1

Exposé 29/03 Représentations linéaires de groupes algébriques.

Dans cet exposé, k désigne un corps quelconque et V un k-espace vectoriel.

1) L'algèbre symétrique d'un espace vectoriel; foncteur $\mathbb{V}_a$

Déf°: Soit V un k ev. On définit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_a : \{k\text{-algèbre}\} &\longrightarrow \text{Ens} \\ R &\longmapsto V \otimes_k R \end{aligned}$$

N.B: On peut voir $V \otimes_k R$ comme une R-algèbre : $\begin{aligned} R \times V\otimes R &\longrightarrow V \otimes R \\ (\lambda, v\otimes\mu) &\longmapsto v \otimes \lambda\mu \end{aligned}$

Déf°: On note $\mathrm{Sym}(V)$ l'algèbre symétrique de V, définie par :

$$\mathrm{Sym}(V) = \frac{T(V)}{\langle u\otimes v - v\otimes u,\ u,v \in V\rangle}$$

où • $T(V)$ est l'algèbre tensorielle de V, définie par :

$$T(V) = k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots$$

• $\langle u\otimes v - v\otimes u, u,v \in V\rangle$ désigne l'idéal de $T(V)$ engendré par les $u\otimes v - v\otimes u$.

C'est une algèbre graduée, associative et commutative.

En effet, on pose : $\underbrace{(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)}_{\in V^{\otimes n}} \cdot \underbrace{(w_1\otimes\cdots\otimes w_m)}_{\in V^{\otimes m}} = \underbrace{v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_m}_{\in V^{\otimes n+m}}$

et $x = x_0 + x_1 + \cdots$ et $y = y_0 + y_1 + \cdots$

Alors $x \cdot y = \sum_{n,m} x_n \otimes y_m$.

Prop°: Soit A une k-algèbre et $f : V \to A$ k-linéaire. Alors, il existe un unique $F : \mathrm{Sym}(V) \to A$ morphisme de k-algèbre tel que :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & A \\ \mathrm{Sym}(V) \arrow[ur, "\exists! F"'] & \end{tikzcd}$$

i.e $\mathrm{Hom}_{k\text{-lin}}(V, A) \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathrm{Sym}(V), A)$

* Supposons V est de dimension finie. Soit $V^* = \mathrm{Hom}_{k\text{-lin}}(V, k)$.

Alors $\quad V \otimes R \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-lin}}(V^*, R)$

$\quad v \otimes \lambda \longmapsto (\ell : V \to k) \mapsto \ell(v) \cdot \lambda$.

(INJ : Soit $v \otimes \lambda \in V \otimes R$ tq $\forall \ell : V \to k, \ell(v) \cdot \lambda = 0$. Si $v \neq 0$, Soit v_i ~~une~~ une coordonnée non nulle. Prendre $\ell = e_i^*$ $\square$)

Donc $\quad V \otimes R \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-lin}}(V^*, R)$

$\simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathrm{Sym}(V^*, R))$

Ainsi, $\mathbb{V}_a$ est représentable par le schéma $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(V^*))$, que l'on note également $\mathbb{V}_a$.

C'est un schéma en groupe car on peut munir $\mathrm{Sym}(V^*)$ d'une co-multiplication :

$$\Delta : \mathrm{Sym}(V^*) \to \mathrm{Sym}(V^*) \otimes \mathrm{Sym}(V^*)$$
$$x \longmapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V et $\{f_1, \dots, f_n\}$ ~~une~~ sa base duale pour V^*.

Alors, $\mathrm{Sym}(V^*) \simeq k[X_1, \dots, X_n]$

$f_i \longmapsto X_i$.

On a donc un isomorphisme de schéma en groupes

$$\mathbb{G}_a^n \simeq \mathbb{V}_a.$$

② Représentations et comodules

Dans cette partie et pour le reste de l'exposé, on suppose que G est un groupe algébrique <u>affine</u>. On va voir qu'on ne perd pas en généralité grâce à l'existence de l'affinisation d'un schéma :

$$\forall\, Y = \text{affine} \quad : \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\forall f} & Y \\ \downarrow & \nearrow_{\exists!\, \tilde{f}} & \\ G^{aff} & & \\ \shortparallel & & \\ \operatorname{Spec}(\mathcal{O}(G)) & & \end{array}$$

Def° : On note GL_V le foncteur :

$$\begin{aligned} \{k\text{-algèbres}\} &\longrightarrow \{\text{grpes}\} \\ R &\longmapsto \operatorname{Aut}_{R\text{-lin}}(V \otimes R) \end{aligned}$$

<u>Rq</u> : Si V est de dim° finie, GL_V est un groupe algébrique, représentable par $\operatorname{Spec}\left(R\left[X_{1,1}, \dots, X_{n,n}, \frac{1}{\det(X_{ij})_{i,j}}\right]\right)$

car $\operatorname{Aut}_{R\text{-lin}}(V \otimes_k R) \simeq \operatorname{Aut}_{R\text{-lin}}(R^n) \simeq GL_n(R)$

<u>Rq</u> : Si $\dim(V) = +\infty$, on identifie "de la même manière" $\operatorname{Aut}_R(V \otimes R) \longrightarrow GL_V(R)$; $\left(f : e_j \otimes 1 \mapsto \sum_{i \in I} e_i \otimes a_{ij}\right) \mapsto (a_{ij})_{i,j}$

<u>Rq</u> : On identifiera $\operatorname{Hom}_{k\text{-alg}}\left(k\left[X_1, \dots, X_n, \frac{1}{\det(X_{ij})}\right], R\right)$ avec ~~Hom~~ $GL_n(R)$ de cette manière :

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}\left(k\left[X_{i,j}, \frac{1}{\det(X_{ij})}\right], R\right) &\simeq GL_n(R) \\ f &\longmapsto (f(X_{ij}))_{i,j}. \end{aligned}$$

Def° : Une <u>représentation linéaire</u> de G est un morphisme de foncteur groupe : $\rho : G \to GL_V$ (i.e. une T° naturelle de $G \to GL_V$ telle que $\forall R = k\text{-alg}$, $\rho_R : G(R) \to GL_V(R)$ soit un morphisme de groupe).

On dit qu'une représentation linéaire est <u>fidèle</u> si pour toute k-algèbre R, $\rho(R) : G(R) \to \underset{\displaystyle GL_V(R)}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{Aut}_{R\text{-lin}}(V\otimes R)}}$ est injective.

On dit qu'une représentation linéaire est <u>triviale</u> si $\rho(G) = e$, i.e. si $\rho(G(R)) = \{ id_{GL_V(R)} \}$ $\forall R = k$-alg.

Prop : Se donner une R° (V, ρ) de G est la même chose que se donner une <u>action</u> du foncteur G dans V_a, i.e. de se donner $\forall R = k$-alg, une ~~appli~~ action (au sens naïf) de $G(R) \times V_a(R) \to V_a(R)$, où $G(R)$ agit par applications R-lin.

<u>Preuve</u> : Pour toute k-algèbre R, on a :

$$\mathrm{Homgpe}\,(G(R), \mathrm{Aut}_{R\text{-lin}}(V\otimes R)) \simeq \mathrm{Hom}_{R\text{-lin}}(G(R)\times (V\otimes R) \to V\otimes R)$$
$$f \longmapsto (g,v) \mapsto f(g)(v).$$

On a alors $\begin{cases} f(g_1)\cdot(f(g_2)(v)) = f(g_1g_2)(v) \\ f(e_{G(R)}) = id \end{cases}$ $\square$

Def : Dans ce cas, on dit que (V,ρ) est un <u>G-module</u>

Def : On appelle <u>$\mathcal{O}(G)$-comodule</u> la donnée d'un k-ev V et d'une application k-linéaire $\rho : V \to V \otimes \mathcal{O}(G)$ t.q :

$$\begin{cases} (id_V \otimes \Delta)\circ \rho = (\rho \otimes id_{\mathcal{O}(G)})\circ \rho & (1) \\ (id_V \otimes \varepsilon)\circ\rho = id_V & (2) \end{cases}$$

(1)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & V\otimes_k \mathcal{O}(G) \arrow[d, "(\rho\otimes id_{\mathcal{O}(G)})"] \\ V\otimes_k \mathcal{O}(G) \arrow[r, "id_V\otimes\Delta"'] & V\otimes_k \mathcal{O}(G)\otimes_k \mathcal{O}(G) \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, no head] & V\otimes_k \mathcal{O}(G) \arrow[d, "id_V\otimes\varepsilon"] \\ & V\otimes_k k \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\rho : V \to V \otimes \mathcal{O}(G)$ est appelé co-action ⑤

Rappel : On a identifié $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(GL_V), R) \simeq GL_V(R)$

$$\mathcal{L} \longmapsto (\mathcal{L}(x_{ij}))_{i,j}$$

Regardons sur quoi sont envoyés les morphismes avec cette identification : Soit $R \xrightarrow{g} R'$.

$$\begin{array}{ccc} GL_V(g) : \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(GL_V), R) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(GL_V), R') \\ \mathcal{L} & \longmapsto & g \circ \mathcal{L}. \\ \| & & \| \\ GL_V(R) & \longrightarrow & GL_V(R') \\ (a_{ij})_{i,j} & \longmapsto & (g(a_{ij}))_{i,j} \end{array}$$

Car : $\begin{array}{ccc} (a_{ij}) \\ \shortparallel \\ (\mathcal{L}(x_{ij}))_{i,j} & \longmapsto & (g \circ \mathcal{L}(x_{ij}))_{i,j} \\ & & \shortparallel \\ & & (g(a_{ij}))_{i,j}. \end{array}$

Prop : Il y a une $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ correspondance entre les représentations $r : G \to GL_V$ de G sur V et les structures de $\mathcal{O}(G)$-comodule sur V $\rho : V \to V \otimes \mathcal{O}(G)$.

$$\left\{ \begin{array}{c} R^\circ \text{ de } G = \mathrm{Spec}(A) \text{ sur } V \\ r : G \to GL_V \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A\text{-comodule structure} \\ \text{sur } V \\ \rho : V \to V \otimes A \end{array} \right\}$$

$$r \longmapsto \begin{array}{l} \rho : V \longrightarrow V \otimes A \\ v \longmapsto r_A(\mathrm{id}_A)(v \otimes 1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} r_R : G(R) \to \mathrm{Aut}(V \otimes R) \\ \quad g \mapsto \left(e_j' \mapsto \sum_{i \in I} e_i \otimes g(a_{ij})\right) \\ \quad \forall\, R = k\text{-alg}. \end{array} \right) \longleftarrow \begin{array}{l} \rho : e_j' \mapsto \sum_{i \in I} e_i \otimes a_{ij} \\ (\text{où } V = \bigoplus_i e_i k\ ) \end{array}$$

somme finie

Preuve : La bijection provient de l'identification écrite ci-dessus. Regardons alors que ces applications sont bien définies :

$\rho : V \to V \otimes A$ donne une structure de A-comodule
$e_j \mapsto \sum_{i \in I} e_i \otimes a_{ij}$

ssi : $\begin{cases} (\mathrm{id}_V \otimes \Delta) \circ \rho = (\rho \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{O}(G)}) \circ \rho & ① \\ (\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon) \circ \rho = \mathrm{id}_V & ② \end{cases}$

① Appliqué en e_j, on trouve :

$$\sum_{i \in I} e_i \otimes \Delta(a_{ij}) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{l \in I} e_l \otimes a_{li} \right) \otimes a_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta(a_{ij}) = \sum_l a_{il} \otimes a_{lj}$$

et ② donne : $\varepsilon(a_{ij}) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in I$.

De plus, $r_R : G(R) \to \mathrm{Aut}(V \otimes R)$, $g \longmapsto (g(a_{ij}))_{ij}$ est une représentation de $G \Leftrightarrow r_R(g_1 \cdot g_2) = r_R(g_1) \cdot r_R(g_2)$

Multiplication de $G(R)$.

$$\Leftrightarrow \quad r_R(g_1 \cdot g_2) = (g_1 \cdot g_2)(a_{ij}) := g_1 \otimes g_2(\Delta(a_{ij}))$$

$$= \sum_l g_1(a_{il}) \otimes g_2(a_{lj})$$

$$= r_R(g_1) \cdot r_R(g_2)$$

Donc r est une $R^\circ \Leftrightarrow$ part un comodule $\square$.

Ex : On prend $G = GL_n = \mathrm{Spec}\Big(\underbrace{k\big(X_{ij}, \tfrac{1}{\det(X_{ij})}\big]}_{A}\Big)$

Soit $r : G \to GL_{k^n}$ défini par :

$r(R) : G(R) \to GL_n(R)$
$M \longmapsto M$

L'action correspondante est : $\rho : k^n \longrightarrow k^n \otimes \mathcal{O}(G)$
$e_j \longmapsto r_A(\mathrm{id}_A)(e_j \otimes 1)$

Or, $G(A) = GL_n(A) \simeq \mathrm{Hom}(A, A)$
$(X_{ij})_{i,j} \longleftrightarrow \mathrm{id}_A : A \to A$, $X_{ij} \mapsto X_{ij}$.

Donc $\rho : k^n \longrightarrow k^n \otimes A$

$$e_j \longmapsto r_A(\mathrm{id}_A)(e_j)$$
$$= \sum_{1 \leq i \leq n} e_i \otimes X_{ij}$$

Comme $\Delta(X_{ij}) = \sum_{1 \leq \ell \leq n} X_{i\ell} \otimes X_{\ell j}$ et $\varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$, ρ

définit bien une structure de co-module sur k^n.

3 Stabilisateurs

Def : Soit (V, ρ) un $A = \mathcal{O}(G)$-module. Un A-sous-comodule de V est un kev $W \subseteq V$ tel que $\rho(W) \subseteq W \otimes A$.

Ainsi, $(W, \rho_{|W})$ est également un A-comodule.

Prop : Soit $r : G \to GL_V$ une représentation de dim° finie de G.

Soit $W \subseteq V$ un k ev de V. Alors, le foncteur :

$$G_W : \{k\text{-alg}\} \longrightarrow \text{Grps}$$
$$R \longmapsto G_W(R) = \{g \in G(R),\ r_R(g)(W \otimes R) = W \otimes R\}$$

est représentable par un sous-groupe algébrique de G, noté G_W. Il est appelé ~~stabi~~ stabilisateur de W dans V, et est également noté $\mathrm{Stab}_G(W)$.

Preuve : Soit $A = \mathcal{O}(G)$ et $\rho : A \to V \otimes A$ la co-action correspondante à r. Soit $(e_j)_{j \in J}$ une base de W, que l'on complète en une base $(e_i)_{i \in I \sqcup J}$ de V.

Soit e_j un élément de cette base. On peut écrire

$$\rho(e_j) = \sum_{i \in I \sqcup J} e_i \otimes a_{ij} \quad \text{avec } a_{ij} \in A \quad \forall i, j.$$

Soit $g \in G(R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\underset{\overset{\shortparallel}{A}}{\mathcal{O}(G)}, R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, R)$.

Alors, $\rho_R(g)(e_j \otimes 1) = \sum_{i \in I \cup J} e_i \otimes g(a_{ij})$.

Ainsi, $g(W \otimes R) \subset W(R)$ ssi $g(a_{ij}) = 0 \ \forall j \in J, \forall i \in I$.

Or, $G_W(R) = \{ g : A \to R,\ g(a_{ij}) = 0, \forall i \in I, \forall j \in J \}$

$$= \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}\left(A / (a_{ij}), R \right)$$

Donc $G_W = \mathrm{Spec}\left(A / (a_{ij}) \right)$ est bien un sous-groupe de G

□.

Déf°: On dit qu'un sous-gpe $H \subseteq G$ stabilise un sous-espace $W \subseteq V$ s'il est contenu dans le stabilisateur, i.e. si $\forall R$, $H(R) \subseteq G_W(R)$.

④ Toute représentation est union de sous-représentations finies

⚠ def sous-comodule.

Prop°: Tout A-comodule (V, ρ) est union filtrée de ses sous-comodules de dimension finie.

Proof: Comme $(V_1 \oplus V_2) \otimes A \cong V_1 \otimes A \oplus V_2 \otimes A$, on peut voir qu'une somme finie de sous-comodules de dim° finie reste de dim° finie (et est toujours un sous-A-comodule). Ainsi on a

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \hookrightarrow & \\ & & V_1 \oplus V_2 \\ V_2 & \hookrightarrow & \end{array} \quad (\text{union filtrée})$$

Il suffit alors de montrer que tout élément $v \in V$ est contenu dans un sous-A-comodule de dim° finie.

9

Soit alors $v \in V$.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de A comme k-ev. Soit

$$p(v) = \sum_{i\in I} v_i \otimes e_i \quad \text{avec } v_i \in V \text{ (somme finie).}$$

On écrit $\Delta(e_i) = \sum_{j,k} \lambda_{ijk} (e_j \otimes e_k)$ avec $\lambda_{ijk} \in k$.

Or, $\boxed{(id_V \otimes \Delta) \circ p = (p \otimes id_{\cancel{A}}) \circ p}$

Appliquons cette égalité à v. On trouve :

$$\sum_{i\in I} v_i \otimes \sum_{j,k} \lambda_{ijk}\, e_j \otimes e_k = \sum_{i\in I} (p(v_i) \otimes e_i)$$

$$= \sum_{k\in I} p(v_k) \otimes e_k.$$

En identifiant sur la base $(e_k)_{k\in I}$, on trouve :

$$p(v_k) = \sum_{i,j\in I} \lambda_{ijk}\, v_i \otimes e_j \quad (*)$$

Ainsi, soit $W = \langle v, v_i \,/\, i \in I, v_i \neq 0 \rangle$ est un sous-A-comodule (car $p(v) \subseteq W$ et $p(v_i) \subseteq W$ $\forall i$ d'après $(*)$) qui contient v. Il est de dim finie car $|\{i \in I, v_i \neq 0\}| < +\infty$ □

Coro : Toute $\rho°$ de G est l'union filtrée de ses sous-représentations de dimension finie.

Proof : $W \subseteq V$ stable par $G \iff G_{W,f} = G$
(où $p : V \to V \otimes A$ la représentation de G)
$\iff p(W) \subseteq W \otimes A$
$\iff W = $ sous-A-comodule de V □

Car : Vu preuve de la représentabilité de $G_W = \mathrm{Spec}(A/(a_{ij}))$: $G_W = G \iff a_{ij} = 0$ $\forall i \in I, j \in J$
$\iff p(W) \subseteq W \otimes A$

5 Plongement de groupes algébriques affines dans GL_n.

Déf° : Soit X un schéma et G un schéma en gpe. Une action à dte de G sur X est la donnée d'un morphisme de schémas : $X \times G \to X$ telle que ce soit une action (au sens naïf) sur le foncteur de points.

Ce morphisme induit une application $\rho : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(G)$ qui fait de $\mathcal{O}(X)$ un $\mathcal{O}(G)$-comodule.

Déf° : La représentation de G sur $\mathcal{O}(G)$ qui provient de la multiplication $m : G \times G \to G$ est appelée la <u>représentation régulière</u>. La co-action correspondante est $\Delta : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$.

Prop° : Tout groupe algébrique affine ~~est un sou~~ peut être identifié à un SG fermé de GL_n pour un certain n.

Preuve : Soit $A = \mathcal{O}(G)$ et soit V = un sous-A-co-module de A de dimension finie contenant un ensemble de générateurs de A en tant que k-algèbre. Soit $(e_i)_{1 \le i \le n}$ une base de V.

On écrit $\Delta(e_j) = \sum_{i \in I} e_i \otimes a_{ij}$ avec $a_{ij} \in A$. Soit $\rho : G \to GL_V$ la représentation donnée par : $\Delta : V \to V \otimes A$, $e_j \mapsto \Delta(e_j)$.

Le morphisme correspondant $\mathcal{O}(GL_V) \xrightarrow{f} A$ contient les (a_{ij}) dans son image car : ~~$\mathcal{O}(GL_V) = GL_V / \mathcal{O}(GL_V)$~~ $f(X_{ij}) = a_{ij}$.

~~car $f : \mathcal{O}(GL_V) \to A$ correspond par Yoneda à $(\mathrm{Hom}(A, R) \to \mathrm{Hom}(GL_V, \forall R$ k-algs$)$~~

par ~~$g \longmapsto f \circ g$~~

On a : $r : G \to GL_V$ donnée on le foncteur de points par : $r_R : G(R) \to GL_V(R)$

$$\begin{array}{ccc} G(R) & \xrightarrow{r_R} & GL_V(R) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ Hom(A,R) & & Hom(\mathcal{O}(GL_V), R) \\ g & \longmapsto & g((a_{ij}))_{ij} \end{array} \qquad (\ell(x_{ij}))_{ij} \longleftarrow \ell$$

où $r \leftrightarrow \rho : e_j \mapsto \sum_{i \in I} e_i \otimes a_{ij}$

Par Yoneda, la collection les morphismes r_R correspond à un unique morphisme de schéma : $r : G \to GL_V$, qui correspond à un unique morphisme d'algèbre $\phi : \mathcal{O}(GL_V) \to A$.

La correspondance est donnée par :

$$Hom(\mathcal{O}(GL_V), A) \simeq \{Hom(Hom(A,R), Hom(\mathcal{O}(GL_V),R)), \forall R\}$$

$$f \longmapsto \{\ell \mapsto \ell \circ f, \ \ell \in Hom(A,R)\}$$

Soit $f : \mathcal{O}(GL_V) \to A$, $x_{ij} \mapsto a_{ij}$. ce f correspond à :

$$\{\ell \mapsto \ell \circ f, \ \ell \in Hom(A,R)\}$$

$$\{g \mapsto g(a_{ij})_{i,j}, \ g \in Hom(A,R)\}$$

Donc OK.

De plus, comme $\varepsilon : A \to k$ est la co-identité, on a :

$$e_j = (\varepsilon \otimes id_A)\Delta(e_j) = \sum_i \varepsilon(e_i) a_{ij}$$ et donc

l'image contient les e_j, et donc V, et donc est égale à A.

Ainsi, $\mathcal{O}(GL_V) \twoheadrightarrow A$ et $G \hookrightarrow GL_V$ est une immersion fermée. En fixant une base de V, on a ce que l'on veut. $\square$

6 Théorème de Chevalley.

~~Ex : G =~~

Théo (Chevalley) Soit G un k-groupe affine algébrique. Tout sous-groupe algébrique H de G est le stabilisateur d'un sev L de dim 1 d'une $R°$ finie (V,ρ) de G.

Preuve : Soit $\mathcal{O}(G) \xrightarrow{f} \mathcal{O}(H)$ le morphisme d'algèbre de Hopf correspondant à $H \to G$. On note $K = \mathrm{Ker}(f)$.

Il existe V un sous-A-comodule de dim finie qui contient des générateurs de K en tant qu'idéal.

On note $W := K \cap V$.

On fixe $(e_j)_{j\in J}$ une base de W. On l'étend en une base $(e_i)_{i\in I \sqcup J}$ une base de V.

On écrit $\Delta(e_j) = \sum_{i\in I\sqcup J} e_i \otimes a_{ij}$.

On a $\mathcal{O}(G_W) = A/K'$ où K' est engendré par les a_{ij} avec $i\in I$ et $j \in J$. Mq $K' = K$.

On sait que f est un morphisme d'algèbre de Hopf.

Ainsi, $\begin{cases} \Delta(K) \subseteq K\otimes A + A\otimes K \\ \varepsilon(K) = 0 \end{cases}$

Soit alors e_j avec $j \in J$.

$$\Delta(e_j) = \sum_{i \in I \sqcup J} e_i \otimes a_{ij} \in A \otimes K + K \otimes A.$$

Mais si $i \in I$, $e_i \notin W \Rightarrow e_i \notin K$.

Alors, $a_{ij} \in K \Rightarrow K' \subset K$. Montrons l'inclusion inverse. $e_j = (\varepsilon, id)\Delta(e_j) = \sum_{i \in I \cup J} \varepsilon(e_i) a_{ij}$

$$= \sum_{i \in I} \varepsilon(e_i) a_{ij}$$

Les e_j $j \in J$ sont alors combinaisons linéaire des a_{ij}, $i \in I$ et $j \in J$. Ainsi $K = K'$.

Donc $H = G_W$.

Il reste à montrer que on peut remplacer W, en changeant n par un ev de dim° 1. Ça découle de :

Lemme: Soit W un sev de dim° d dans V.

Soit $D := \underbrace{\Lambda^d W}_{\text{dim° } 1} \subset \Lambda^d V$

Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}(V \otimes R)$. On peut alors définir

$$\Lambda^d \alpha \in \mathrm{Aut}(\Lambda^d V \otimes R) : \Lambda^d \alpha(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) = \alpha(v_1) \wedge \dots \alpha(v_d)$$

Alors α stabilise $W \otimes R \Leftrightarrow \Lambda^d \alpha$ stabilise D.

(Donc $G_W = G_D$).

Proof: Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de W et $(e_1, \dots, e_n)$ base de V.

$w := e_1 \wedge \dots \wedge e_d$. Alors $\Lambda^d W = k \cdot w$.

Alors $W_R = \{ v \in V_R,\ w \wedge v = 0 \in \Lambda^{d+1} V \}$

car $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ $\quad w \wedge v = \sum_{i=d+1}^n a_i e_i = 0$ ssi $a_{d+1} = 0 = \dots = a_n = 0$

$\Rightarrow)$ Si α stabilise W alors $\Lambda^d \alpha$ stabilise D.

Car : $(\Lambda^d \alpha)(w) = \underset{W\otimes R}{\alpha(e_1)} \wedge \dots \wedge \underset{W\otimes R}{\alpha(e_d)} \in D \otimes R$

$\Leftarrow)$ On suppose que $\Lambda^d(\alpha)(w) = \lambda w$ avec $\lambda \in R^\times$.

Soit $v \in W_R \Rightarrow w \wedge v = 0$

$$= \Lambda^{d+1}\alpha(w \wedge v)$$

$$= (\Lambda^d \alpha)(w) \wedge \alpha(v)$$

$$= \lambda w \wedge \alpha(v)$$

$$\Rightarrow w \wedge \alpha(v) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(v) \in W \otimes R \qquad \square$$