## The main theorem

$(G,T)$ gr. réd. scindé sur $k$.

Soit $\alpha \in \Phi = \Phi(G,T)$ une racine (= poids de la rep. ad)

on pose $\boxed{T_\alpha = (\ker \alpha)_{t}}$ $\subset \ker(\alpha)$ plus grand sous-tore,

c'est-à-dire que $X(T_\alpha) = (X(T)/\mathbb{Z}\alpha)/\text{torsion}$

$$= X(T) / \underbrace{\{\chi ; \exists n, n\chi \in \mathbb{Z}\alpha\}}_{\text{saturé de } \mathbb{Z}\alpha \text{ dans } X(T)}$$

Ex: $G = SL_2$, $\alpha : \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mapsto t^2$, $\ker \alpha = \mu_2$, $T_\alpha = 1$.

on pose ensuite $\boxed{G_\alpha = G^{T_\alpha} \text{ (pts fixes) } = C_G(T_\alpha)}$

Lem $\operatorname{Lie} G_\alpha = \mathfrak{g}^{T_\alpha} = \mathfrak{g}^T \oplus \bigoplus_{\beta \in \Phi \cap \mathbb{Q}\alpha} \mathfrak{g}_\beta$

Dém par déf, si $\beta \in \Phi$ on a : $(\exists n, n\beta \in \mathbb{Z}\alpha) \Leftrightarrow (\beta \text{ nulle sur } T_\alpha)$

Donc si $t \in T_\alpha$ et $x = x_0 + \sum_{\beta \in \Phi} x_\beta$ on a

$$t.x = x_0 + \sum_{\beta \in \Phi} \beta(t) x_\beta = x_0 + \sum_{\beta \in \mathbb{Q}\alpha} x_\beta + \sum_{\beta \notin \mathbb{Q}\alpha} \beta(t) x_\beta$$

et $\exists t, \beta(t) \neq 1$

d'où: $x \in \mathfrak{g}^{T_\alpha}$ ssi $x_\beta = 0$ lorsque $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha$, cqfd $\boxtimes$

Maintenant soit $\lambda \in X^\vee(T) = \operatorname{Hom}(\mathbb{G}_m, G)$ cocaractère tel que $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$. Je dis que le groupe suivant ne dépend pas du choix de $\lambda$: $\boxed{U_\alpha = U_{G_\alpha}(\lambda)}$

~~En effet, si~~

$$U_\alpha(R) = \{ g \in G_\alpha(R), \lim_{t \to 0} \lambda(t).g = 1 \}$$

**Lm** $\mathrm{Lie}\, U_\alpha = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{Q}_{>0}\alpha \cap \Phi} \mathfrak{g}_\beta$ et $U_\alpha$ est l'unique sous-groupe lisse de $G$ (normalisé par $T$) avec cette algèbre de Lie.
En particulier $U_\alpha$ ne dépend pas de $\lambda$.

**Dém** $\mathrm{Lie}\, U_\alpha = \{ x \in \mathrm{Lie}\, G_\alpha \ ; \ \lim_{t\to 0} \lambda(t).x = 0 \}$.

Si $x = x_0 + \sum_\beta x_\beta$ on a $\lambda(t).x = x_0 + \sum_\beta \beta(\lambda(t)) x_\beta$

(⚠ notations : auparavant $t \in T_\alpha$, maintenant $t \in \mathbb{G}_m$).

Puisque $\beta(\lambda(t)) = t^{\langle \beta, \lambda \rangle}$ on déduit que

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t).x = 0 \quad \text{ssi} \quad x_0 = 0 \text{ et } x_\beta = 0 \text{ lorsque } \langle \beta, \lambda \rangle \leq 0.$$

Or $x \in \mathrm{Lie}\, G_\alpha$ donc seuls les $\beta \in \mathbb{Q}.\alpha$ interviennent, i.e. $n\beta = m\alpha$ si bien que $\langle \beta, \lambda \rangle > 0 \iff \frac{n}{m} > 0$ !

Pour conclure avec la propriété d'unicité, soit $H \subset G$ sous-groupe lisse normalisé par $T$ avec $\mathrm{Lie}\, H = \mathrm{Lie}\, U_\alpha$.

<u>On mq $H \supset U_\alpha$</u> : ~~soit $H_\alpha = (HT)^{T\alpha}$ et $U = U_{H_\alpha}(\lambda_\alpha)$.~~ ~~produit semi-direct~~

soit $H_\alpha = H^{T_\alpha}$ et $\mathbb{G}_m \curvearrowright H_\alpha$ via $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$

soit $U = U_{H_\alpha}(\lambda)$ le concentrateur, donc

$$U(\bar{k}) = \{ h \in H_\alpha(\bar{k}) \ ; \ \lim_{t\to 0} \lambda(t) h = 1 \}$$

$$\mathrm{Lie}\, U = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{Q}_{>0}\alpha \cap \Phi(H,T)} \mathfrak{g}_\beta .$$

Ainsi $U(\bar{k}) \subset U_\alpha(\bar{k})$, donc (lissité) $U \subset U_\alpha$. De plus

$$\mathrm{Lie}\, U = \mathrm{Lie}\, H \cap \mathrm{Lie}\, U_\alpha = \mathrm{Lie}\, U_\alpha$$

d'où $U = U_\alpha$ puis $U \subset H$. Par lissité $U = H$ ⊠

Rem ⚠ il ne suffit pas que $H_1, H_2 \subset G$ soient lisses avec $\mathrm{Lie}\, H_1 = \mathrm{Lie}\, H_2$ pour conclure $H_1 = H_2$.

Ainsi dans $SL_2$ en car $k=2$, tous les tores max ont même algèbre de Lie : raison : ~~si $T \subset SL_2$ tore max et $T' = gTg^{-1}$, alors~~

le centre $\mu_2$ est inclus dans tous les tores max, donc $\mathrm{Lie}\, \mu_2 \subset \mathrm{Lie}\, T$ égalité par dimensions.

Voici le Main theorem :

<u>Th</u> Soit $(G,T)$ réductif scindé et $\alpha \in \Phi$.

(a) $(G_\alpha, T)$ est réductif déployé (scindé) de rang ss $= 1$.

(b) $\mathrm{Lie}\, G_\alpha = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ avec $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$,
$\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$, et $\mathbb{Q}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$.

(c) $U_\alpha$ est normalisé par $T$, isomorphe à $\mathbb{G}_a$, et $\mathrm{Lie}\, U_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$.

(d) $W(G_\alpha, T) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, s_\alpha\}$, $s_\alpha = \overline{n_\alpha}$, $n_\alpha \in N_{G_\alpha}(T)(k)$.

(e) $\exists !\, \alpha^\vee \in X_*(T)$ tq $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee\rangle \alpha$, $\forall x \in X(T)$.
De plus $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$.

(f) $G$ est engendré par $T$ et les $U_\alpha$ $(\alpha \in \Phi)$. En fait
$m : \prod_{\alpha \in \Phi} U_\alpha \times T \to G$ est une immersion ouverte.

<u>Dém</u>

(a) $G_\alpha$ est le centralisateur d'un tore dans un groupe réductif donc il est réductif. De plus $T \subset G_\alpha$ est maximal dans $G$ donc aussi dans $G_\alpha$.
Le rang ss de $G_\alpha$ est la dim. de l'image de $T$ dans $G_\alpha / RG_\alpha$. Or on a vu que dans un groupe

réductif le radical est le plus grand sous-tore du centre, donc $RG_\alpha = Z(G_\alpha)_t \supset T_\alpha$ de dimension $\dim T - 1$, donc $\mathrm{rgss} = 0$ ou $1$. Et $0$ n'est pas possible car cela entrainerait $T \subset RG_\alpha \subset ZG_\alpha$, donc $G_\alpha \subset C_G(T) = T$, donc $\mathrm{Lie}\, G_\alpha \subset t$, en contradiction avec

$$\mathrm{Lie}\, G_\alpha = g^{T_\alpha} = t \oplus g_\alpha \oplus \dots$$

(b) On sait qu'alors $G_\alpha \simeq \mathbb{G}_m^r \times \begin{cases} GL_2 \\ SL_2 \\ PSL_2 \end{cases}$ dont on peut déduire le premier énoncé. Alternativement on peut utiliser le fait qu'il existe $q, v_\alpha$ à noyaux centraux

$$\begin{tikzcd} & & SL_2 \arrow[dl, "v_\alpha"'] \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & ZG_\alpha \arrow[r] & G_\alpha \arrow[r, "q"'] & PGL_2 \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \quad \text{avec} \quad \begin{tikzcd} & T_2 \arrow[dl, "v_\alpha|T_2"'] \arrow[d, "2"] \\ T \arrow[r, "q|T"'] & T_1 \end{tikzcd}$$

sur les tores max.

et de plus $v_\alpha$ induit une isogénie $SL_2 \to G_\alpha^{der}$.
Comme $G_\alpha / G_\alpha^{der}$ est un tore (rappel : on a une SE $1 \to Z(G^{der}) \to Z(G) \times G^{der} \to G \to 1$), on a : $U_\alpha \subset G_\alpha^{der}$.

Il y a une propriété générale des groupes $U(\lambda)$ :
si $G, G'$ lisses connexes et $\varphi : G \to G'$ surjectif, $\lambda \in X_*(G)$ ~~et...~~ alors $\varphi(U_G(\lambda)) = U_{G'}(\varphi \circ \lambda)$.
(voir Milne 13.34).

Dans notre situation soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to T_2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$,
alors $v_\alpha : \underset{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{U^+}} \overset{df}{=} U_{SL_2}(\lambda) \twoheadrightarrow U_{G_\alpha^{der}}(v_\alpha \circ \lambda) = U_{G_\alpha}(v_\alpha \circ \lambda) = U_\alpha$

Et même $v_\alpha|_{U^+}$ est un $\underline{\underline{\text{iso}}}$ puisque $\ker(v_\alpha) \subset T_2$. En partic $U_\alpha \simeq \mathbb{G}_a$.

Comme Lie $U_\alpha = \bigoplus_{\beta\in\mathbb{Q}_{>0}\alpha\cap\Phi} \mathfrak{g}_\beta$ avec $U_\alpha \simeq \mathbb{G}_a$,

la seule possibilité est que Lie $U_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ de dim $\underline{\underline{1}}$

et le seul multiple rationnel positif de $\alpha$ est $\alpha$.

Donc $\mathbb{Q}\alpha\cap\Phi = \{\pm\alpha\}$

(c) On a vu plus haut que $U_\alpha$ est l'unique sous-groupe lisse de $G$ normalisé par $T$ avec Lie $= \mathfrak{g}_\alpha$.

(d) Matilde a montré que $G_\alpha$ possède exactement <u>deux</u> Borels contenant $T$. Comme $W(G_\alpha, T)$ agit simplement transitivement sur ceux-ci, son card est $= 2$.

(e) $\alpha^\vee := \nu_\alpha\circ\lambda : \mathbb{G}_m \to T,\ t\mapsto$

$$\begin{tikzcd}
 & T_\alpha = Z(G_\alpha)_t \arrow[d, phantom, "\cap"] & & & \xrightarrow{\lambda} T_2 \arrow[dll, bend right, "\nu_\alpha"'] \arrow[ddll, bend right, "\nu_\alpha"'] \arrow[dd, "2"] \arrow[dl, phantom, "\subset"] & \\
 & Z(G_\alpha) \arrow[d, phantom, "="] & T=\mathbb{G}_m^{r+1} \arrow[d, phantom, "\cap"] & SL_2 \arrow[dl, "\nu_\alpha"'] \arrow[dd] & & \\
 & \mathbb{G}_m^r\times\mu_2 & ①\ \mathbb{G}_m^r\times SL_2 & & T_1 \arrow[dl, phantom, "\subset"] & \\
1 \arrow[r] & \mathbb{G}_m^{r-1}\times\mathbb{G}_m \arrow[r] & ②\ \mathbb{G}_m^{r-1}\times GL_2 \arrow[r] & PGL_2 \arrow[rr] & & 1 \\
 & \mathbb{G}_m^r & ③\ \mathbb{G}_m^r\times PGL_2 & & &
\end{tikzcd}$$

Cas ① $T = \mathbb{G}_m^r\times T_2$ $\qquad \nu_\alpha|_{T_2}$ est 1:1

② $T = \mathbb{G}_m^{r-1}\times\mathbb{G}_m\times T_2$ $\qquad$ — " —

③ $T = \mathbb{G}_m^r\times\mathbb{G}_m$ et $\nu_{\alpha}|_{T_2}$ est 2:1

① $\alpha$ se la projection sur $T_2$, élevée au carré

② ——— " ——— / ———

③ ——— " ——— $\mathbb{G}_m$

On voit ainsi, au cas par cas, que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$.

Reste à voir que $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$. $\quad \forall x \in X(T)$.

Faisons le pour le cas ①. Soit $x : T \to \mathbb{G}_m$

Ça résulte du cas $SL_2$. Idem, c'est cas par cas.

Plus rapidement : dans chaque cas on a $T = T_\alpha \times \mathbb{G}_m$

et $X(T) = X(T_\alpha) \times X(\mathbb{G}_m)$

$$\chi \mapsto (\chi|_{T_\alpha}, \chi|_{\mathbb{G}_m})$$

$$\chi_1 \cdot \chi_2 \leftarrow (\chi_1, \chi_2)$$

$(t \mapsto \chi_1(t)\chi_2(t))$

on voit que $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha = \begin{cases} \text{le caractère } x \text{ si } x \in X(T_\alpha) \\ -\alpha \text{ si } x = \alpha \end{cases}$

(f) est vrai car Lie $T$ et les Lie $U_\alpha$ engendrent Lie $G$, et $T$ et les $U_\alpha$ sont lisses ☒.

<u>Cor</u> $\mathcal{R} = \left(X(T), \Phi(G,T), \alpha \mapsto \alpha^\vee\right)$ est un syst. de racines réduit.

<u>Dem</u> cela signifie : (rd1) $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$

(rd2) $s_\alpha(\Phi) \subset \Phi \quad \forall \alpha \in \Phi$

(rd3) le groupe $W(\mathcal{R})$ engendré par les $s_\alpha$ est fini.

<u>Vérification</u> (rd1) dans la dém ci-dessus. (cf (e) du th)

(rd2) a été vu avant le th

(rd3) car $W(\mathcal{R}) \subset W(G,T)$ fini ☒