Groupe de travail Schémas en groupes sur un corps.

Schémas de type fini sur un corps

Séance no 2
Lundi 22 mars
Matthieu

1. Préliminaires

1.1. Points fermés

1.2. Produits tensoriels de corps

2. Schémas géométriquement connexes

3. Schémas géométriquement réduits

1. Préliminaires

1.1. Points fermés des k-schémas de type fini

Réf : Görtz & Wedhorn

In this section let k be an arbitrary field, and let X be a k-scheme locally of finite type (Definition 3.30). A point $x \in X$ is closed if and only if $\kappa(x)$ is a finite extension of k (Proposition 3.33) and the set of closed points is very dense in X (Proposition 3.35). A point $x \in X$ is called *k-rational* if $k \to \kappa(x)$ is an isomorphism. A k-rational point is always closed. Sending a k-morphism $\operatorname{Spec} k \to X$ to its image yields a bijection between the set $X(k) = X_k(k)$ of k-valued points of X and the set of k-rational points of X

(propriété de Jacobson)

Definition and Remark 3.34. *A subset Y of a topological space X is called* very dense, *if the following equivalent conditions are satisfied:*

(i) *The map $U \mapsto U \cap Y$ defines a bijection between the set of open subsets of X and the set of open subsets of Y.*
(ii) *The map $F \mapsto F \cap Y$ defines a bijection between the set of closed subsets of X and the set of closed subsets of Y.*
(iii) *For every closed subset $F \subseteq X$, we have $F = \overline{F \cap Y}$.*
(iv) *Every non-empty locally closed subset Z of X contains a point of Y.*

Dans un k-schéma général il y a 1) des points non fermés,
2) des points fermés non k-rationnels.

La propriété de Jacobson fait que pour les k-schémas loc. de type fini, on ne perd rien en oubliant les points 1) et donc en remplaçant Spec par le spectre maximal Spm comme le fait Milne.
(Et à mon avis on ne gagne pas grand' chose mais peu importe.)

For a general field k it is often difficult to decide whether a given k-scheme X has a k-rational point (see Exercise 3.28). The following two examples show that even for quite simple k-schemes the residue fields $\kappa(x)$ might be complicated field extensions of k. Moreover it might happen that there is no k-morphism $\operatorname{Spec} k \to X$ (and hence no k-rational point of X).

Example 5.1. Let $X = \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[T]$. The points of X are the prime ideals of $k[T]$. As $k[T]$ is a principal ideal domain, the prime ideals are the zero ideal and all principal ideals generated by irreducible polynomials (see Example 2.14). Hence every finite extension field which is generated over k by a single element (in particular every finite separable extension) occurs as a residue class field of a point of X.

Example 5.2. Let $X = \operatorname{Spec} k'$ be the spectrum of a non-trivial extension field k'/k. This gives us an example of a k-scheme which contains no point with residue class field k and which does not admit any k-morphism $\operatorname{Spec} k \to X$. A scheme X of this form is of finite type over k, if and only if the extension k'/k is finite (Lemma 1.10).

(Le contenu de cette page n'a pas été donné pendant l'exposé)

(5.12) Extension of scalars for schemes over a field.

Let k be a field. We use the following result (which we will prove below, see Theorem 14.36).

Proposition 5.44. *Let S be a scheme whose underlying topological space is discrete. Then any morphism $f\colon X \to S$ of schemes is universally open.*

We will use this proposition in the situation where S is a field, and in most cases f will be of finite type. In this case the proof of the proposition simplifies considerably; for instance, one can invoke Theorem 14.33.

Noter que le résultat de la prop. est tout à fait faux avec «fermé» à la place de «ouvert» : la propriété d'être universellement fermé est caractéristique des morphismes propres.

Exemple : $X = \mathbb{A}^1_k \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} k$ est évidemment fermé, mais pas universellement. Par exemple quand on fait le changement de base par X lui-même :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^2_k = \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k \arrow[r, "f' = pr_2"] \arrow[d] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d] \\ \mathbb{A}^1_k \arrow[r, "f"] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

l'image du fermé $\{xy=1\} \subseteq \mathbb{A}^2_k$ par $f' = pr_2$ est l'ouvert $\{y \neq 0\}$.

Corollary 5.45. *Let X and Y be k-schemes and denote by $p\colon X \times_k Y \to X$ the projection.*

(1) *The morphism p is surjective and universally open.*

(2) *The map $Z \mapsto \overline{p(Z)}$ is a well-defined surjective map*

$$\{\text{irreducible components of } X \times_k Y\} \twoheadrightarrow \{\text{irreducible components of } X\}. \tag{5.12.1}$$

(3) *The image $p(C)$ of every connected component C of $X \times_k Y$ is contained in a unique connected component of X and we obtain a well-defined surjective map*

$$\{\text{connected components of } X \times_k Y\} \twoheadrightarrow \{\text{connected components of } X\}. \tag{5.12.2}$$

(4) *Assume that $X \times_k Y$ has one of the following properties: "irreducible", "connected", "reduced", "integral". Then X has the same property.*

1.2. Produits tensoriels de corps

Soient K/k, L/k des ext. algébriques. On les suppose finies pour simplifier, et $\subset \bar{k}$ une clôt. alg fixée. On veut illustrer le tableau suivant pour $K \otimes_k L$:

K \ L	séparable	radicielle
séparable	réduit p.-ê pas connexe	réduit connexe $\Rightarrow$ corps
radicielle	réduit connexe $\Rightarrow$ corps	p.ê pas réduit connexe

séparable et radicielle n'interagissent pas !

<u>Rappel</u>. K/k séparable ssi chaque $x \in K$ est <u>racine simple</u> de son pol minimal $P \in k[X]$ (ie $(P, P') = 1$)

- K/k radicielle (= purement inséparable) ssi car $k = p$ et chaque $x \in K$ a une certaine puissance $x^{p^n} \in k$

<u>Lm</u> K/k sép, L/k radicielle $\Rightarrow$ $K \otimes_k L$ est un corps.

<u>Dém</u> th de l'élément primitif : $K = k[X]/(P)$, P séparable.
Alors $K \otimes_k L = L[X]/(P)$. isM P irréd. dans $L[X]$.
Or si $P = QR$ dans $L(X)$, Q et R sont encore séparables sur L
donc à coefs dans $k^{sep} \subset \bar{k}$, donc coefs dans $k^{sep} \cap L$
Or L/k radicielle $\Rightarrow$ $k^{sep} \cap L = k$, contradiction $\boxtimes$

<u>Ex1</u> $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $\beta = e^{i\frac{2\pi}{3}} \sqrt[3]{2}$, $\quad \mathbb{Q}(\alpha) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\alpha) \otimes \dfrac{\mathbb{Q}[X]}{\mathbb{Q}(X^3 - 2)}$

$$= \frac{\mathbb{Q}(\alpha)[X]}{(X^3-2)} = \frac{\mathbb{Q}(\alpha)[X]}{(X^3 - \alpha^3)} = \ldots \quad \text{non connexe}$$

<u>Rem</u> $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$ (dans $\bar{\mathbb{Q}}$) montre que la condition $K \cap L = k$ ne suffit pas à assurer que $K \otimes_k L$ soit un corps

Ex2 $\quad k = \mathbb{F}_p(t) \quad K = L = k(\underset{\alpha}{\underbrace{t^{1/p}}}) = \dfrac{k[X]}{X^p - t}$

$$K \otimes_k L = k(\alpha) \otimes_k \frac{k[X]}{X^p - t} = \frac{k(\alpha)[X]}{X^p - \alpha^p} = \frac{k(\alpha)[X]}{(X-\alpha)^p} \qquad X-\alpha \text{ nilpotent}$$

non réduit.

Rem 1 soit K/k ext. algébrique générale.
Il existe k^s = + gde sous-extension séparable de k
k^r = ———— radicielle —— .

et de plus on a $\quad k \underset{sep}{\subset} k^s \underset{rad}{\subset} K$.

Mais l'inverse n'st pas toujours vrai, i.e. il peut se produire que $k \underset{rad}{\subset} k^r \subset K$ ← ne soit pas séparable

ce qui revient à dire que l'inclusion $k^s \otimes_k k^r \hookrightarrow K$ est stricte. On parle d'extension exceptionnelle, cf Bourbaki, Algèbre, chap V, exercices 1-2-3 du §7.

Rem 2 Pour K/k ext arbitraire (pas nécess. algébrique) on a toujours $\quad k \subset k(x_1, x_2, \dots) \underset{alg}{\subset} K$

↑ transcendante pure

et l'inverse $(k \underset{alg}{\subset} k^a \subset K)$ ← pas néces tr-pure n'est pas vrai,

cf $K = k(x, y\,;\, y^2 - f(x))$ corps de fn d'une courbe de genre $g \geq 1$.

2. Schémas géométriquement connexes

In general it may happen that a k-scheme X has some property $\mathbf{P}$ (for instance one of the properties in Corollary 5.45 (4)) but there exist field extensions K of k such that the base change X_K does not have $\mathbf{P}$. Therefore we make the following definition.

Definition 5.48. *Let* $\mathbf{P}$ *be one of the following properties of a scheme over a field: "irreducible", "connected", "reduced", or "integral". We say that a k-scheme X possesses* $\mathbf{P}$ geometrically *if the K-scheme X_K possesses* $\mathbf{P}$ *for every field extension K of k.*

[Görtz - Wedhorn]

Proposition 5.53. *Let X be a k-scheme. Then the following assertions are equivalent.*

(i) *X is geometrically connected.*
(ii) *For every connected k-scheme Y the product $X \times_k Y$ is connected.*
(iii) *There exists a separably closed extension Ω of k such that X_Ω is connected.*

If X is quasi-compact, these assertions are also equivalent to

(iv) *For every finite separable extension K of k, X_K is connected.*

Enoncer (i), (iv), (v) puis dire qu'elles impliquent aussi (ii)

important car quand on étudie les groupes on manipule souvent des produits : $G \times_k G$, $G \times_k X$ ...

Il se trouve qu'il y a un objet qui permet de « quantifier » la (non-) connexité géométrique : la plus grande sous-k-algèbre séparable de $\mathcal{O}_X(X)$. Si on la note k^{sep} et $\pi_0(X) = \operatorname{Spec} k^{sep}$ on a donc $X \to \pi_0(X) \to \operatorname{Spec} k$ $(\star)$.

Remarque :

Peut-être est-il utile de rappeler qu'il existe un morphisme $f : X \to X^{\mathrm{aff}}$ avec $X^{\mathrm{aff}} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ appelé *affinisation de X*, tel que tout morphisme de X vers un schéma affine se factorise par X^{aff}. Décrivons f : pour chaque ouvert affine $U = \operatorname{Spec}(A) \subset X$, on dispose du morphisme de restriction des fonctions $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U) = A$ qui, en prenant le spectre, fournit un morphisme $f_U : U \to X^{\mathrm{aff}}$. Pour que les f_U se recollent en un morphisme f il suffit de vérifier que $f_{U|U\cap V} = f_{V|U\cap V}$ pour toute paire d'ouverts affines $U, V \subset X$. Pour cela, il suffit de vérifier que $f_{U|W} = f_{V|W}$ pour tout ouvert affine $W \subset U \cap V$. Or cela découle du fait que $\mathcal{O}_X$ est un faisceau, en passant aux spectres dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_X(U) \arrow[dr, "\mathrm{res}^U_W"] & \\
\mathcal{O}_X(X) \arrow[ur, "\mathrm{res}^X_U"] \arrow[dr, "\mathrm{res}^X_V"'] & & \mathcal{O}_X(W). \\
 & \mathcal{O}_X(V) \arrow[ur, "\mathrm{res}^V_W"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme $k \subset k^{sep} \subset \mathcal{O}_X(X)$ on a donc $X \to X^{\mathrm{aff}} \to \pi_0(X) \to \operatorname{Spec} k$

d'où $(\star)$.

Une propriété est très importante est que la formation de la plus grande sous-algèbre séparable commute à l'extension du corps de base. Dans Waterhouse (Intro. to Affine group schemes, Springer) page 49, lorsque $X = \operatorname{spec} A$ l'algèbre k^{sep} est notée $\pi_0(A)$. C'est une k-algèbre de dim finie (vrai aussi pour X non affine mais de type fini).

6.5 Separable Subalgebras

[Waterhouse]

Let A be a finitely generated k-algebra. If B is any separable subalgebra, $B \otimes \bar{k}$ is a separable $\bar{k}$-subalgebra of $A \otimes \bar{k}$; it is spanned by idempotents, so by (5.5) its dimension is bounded by the number of connected components of Spec $A \otimes \bar{k}$. Furthermore, if B_1 and B_2 are separable subalgebras, so also is the composite $B_1 B_2$, since it is a quotient of $B_1 \otimes B_2$. Hence there is a largest separable subalgebra of A. We denote it by $\pi_0 A$. If A' is another finitely generated algebra, then $\pi_0(A \times A') = \pi_0(A) \times \pi_0(A')$; we have $\subseteq$ because the projections of $\pi_0(A \times A')$ to A and A' must be separable, and $\supseteq$ because a product of separable algebras is separable.

Theorem. *Let $k \subseteq L$ be fields, A a finitely generated k-algebra. Then $(\pi_0 A) \otimes L \simeq \pi_0(A \otimes L)$.*

On en déduit que si $k \xrightarrow{\sim} k^{sep}$ $(\subset \mathcal{O}_X(X))$ alors $X \to \operatorname{spec} k$ est géométriquement connexe. En effet, sinon il existe une extension L/k telle que $X_L \to \operatorname{spec} L$ n'est plus connexe (et on peut prendre L/k séparable compte tenu de ce qu'on a dit sur les produits tensoriels de corps), donc $X_L = Y \amalg Z$. Alors $\mathcal{O}(X_L) = \mathcal{O}(Y) \times \mathcal{O}(Z)$ et la fonction $f = (1,0)$ $(f_{|Y} = 1, f_{|Z} = 0)$ est une fonction globale sur X_L, séparable puisque $f^2 - f = 0$ (le poly. $X^2 - X$ est séparable !), non constante, en contradiction avec le fait que $L \xrightarrow{\sim} L^{sep}$ d'après le théorème.

plus grande ss-alg séparable de $\mathcal{O}(X_L)$

Cor si X est connexe et possède un point rationnel $x \in X(k)$ alors il est géométriquement connexe.

Dém : on a $\operatorname{Spec} k \xrightarrow{x} X \to \pi_0(X) \to \operatorname{Spec} k$
d'où $k \to k^{sep} \to k$ qui montre que $k = k^{sep}$ $\boxtimes$

Ceci s'applique aux schémas en groupes, qui ont un neutre $e \in G(k)$.

Cor: Si G/k schéma en groupes de type fini connexe alors G est irréductible.

Dém : par le cor précédent $G_{\bar{k}}$ est connexe.
Alors $(G_{\bar{k}})_{red} \hookrightarrow G_{\bar{k}}$ est un sous-groupe, homéo à $G_{\bar{k}}$ et géométriquement réduit. Il possède donc un ouvert dense lisse, donc (par translations : sur $k = \bar{k}$ alg. clos, il y en a autant qu'on veut !) $(G_{\bar{k}})_{red}$ est lisse.
Etant connexe, il est irréductible (au point d'intersection de deux comp. irréductibles distinctes il y a toujours une singularité). Alors l'applic. topologique surjective

$$(G_{\bar{k}})_{red} \xrightarrow{\text{homéo}} G_{\bar{k}} \twoheadrightarrow G$$

montre que G est irréductible $\boxtimes$

celte partie n'a pas été faite pendant l'exposé

3. Schémas géométriquement réduits

[Görtz-Wedhorn]

Proposition 5.49. *Let X be a k-scheme. Then the following assertions are equivalent.*

(i) *X is geometrically reduced.*
(ii) *For every reduced k-scheme Y the product $X \times_k Y$ is reduced.*
((iii) *X is reduced and for every maximal point η of X the residue field $\kappa(\eta)$ is a separable extension of k.*) on peut oublier (iii)
(iv) *There exists a perfect extension Ω of k such that X_Ω is reduced.*
(v) *For every finite purely inseparable extension K of k, X_K is reduced.*

Énoncer (i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) puis dire qu'elles impliquent aussi (ii).

Exemple soit k un corps imparfait et $t \in k \setminus k^p$ un élément qui n'est pas puissance $p^{ème}$. Soit $G = \{(x,y) ; y^p - tx^p = 0\} \subseteq \mathbb{G}_a^2$, le noyau du morphisme $\mathbb{G}_a^2 \to \mathbb{G}_a$, $(x,y) \mapsto y^p - tx^p$.
C'est un k-sch en groupes affine réduit, mais après le changement de base $k \to k(t^{1/p})$ on a $y^p - tx^p = (y - t^{1/p}x)^p$ si bien que la fonction $y - t^{1/p}x$ est nilpotente. De plus $(G_{k(t^{1/p})})_{red}$ est un $k(t^{1/p})$-sch. en groupes géométriquement réduit. $\boxtimes$

Pour comprendre ce qu'il se passe on a besoin de la notion de corps de définition:

Déf Soient X un k-schéma, K/k une extension, $Z \subset X_K$ un sous-schéma fermé de $X_K = X \otimes_k K$. On dit que Z est défini sur une sous-extension $K_0 \subset K$ s'il existe $Z_0 \subset X_{K_0}$ (sous-sch. fermé) tel que $(Z_0)_K = Z$. K_0 est alors un corps de définition

th (EGA IV_2, 4.8.11) Il existe un plus petit corps de définition de $Z \subset X_K$.

Dém (idée) on recouvre X par des ouverts affines, ce qui nous ramène au cas $X = \mathrm{spec}(A)$. Alors $Z = V(I)$ avec $I \subset A_K$ idéal.
Pour donner l'idée on va montrer que le sous-k-espace vectoriel $I \subset A_K$ possède un plus petit corps de définition. C'est l'énoncé suivant:

Lemme : Soit E un k-espace vectoriel et K/k une extension. Pour tout sous-K-espace vectoriel $F \subset E_K$, il existe une plus petite sous-extension $K_0 \subset K$ telle que F est *défini sur* K_0 au sens où $F = (F_0)_K$ pour un certain sous-K_0-espace vectoriel $F_0 \subset E_{K_0}$.

Démonstration : notons $\{e_i\}_{i \in I}$ une k-base de E et considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E_K \xrightarrow{\pi} E_K/F \longrightarrow 0.$$

Soit $J \subset I$ tel que $B = \{e_i\}_{i \in J}$ se projette par π en une K-base de E_K/F. (Noter que les images des e_i forment une famille génératrice.) Soit $C = \{e_i\}_{i \notin J}$ la partie complémentaire. Notons K_0 le sous-corps de K engendré par les coefficients a_{ij} des $e_i \in C$ écrits sur la base $\pi(B)$ Notons Q_0 le sous-K_0-espace vectoriel de E_K/F engendré par $\pi(B)$. Le choix de K_0 fait qu'il existe un K_0-morphisme $\pi_0 : E_{K_0} \to Q_0$ qui définit π (au sens où $\pi = (\pi_0)_K$). Posons $F_0 = \ker(\pi_0)$. Comme $(Q_0)_K = E_K/F$, en partant de la suite exacte

$$0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow E_{K_0} \xrightarrow{\pi} Q_0 \longrightarrow 0$$

et en tensorisant $- \otimes_{K_0} K$ on voit que $F = (F_0)_K$. Pour démontrer que K_0 est minimal, soit $L \subset K$ et $G \subset E_L$ un sous-L-espace vectoriel tel que $F = G_K$. Alors le L-morphisme $\pi_L : E_L \to E_L/G$ définit π après extension de L à K, donc les coefficients $a'_{ij} \in L$ des écritures $\pi_L(e_i) = \sum_{j \in J} a_{ij} e_j$ sont égaux aux $a_{ij} \in K_0$. Ceci démontre que $a_{ij} \in L$, donc l'extension de k engendrée par les a_{ij} (c'est K_0) est incluse dans L, cqfd.

L'existence du plus petit corps de définition est donc un phénomène d'algèbre linéaire.
Si on l'applique au nilradical géométrique on a : soit $K_0 \subset \bar{k}$ le corps de définition du sous-schéma fermé $(X_{\bar{k}})_{réd} \hookrightarrow X_{\bar{k}}$, alors $(X_{K_0})_{red}$ est un sous-schéma fermé de X_{K_0} qui est géométriquement réduit sur K_0.