Quotients de groupes algébriques

mar. 6 avril 2021
Matthieu

Plan 1. Enoncé du théorème
2. Démonstration dans le cas G affine, N distingué

Réf Milne, chap 5 § a, b, c et Appendice B.

1. Enoncé du théorème

1.1 Soient G, H des $\underbrace{\text{k-sch en groupes de type fini}}_{:= \text{ k-groupes algébriques}}$ (k : un corps) avec $H \subset G$. On se demande s'il existe un k-schéma quotient G/H vérifiant les propriétés habituelles de la théorie des groupes :

1 (Prop universelle)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\forall f \text{ H-invariant}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \\ & G/H \arrow[ur, dotted, "\exists !"'] & \end{tikzcd}$$

2 (str. de groupe) si $H \lhd G$ distingué, G/H est un k-groupe et $\pi : G \to G/H$ un morphisme de groupes

3 (th. d'isomorphisme) si $N \subset H \subset G$: $G/H \xrightarrow{\sim} {G/N}/{H/N}$
(cf Milne, 5.a) etc.

1.2. Sur les exemples simples et familiers on sait faire :

$\boxed{\text{en car. } 0}$ la suite exacte de Kummer

$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \to 0$$

dit que $\mathbb{G}_m / \mu_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m$

lorsque $k=\bar{k}$ c'est juste (sur les k-points)

$$0 \to \mu_n(k) \to k^\times \xrightarrow{n} k^\times \to 0.$$

Autre exemple :

$\boxed{\text{en car } p>0}$ la suite exacte d'Artin-Schreier

$$0 \to \underset{\substack{\parallel \\ \mathrm{Spec}\,\frac{k[X]}{X^p - X}}}{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k} \to \mathbb{G}_a \xrightarrow{x \mapsto x^p - x} \mathbb{G}_a \to 0$$

dit que $\mathbb{G}_a / \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{G}_a$. lorsque $k=\bar{k}$ c'est juste :

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to (k,+) \xrightarrow{x \mapsto x^p - x} (k,+) \to 0.$$

1.3. Mais si k n'est pas alg clos, la surjectivité sur les k-points est une question délicate. Par ex si $k=\mathbb{Q}$ alors $\mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m$ n'est pas surjectif sur les k-points :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) \arrow[d] \arrow[ddl, dotted] \\
 & \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q} \arrow[d, "x=2"] \\
\mathbb{G}_m \arrow[r, "n"] & \mathbb{G}_m
\end{tikzcd}$$

surjectif quitte à passer à une extension du corps de rationalité (= corps de définition) du point considéré.

Tiens : ça ressemble à la surjectivité au sens des faisceaux

«Rappel» Lm si X est un espace topologique et $\varphi : F \to G$ un morphisme de faisceaux sur X, LCSSE :

(1) φ est un épi de faisceaux

(2) $\varphi_x : F_x \to G_x$ est surjectif, $\forall x \in X$

(3) $\forall x \in X$, $\forall U$ voisinage de x, $\forall b \in G(U)$, il existe $\underset{\text{vois de } x}{U' \subset U}$ et $a \in F(U')$ tq $\varphi(a) = b_{|U'}$.

un mor. de faisceaux "surjectif" est un morphisme <u>localement</u> surjectif i.e. on a surjection quitte à raffiner un peu l'ouvert U.

L'utilisation du lemme de Yoneda est agréable pour représenter la situation par un diagramme : les faisceaux sont des foncteurs $\mathrm{Ouv}(X)^\circ \to \mathrm{Ens}$, tout ouvert $U \subset X$ définit un foncteur (son foncteur de points) :

$$U(V) = \mathrm{Hom}(V, U) = \begin{cases} i : V \hookrightarrow U & \text{si } V \subset U \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

et voici notre dessin :

$$\begin{tikzcd}
 & U' \arrow[dl, dotted, "a"'] \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "b|_{U'}"] \\
 & U \arrow[d, "b"] \\
F \arrow[r] & G
\end{tikzcd}$$

Il reste à voir $\mathbb{G}_m$ comme un faisceau pour une certaine "topologie" dans laquelle $\mathrm{spec}\, \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) \to \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}$ est un "recouvrement"...

1.4. Faisceaux fppf

<u>Déf</u> : Soit $S = \mathrm{spec}(k)$ (S qcq est tout aussi bien).

On appelle <u>faisceau fppf</u> (<u>en groupes</u>) <u>sur S</u> un foncteur $F : (\mathrm{Sch}/S)^\circ \to \mathrm{Ens}$ (resp. $(\mathrm{Sch}/S)^\circ \to \mathrm{Grp}$) tel que :

pour tout S-schéma U ["ouvert de la top. fppf sur S"]

pour toute famille $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ telle que

$U_i \to U$ est plat, de prés. finie et $\coprod_{i \in I} U_i \to U$ surjectif

["recouvrement de la top. fppf sur S"]

rappeler la déf ?

la suite $F(U) \to \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{ij} F(U_i \times_U U_j)$

est exacte.

Rem : 1 – rappel de ce qu'exactitude signifie ici

2 – dans la situation topologique classique d'ouverts sur un esp. top. X, on a $U_i \times_U U_j = U_i \cap U_j$. Pour la topologie fppf les $U_i \to U$ ne sont pas nécess. des monomorphismes et $U_i \times_U U_j$ (produit fibré) est le bon substitut à $U_i \cap U_j$.

3 – en recouvrant U et les U_i par des schémas affines, on ramène la vérification de la propriété de faisceau à deux cas élémentaires :

[sommes disjointes] si $U = \coprod_{i \in I} U_i$: $F(U) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} F(U_i)$

[schémas affines, recouvrement à un seul ouvert] $U = \mathrm{Spec}\, R$ $U' = \mathrm{Spec}\, R'$ avec $R \to R'$ fppf.

$$F(R) \to F(R') \rightrightarrows F(R' \otimes_R R')$$

(on note $F(R)$ au lieu de $F(\mathrm{Spec}\, R)$).

Le truc clé sur lequel repose la théorie c'est :

Lm si $R \to R'$ est fidèlement plat, ~~plo~~ la suite

$$R \longrightarrow R' \underset{x \mapsto 1 \otimes x}{\overset{x \mapsto x \otimes 1}{\rightrightarrows}} R' \otimes_R R'$$

est exacte.

Dém ce n'est pas très difficile mais on se contente d'un cas simple, mais assez représentatif au sens où il est très différent du cas topologique classique.

Précisément prenons $R' = R[t]$
correspondant au recouvrement fppf $U' = \mathbb{A}^1_U \to U$.
La suite de l'énoncé est $R \to R[t] \overset{t \mapsto x}{\underset{t \mapsto y}{\rightrightarrows}} R[x,y]$

et tout revient essentiellement à voir que si $P = P(t)$
vérifie $P(x) = P(y)$ alors P est constant $\boxtimes$
(x, y indéterminées distincts)

<u>Cor</u> : (Le foncteur de points de) tout S-schéma est un faisceau fppf. (= théorie de la descente fppf, Grothendieck)

<u>Dém</u> dans le cas affine $X = \operatorname{spec}(A)$, pour un recouvrement $\{\operatorname{spec} R' \to \operatorname{spec} R\}$ il faut voir :

* oubli voir page 6

$$\begin{array}{ccccc} X(R) & & X(R') & & X(R' \otimes R') \\ \| & & \| & & \| \\ \operatorname{Hom}(A, R) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(A, R') & \rightrightarrows & \operatorname{Hom}(A, R' \underset{R}{\otimes} R') \end{array}$$ <u>exacte</u>

et ceci résulte directement du Lemme $\boxtimes$.

<u>Th</u> Soient G un k-groupe algébrique
H un k-sous groupe algébrique
(i.e. un monomorphisme $i : H \hookrightarrow G$ au sens $\ker i = 1$).
Alors le faisceau fppf quotient G/H est représentable par un k-schéma de type fini. De plus :
1. Le morphisme $G \to G/H$ est fidèlement plat (et pf)
2. si $H \triangleleft G$ distingué, $G \to G/H$ est un mor. de groupes
3. Le morphisme $H \times G \longrightarrow G \underset{G/H}{\times} G$ est un <u>iso</u>.
$(h, x) \mapsto (x, hx)$

<u>Rem</u> : On sait que si G/H est représentable par un schéma, ce <u>doit</u> être un faisceau...