Lie)

Théorème: Il existe un unique foncteur $\mathrm{Lie} : \{k\text{-gps algébriques}\} \to \{k\text{-alg de Lie}\}$

tel que:

1) $\mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{lin}}(I/I^2, k)$ comme k-ev $\forall G \in \{k\text{-gps algébriques}\}$

2) Le crochet sur $\mathrm{Lie}(GL_n) = \mathfrak{gl}_n$ est $[X,Y] = XY - YX$.

L'action de G sur lui-même par conjugaison défini une représentation $\mathrm{Ad} : G \to GL_{\mathrm{Lie}(G)}$, qui donne la représentation adjointe : $\mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Der}(\mathrm{Lie}(G))$ lorsque l'on la "différencie", i.e. lorsque l'on lui applique le foncteur Lie.

Proof: L'unicité vient du fait que tout groupe algébrique a une représentation fidèle $G \to GL_n$, qui induit une injection $\mathrm{Lie}(G) \hookrightarrow \mathrm{Lie}(GL_n) = \mathfrak{gl}_n$.

Montrons alors que notre crochet a bien la ppté 2).

Un élément $I_n + \varepsilon A \in L(GL_n)$ agit sur $M_n(k[\varepsilon])$ par:

$$X + \varepsilon Y \mapsto (I + \varepsilon A)(X + \varepsilon Y)(I - \varepsilon A) = X + \varepsilon Y + \varepsilon(AX - XA).$$

Or, soit V un $k$ev et $G = GL_V$. Alors, $G(R(\varepsilon)) = \mathrm{Aut}(V \otimes R(\varepsilon))$
$= \mathrm{Aut}(V\otimes R \oplus \varepsilon V \otimes R)$

Ainsi, $\mathrm{Lie}(G)(R) = \{\mathrm{id}_{V\otimes R(\varepsilon)} + \varepsilon\alpha \,,\ \alpha \in \mathrm{End}(V \otimes R)\}$

où, $\forall \underset{\in V\otimes R}{x} + \varepsilon \underset{\in V\otimes R}{y} \in V \otimes R(\varepsilon)$, on a $(\mathrm{id}_{V\otimes R(\varepsilon)} + \varepsilon\alpha)(x + \varepsilon y)$
$= x + \varepsilon y + \varepsilon\alpha(x) + \varepsilon^2\alpha(y)$
$= x + \varepsilon y + \varepsilon\alpha(x)$.

et $\mathrm{Lie}(G)(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V \otimes R)$

$\mathrm{id}_{V\otimes R(\varepsilon)} + \varepsilon\alpha \longmapsto \alpha$

$\mathrm{id}_{V\otimes R(\varepsilon)} + \varepsilon\beta \longleftarrow \beta$

Ici, le crochet est donné par :

$$\mathcal{M}_n(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(Gl_n) \longrightarrow \mathrm{Lie}(GL_{(\mathrm{Lie}(G_n))}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathrm{Lie}(Gl_n))$$

$$A \longmapsto I + \varepsilon A \longmapsto Id + \varepsilon \alpha \longmapsto \alpha$$

où $\alpha(X) = \cancel{AX - XA}$

Ainsi, le crochet est bien donné par :

$$\mathcal{M}_n(k) \times \mathcal{M}_n(k) \longrightarrow \mathcal{M}_n(k)$$
$$(A, X) \longmapsto AX - XA$$

La dernière assertion découle de la définition, et du fait que tout morphisme ad est une dérivation. $\square$

Rq : On a vu que $gl_n(R) \simeq \mathcal{M}_n(R)$ pour toute k-algèbre R et que $\forall A \in Gl_n(R)$ et $X \in gl_n(R)$,

$$Ad(A)(X) = AXA^{-1}.$$

Soit G un sous-groupe algébrique de Gl_n. Alors $\mathrm{Lie}(G) \subseteq \mathrm{Lie}(Gl_n) = gl_n$ et le morphisme adjoint sur Gl_n se restreint en le morphisme adjoint sur G. Cela donne une description du morphisme adjoint sur G.

④ Un exemple de Chevalley

L'exemple suivant montre qu'il existe un groupe algébrique non commutatif dont l'algèbre de Lie est commutative, aussi que le centre d'un groupe algébrique lisse peut ne pas être lisse.

Soit $k = \bar{k}$ et $\mathrm{char}(k) = p > 0$. Soit G le groupe algébrique dont le foncteur de points est :

$$R \longmapsto G(R) = A(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^p & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in R, \quad a \in R^\times.$$

Soient $X_R : G(R) \longrightarrow R^\times$, $A(a,b) \longmapsto a$ et $Y_R : G(R) \longrightarrow R$, $A(a,b) \mapsto b$

Alors, $\mathcal{O}(G) = k[X, Y, X^{-1}]$ qui est intègre. Ainsi G est connexe et lisse. Or,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^p & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & a'^p & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^p & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^p & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & a'^p & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{-p} & -a^{-p}b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & a'^p a^p & a^p b' + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{-p} & -a^{-p}b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & a'^p & -a'^p b + a b' + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc G n'est pas commutatif. Son centre est

$$\{A(a', b'),\ b' = 0 \text{ et } a'^p = 1\}$$

Ainsi, $\mathcal{O}(Z(G)) = \mathcal{O}(G)/(X^p - 1, Y) \simeq k[X]/(X^p - 1)$ i.e. $Z(G) = \mu_p$ qui est non réduit ($\mathrm{char}(k) = p$)

De plus,

$$L(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1+a\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in k \right\} \subset L(Gl_3).$$

Ainsi, $\mathrm{Lie}(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in k \right\} \subset gl_3 = M_3(k)$

qui est commutative.

De plus,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^p & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a'\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b'\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^p & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1+a'\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^p b' \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et donc le noyau de $\mathrm{Ad} : G \to GL_{\mathrm{Lie}(G)}$ $= \{A(a,b),\ a^p = 1\}$, i.e.

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Spec}\left(\frac{\mathcal{O}(G)}{X^p - 1}\right) = \mathrm{Spec}\left(\frac{k[X,Y]}{X^p - 1}\right) \text{ non réduit}$$

Donc Ad n'est pas lisse.

⑤ Structure de p-application, p-algèbre de Lie, algèbre enveloppante restreinte.

Dans cette section, nous allons rajouter une structure à nos algèbres de Lie, structure provenant de la caractéristique de notre corps. On suppose ici $\mathrm{car}(k) = p > 0$.

Déf: ① Une <u>p-algèbre de Lie</u> est une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur k munie d'une <u>p-application</u> : $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $x \mapsto x^{[p]}$ telle que :

1) $\forall x \in g$, $ad(x^{[p]}) = ad(x)^p$ (composée p-fois) (où $ad : g \to End(g)$
$x \mapsto (y \mapsto [x,y])$)

2) $\forall \lambda \in k$, $\forall x \in g$, $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^p$

3) $\forall x, y \in g$, $[x+y]^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{0<n<p-1} s_n(x,y)$

où $s_n(x,y) = -\frac{1}{n} \sum_u ad_{u(1)} \circ \dots \circ ad_{u(p-1)}(y)$ où u parcourt

les applications $[1, p-1] \to \{x, y\}$ prenant n fois la valeur x.

② Un morphisme de p-algèbre de Lie est un morphisme f d'algèbre de Lie tel que $\forall x \in g$, $f(x^{[p]}) = f(x)^{[p]}$.

Ex: Soit A une algèbre associative sur k. Alors, A est une p-algèbre de Lie munie du crochet $\langle x, y \rangle = xy - yx$ et de la p-application $x \mapsto x^p$.

Def: Soit g une algèbre de Lie. On appelle <u>algèbre enveloppante</u> de g l'algèbre associative suivante : $U(g) = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} g^{\otimes n}}{\langle x \otimes y - y \otimes x - [x,y],\ x, y \in g \rangle}$

Ainsi, $i : g \hookrightarrow U(g)$ est un morphisme d'algèbres de Lie où $U(g)$ est muni du crochet défini par $\langle x, y \rangle = x \otimes y - y \otimes x$.

Prop: L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie possède cette ppté universelle : $\forall g \to A$ morphisme d'algèbre de Lie où A est une algèbre associative, on a ce diagramme :

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & A \\ U(g) \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \Phi"'] & \end{tikzcd} \quad , \Phi \circ i = f.$$

Ex: Considérons k muni du crochet nul. Alors $U(k) = \dfrac{\sum_{n \geq 0} k^{\otimes n}}{x \otimes y - y \otimes x}$
$= k[T]$.

Déf°: Soit g une p-algèbre de Lie. On définit l'algèbre enveloppante restreinte de g :

$$\mathcal{U}^{[p]}(g) = \frac{\mathcal{U}(g)}{(c(x)^p - c(x^{[p]}))}$$

où $c : g \to \mathcal{U}(g)$ est l'application canonique et $x \mapsto x^{[p]}$ est la p-application de g.

On munit $\mathcal{U}^{[p]}(g)$ de la p-application $x \mapsto x^p$. Alors,

$j := g \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{U}(g) \to \mathcal{U}^{[p]}(g)$ est un morphisme de p-algèbres de Lie. De plus, on a la PU suivante :

Prop: Pour tout morphisme de p-algèbres de Lie $g \xrightarrow{f} A$ où A est associative et $[\cdot]^{[p]_A} : x \mapsto x^p$, Alors :

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & A \\ \mathcal{U}^{[p]}(g) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \quad \exists!\, \bar{f}, \quad \bar{f} \circ j = f.$$

i.e. $\mathrm{Hom}_{p\text{-Lie}}(g, A) \simeq \mathrm{Hom}_{p\text{-Lie}}(\mathcal{U}^{[p]}(g), A)$.

$$\alpha \circ j \longleftarrow\!\!\!\shortmid \ \alpha$$