2. Démonstration dans le cas G affine et N distingué

Nous allons démontrer une version un peu affaiblie :

<u>th</u> Soit G un k-gr. alg affine et $N \triangleleft G$ distingué.
Il existe un k-gr alg <u>affine</u> Q $(= G/N)$ et un morphisme de gr. alg. $\pi : G \to Q$ tel que :

(1) π est fidèlement plat

(2) $\ker(\pi) = N$

(3) π vérifie la propriété universelle :

$N \subset \ker\varphi$
$\Updownarrow$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\forall \varphi\ N\text{-invariant}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & Q \arrow[ur, dotted, "\exists !"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>

<u>Etape 1</u> : on trouve une représentation $G \to GL(V)$ de noyau N.
D'après le th de Chevalley (exposé d'Alice et Matilde), il existe une représentation $G \to GL(W)$ telle que N est le stabilisateur d'une droite $L \subset W$.
Supposons que N agit <u>trivialement</u> sur L. (*)

<u>Lm</u> La représentation des N-pts fixes $V = W^N$ est une sous-représentation bien définie $\boxtimes$

Comme N est normal dans G, V est bien G-stable.

---

* Ce corollaire dit que le plongement de Yoneda
$h : (Sch/S) \to \mathrm{Fonct}((Sch/S)^\circ, Ens)$, $X \mapsto$ son foncteur de points, se factorise par la catégorie $\tilde{\mathcal{S}}_{fppf}$ des faisceaux fppf $/S$.
C'est une contrainte forte sur un foncteur
$F : (Sch/S)^\circ \to$ Ens ou Grp pour être représentable.

Je dis que le noyau $K = \ker(G \to GL(V))$ égale N.

En effet :

- $N \subset K$ par déf de $V = W^N$
- $K \subset N$ car si $g \in G$ agit trivialement sur V^N, du fait que $L \subset V^N$ (hypothèse (✲)) on tire que g stabilise L donc $g \in \mathrm{Stab}(L) = N$

Si N n'agit pas trivialement sur L, on peut se ramener à ce cas en remplaçant V par $V \otimes L^d$ pour un certain $d \in \mathbb{Z}$ (admis)

<u>Etape 2</u> On construit $\pi : G \to Q$. Pour cela on utilise un th. de factorisation épi-mono :

<u>Th</u> Soit $G \to H$ un morphisme de k-gr. alg. affines, alors il se factorise en $G \to \mathbf{Q} \hookrightarrow H$ avec $\mathbf{Q}$: k-gr alg affine, $G \to \mathbf{Q}$ fidèlement plat, $\mathbf{Q} \hookrightarrow H$ imm fermée

On repousse la dém de ce théorème à la fin.

En l'appliquant à $G \to GL(V) = H$ de l'étape 1 on trouve $G \to \mathbf{Q} \hookrightarrow H$ dont le noyau est N (puisque $\mathbf{Q} \hookrightarrow H$ mono).

<u>Etape 3</u> : On démontre maintenant la propriété universelle.

On pose $Q = \mathrm{spec}\, R$, $G = \mathrm{spec}\, R'$. On a un iso :

$$N \times G \underset{(g_2 g_1^{-1},\, g_2) \leftarrow\!\shortmid (g_1, g_2)}{\overset{(n,g) \mapsto (g,\, ng)}{\rightleftarrows}} G \times_Q G \quad = \mathrm{spec}(R' \otimes_R R')$$

Si un morphisme $\varphi : G \to H$ est N-invariant, on a

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(R' \otimes_R R') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & \mathrm{Spec}(R') \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Spec}(R) \arrow[d, equal] \\
N \times G = G \times_Q G \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G \arrow[r] \arrow[dr] & Q \arrow[d, dashed, "\exists !"] \\
 & & H
\end{tikzcd}$$

d'où l'existence de $Q \dashrightarrow H$ par le fait que H est un faisceau fppf, voir le Cor. en page 5 $\boxtimes$.

Il reste à démontrer le th de factorisation de l'étape 2. Notons $G = \mathrm{spec}\, B$, $H = \mathrm{spec}\, A$, alors cette factorisation n'est autre que celle induite par

$$A \twoheadrightarrow A/I \hookrightarrow B$$

où $I = \ker(A \to B)$ est un <u>idéal de Hopf</u>

$$\left|\begin{array}{ll}
\varepsilon(I) = 0 & \varepsilon : \text{counité} \\
S(I) \subset I & S : \text{antipode} \\
\Delta(I) \subset I \otimes A + A \otimes I & \Delta : \text{comultiplication}
\end{array}\right.$$

ce qui garantit que A/I est une k-alg de Hopf.
On pose $Q = \mathrm{Spec}(A/I)$ et il reste à montrer que $G \to Q$ est fidèlement plat. Ceci sera conséquence de platitude générique et homogénéité.
Pour simplifier nous le démontrons sous l'hypothèse que G est <u>lisse et connexe</u>, donc $B \otimes_k \bar{k}$ intègre.
Pour montrer $G \to Q$ fidèlement plat il suffit

de montrer $G_{\bar{k}} \to Q_{\bar{k}}$ fidèlement plat, donc OPS k algébriquement clos.

<u>Lm</u> élémentaire si Q est un k-gr. alg. irréductible, avec $k = \bar{k}$, alors tout ouvert <u>non vide</u> $W \subset Q$ engendre Q [en fait ~~[illegible]~~ $W \cdot W = Q$]

Dém : soit $x \in Q$, alors xW^{-1} ouvert non vide donc rencontre W (dans Q irréductible, tout ouvert non vide est dense!). Soit $w \in xW^{-1} \cap W$, $w = x(w')^{-1}$ donc $x = ww'$ ☒

Les théorèmes nécessaires de géométrie algébrique (en fait plutôt d'algèbre commutative) sont :

<u>Constructibilité de l'image</u> (Chevalley) un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de k-schémas affines de type fini qui est <u>dominant</u> (i.e. $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ injectif) a une image $f(X)$ qui contient un ouvert $V \subset Y$.

<u>Platitude</u> <u>générique</u> (Grothendieck) si de plus Y est réduit alors il existe un (sous-)ouvert W (de V) tel que $f|_{f^{-1}(W)} : f^{-1}(W) \to W$ est <u>plat</u>.

Appliquant ces résultats à $G \to Q$, on voit qu'il est plat au-dessus d'un ouvert $W \subset Q$. Par homogénéité, c'est-à-dire par le lemme élémentaire ci-dessus, $G \to Q$ est plat au-dessus de tout point de Q donc plat partout ☒

3. Exemple : PGL_2 et PSL_2

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie n.

Lm 1) Le centre du k-groupe algébrique $GL(V)$ est le sous-groupe des homothéties, $Z \simeq \mathbb{G}_m$

2) Le centre de $SL(V)$ est $SL(V) \cap Z(GL(V)) \simeq \mu_n$, le sous-groupe des homothéties.

Dém choisir une base de V puis, pour toute k-algèbre R, faire un calcul matriciel explicite dans $GL_n(R)$ ou $SL_n(R)$ $\boxtimes$

Cor L'inclusion $SL(V) \hookrightarrow GL(V)$ induit un isomorphisme $PSL(V) \xrightarrow{\sim} PGL(V)$ entre les quotients centraux.

Dém montrer que cette flèche est un mono et un épi $\boxtimes$

Pour réaliser PGL et PSL comme des groupes affines, la stratégie de Chevalley est de trouver une représentation dans laquelle le centre agit trivialement. On en connaît une : la rep. dans $End(V)$:

$$g \cdot f = g f g^{-1} \quad \text{pour } f \in End(V), g \in GL(V).$$

Pour rendre ceci concret regardons le cas $n=2$, et $V = k^2$.

La représentation $End(V) = Mat_2(k)$ a pour base $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un point de GL_2. On a $M^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et (où $\delta = ad - bc$)

$$M E_{11} M^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} ad & -ab \\ cd & -bc \end{pmatrix}$$

$$M E_{12} M^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}$$

$$M E_{21} M^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{pmatrix}$$

$$M E_{22} M^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} -bc & ab \\ -cd & ad \end{pmatrix}$$

On déduit que la rep. est $GL_2 \longrightarrow GL_4$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} ad & -ac & bd & -bc \\ -ab & a^2 & -b^2 & ab \\ cd & -c^2 & d^2 & -cd \\ -bc & ac & -bd & ad \end{pmatrix}$$

ici

Les relations quadratiques « évidentes » entre les coefs de la matrice image vont fournir des générateurs de l'idéal qui définit l'image PGL_2 comme sous-groupe fermé de GL_4.

On observe que les coord. situées dans la zone encadrée orange sont des recopies de certaines autres coord : $\varepsilon_{24} = -\varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{34} = -\varepsilon_{31}$, etc

On se concentre donc sur les autres coord :
$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & \\ H & I & J & \\ & & & \end{pmatrix}$$

on trouve les relations :

$$\begin{cases} AB = -FH \\ AC = EJ \\ AD = EH = BC \\ AE = -CF \\ AG = CE \\ AH = -BJ \\ AI = BH \end{cases} \qquad \begin{cases} BD = EI \\ BE = -DF \\ BG = DE \end{cases} \qquad \begin{cases} CD = GH \\ CH = DJ \\ CI = DH \end{cases} \qquad \{ FG = -E^2 \qquad \begin{cases} GI = D^2 \\ GJ = C^2 \\ IJ = H^2 \end{cases}$$

+ 6 relations orange

$\Rightarrow$ 24 relations.

Montrons maintenant que $SL_2(\mathbb{Q}) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{Q})$ n'est pas surjectif.

Si on voit PSL_2 comme un quotient on est amené à raisonner comme suit. Considérons un entier d sans facteur carré, et la matrice
$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{d} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{d} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Q}(\sqrt{d})).$$

C'est un $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-point : $\quad \operatorname{spec} \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \longrightarrow SL_2$.

Or $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est ext. galoisienne de $\mathbb{Q}$ de degré 2, c'est-à-dire que $\mathbb{Q}(\sqrt{d})^{\Gamma} = \mathbb{Q}$ (sous-corps des invariants sous $\underset{\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\Gamma = Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q})}$).

Ceci exprime qu'on a un quotient :

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}(\sqrt{d}))/_{\Gamma} \simeq \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}.$$

Or la matrice M a pour conjuguée sous l'élément $\sigma \neq 1$, $\sigma \in \Gamma$ la matrice $M^\sigma = \begin{pmatrix} -\sqrt{d} & \\ 0 & -1/\sqrt{d} \end{pmatrix} = -M$ donc son image dans PSL_2 est égale à celle de M. En d'autres termes le morphisme

$\mathrm{spec}\,\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \to SL_2 \to PSL_2$ est Γ-invariant et induit donc un $\mathbb{Q}$-point :

$$\begin{tikzcd} SL_2 \arrow[rr, "\pi"] & & PSL_2 \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \arrow[u, "M"] \arrow[r] & \mathrm{spec}\,\mathbb{Q}(\sqrt{d})/_{\Gamma} = \mathrm{spec}\,\mathbb{Q} \arrow[ur, dashed, "\bar{M}"'] & \end{tikzcd}$$

Ce $\mathbb{Q}$-point ne se relève pas en un $\mathbb{Q}$-point de SL_2, car les seuls relevés, les éléments de $\pi^{-1}(\bar{M})$, sont M et $M^\sigma = -M$ qui ne sont pas $\mathbb{Q}$-rationnels.

Si on voit PSL_2 comme un sous-groupe de GL_4 on est amené à regarder directement l'image de $M = \begin{pmatrix} \sqrt{d} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{d} \end{pmatrix}$ par l'application $GL_2 \to GL_4$ décrite ci-dessus, on trouve la matrice image $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & d & & \\ & & d & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien $\mathbb{Q}$-rationnelle.

Mais en général cette méthode n'est pas vraiment accessible, lorsqu'on manipule un groupe quotient G/N pour lequel une représentation suffisamment explicite pour plonger $G/N \hookrightarrow GL(V)$ n'est pas accessible (comme c'est souvent le cas).