Structure des groupes réductifs scindés

le 10 nov 2021
Matthieu

1. Pour terminer notre étude des groupes réductifs de rang semi-simple 1

nous devons démontrer:

Th1: Tout groupe réductif scindé de rang ss = 1 est isom. à l'un des trois suivants : $\mathbb{G}_m^r \times SL_2$, $\mathbb{G}_m^r \times PGL_2$, $\mathbb{G}_m^{r-1} \times GL_2$ $(r \geq 1)$.

Pour démontrer ceci on utilise le procédé de construction des groupes réductifs à partir des groupes semi-simples (Milne, § 19.d).

On fait quelques remarques sur les revêtements universels de gr. algébriques(★).

Tout d'abord il faut savoir que si G est un groupe topologique et $G' \xrightarrow{f} G$ est un revêtement (topologique), alors il existe une unique structure de groupe topologique sur G' telle que f soit un morphisme, et de plus $N = \ker(f)$ est nécess. abélien et discret ! En particulier, si G est suffisamment raisonnable (connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe) pour avoir un revêtement universel $\tilde{G} \xrightarrow{\tilde{f}} G$, celui-ci est un groupe topologique et $\pi_1(G,e) = \ker(\tilde{f})$ est abélien.

En géométrie algébrique, les revêtements finis ont un analogue: les morphismes $X' \to X$ finis, étales, surjectifs. Malheureusement, pour les groupes algébriques la situation n'est pas aussi simple qu'en topologie, en tout cas en carac. $p > 0$. Soulignons deux phénomènes nouveaux :

1. certains revêtements semblent disparaître : ainsi le revêtement $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, $z \mapsto z^n$ en caractéristique 0 a un analogue en car. p qui lorsque $p | n$ n'est pas étale (car $\mu_n \to \operatorname{spec} \mathbb{F}_p$ n'est pas étale).
2. certains revêtements de groupes algébriques ne portent pas de structure de groupe algébrique.

(★) Godbillon, Éléments de topologie algébrique (Hermann), V.5 et X.6

Le deuxième phénomène est lié à la <u>ramification sauvage</u> qui, en concentrant la ramification en peu de points permet l'existence de beaucoup plus de revêtements qu'en caractéristique 0. Par exemple, la conjecture d'Abhyankar démontrée en 1994 par Raynaud affirme que tout groupe fini G engendré par ses p-Sylow est groupe de Galois d'un revêtement $C' \to C = \mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ de la droite affine.
Un tel revêtement est en général une courbe de genre $g(C')$ grand, qui ne porte pas de structure de groupe algébrique dès que $g(C') \geq 2$.
[Noter que $\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p} = \mathbb{G}_{a,\overline{\mathbb{F}}_p}$ est un groupe algébrique !]

<u>Pour les groupes semi-simples</u>, les problèmes ① et ② sont mieux contrôlés si on se limite aux revêtements $G' \xrightarrow{f} G$ qui sont des isogénies de type multiplicatif (ie $\ker f$ de type mult.), donc automatiquement centrales. On démontre alors (Milne 18.25, 18.27) qu'il existe une isogénie multiplicative $\tilde{G} \to G$ telle que toute isogénie multiplicative $G' \to \tilde{G}$ est <u>triviale</u> (on dit que $\tilde{G}$ est simplement connexe). On l'appelle le <u>revêtement universel</u> de G, et son noyau est le <u>groupe fondamental</u> de G, noté $\pi_1(G)$.
Pour G réductif on peut bricoler des analogues de $\tilde{G}$ et $\pi_1(G)$ en se ramenant au cas semi-simple via G^{der} ou G^{ad}.

L'article Iversen, The Geometry of Algebraic Groups, Adv. in Math. 1976 est une excellente référence pour comprendre cela ⊠

Revenons à la construction des groupes réductifs : on obtient qu'ils sont tous conoyaux
$$Z(G') \to G' \times Z(G) \to G \to 1$$
$$x \mapsto (x, x^{-1})$$
où G' est le revêtement universel du groupe adjoint $G^{ad} = G/Z(G)$ et $\operatorname{Coker}(Z(G') \to Z(G))$ est un tore (en fait ce coker est G/G'),
Cf Milne 19.25, 19.29, 19.30.

Milne 12.40, (19.21)

G réductif pas utile ici

<u>Dém</u> du th 1 : rappel : le morphisme $G^{der} \to G^{ad} = G/Z(G)$ est une isogénie mult, ce qui se voit en observant (en plongeant G dans un GL_n) que tout tore central a une intersection <u>finie</u> avec G^{der}. De plus G^{der} et G^{ad} sont semi-simples (car leur centre est fini, Milne 19.10).

Comme $rgss(G)=1$ on a $G^{ad} = PGL_2$, et $G' = SL_2$ le rev. universel.
(Milne 20.32)

Ainsi G est un conoyau de
$$\mu_2 \to SL_2 \times D \quad \text{pour un certain}$$
$$z \mapsto (z, \varphi(z)^{-1})$$
morphisme $\varphi : \mu_2 \to D$ dont le conoyau est un tore. En passant aux groupes de caractères on a $0 \to N \to X(D) \xrightarrow{\alpha = X(\varphi)} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
N sans torsion.

Alors α est nulle ou surjective :

1) $\alpha = 0$, alors $\varphi = 0$, $D = T$ est un tore et $G \simeq PGL_2 \times T$
2) α surjective, alors la suite exacte $0 \to N \to X(D) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ est …
   i) scindée : $D = \mu_2 \times T$, φ est l'inclusion et $G \simeq SL_2 \times T$
   ii) ou non : $X(D) = M \oplus \mathbb{Z}$ avec $\alpha_{|M} = 0$, $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la projection, et dans ce cas $G \simeq GL_2 \times T$ $\quad (T = D(M))$ ⊠

<u>Exercice</u> pour voir si on comprend la démo. du théorème : soit $n \geq 1$, auquel des 3 groupes du théorème est isomorphe $G = GL_2/\mu_n$?

[Rép : si $n = 2k+1$, $GL_2/\mu_n \xrightarrow{\sim} GL_2$, $M \mapsto (\det M)^k M$

si $n = 2k$ $\quad GL_2/\mu_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m \times PSL_2$, $M \mapsto ((\det M)^k, M)$]

2. Groupes réductifs scindés, exemples de SL_2 et GL_n

Dans le § suivant on énoncera le th. de structure qui montre qu'un groupe réductif scindé est fabriqué à partir de groupes réductifs de rang semi-simple 1, eux-mêmes « modelés » sur SL_2.
Ce jeu de construction est basé sur la décomposition de la représentation adjointe $ad_{|T} : T \to GL(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} = Lie(G)$ d'un tore max.

Avant d'en arriver là il est utile de rappeler en détail la forme de cette représentation :

- pour $G = SL_2$ à cause de son rôle pivot
- pour $G = GL_n$ car c'est l'exemple emblématique, largement représentatif de la situation générale.

$\boxed{G = SL_2}$ $T := \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \right\}$

$X(T_2) = \mathbb{Z}\chi$ avec $\chi : \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mapsto t$

$sl_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ a+d=0 \right\}$

$ad: \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & t^2 b \\ t^{-2} c & d \end{pmatrix}$

$sl_2 = t \oplus g_\alpha \oplus g_{-\alpha}$ avec $\boxed{\alpha = 2\chi}$, $g_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $g_{-\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \xrightarrow{\sim} T$ l'isomorphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$. On a:

$$U^+ \stackrel{\text{def}}{=} U(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad Lie(U^+) = g_\alpha$$

$$U^- \stackrel{\text{def}}{=} U(-\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad Lie(U^-) = g_{-\alpha}$$

On a des isomorphismes

$$u_\alpha : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} U^+, \ a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{t.q. } t u_\alpha(a) t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t).a)$$

$$u_{-\alpha} : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} U^-, \ a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{t.q. } t u_{-\alpha}(a) t^{-1} = u_{-\alpha}(-\alpha(t)a)$$

Les Borels contenant T sont $B^+ = U^+T$ et $B^- = U^-T$.

Soit $n_\alpha = u_\alpha(1) u_{-\alpha}(-1) u_\alpha(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$N_G(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ -a & 0 \end{pmatrix} \right\} = T \amalg T n_\alpha$$

$W(G,T) = \{1, s\}$ où $s = \overline{n_\alpha}$; $n_\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ donc

s agit comme -1 sur T et échange B^+ et B^-

Enfin soit le cocaractère $\alpha^\vee : \mathbb{G} \to T$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$. Alors

$$\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2 = \langle -\alpha, -\alpha^\vee \rangle \qquad (\forall \chi \in X(T))$$

$$s(\chi) = s_\alpha(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha \qquad s(\chi) = s_{-\alpha}(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \chi - \langle \chi, -\alpha^\vee \rangle (-\alpha).$$

(A_n) SL_{n+1} (B_n) SO_{2n+1} (C_n) Sp_{2n} (D_n) SO_{2n}

Soit k quelconque, (G,T) réductif scindé, $Ad : G \to Gl(\mathfrak{g})$ (1)
la rep. adjointe. Comme T est diagonalisable, on a une déc.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in X(T)} \mathfrak{g}_\alpha \qquad (\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^T)$$

les $\alpha \neq 0$ qui apparaissent sont en nb fini, appelés racines
de (G,T), et leur ensemble noté $\Phi(G,T)$.

On a $\mathfrak{g}_0 = Lie(G)^T = Lie(G^T) = Lie(C_G(T)) = Lie(T)$

T maximal

Lie est exact à gauche :

$$\begin{aligned} Lie(G)^T(R) &= \{x \in \mathfrak{g}(R),\ tx = x\ \forall t \in T(R)\} \\ &= \{x \in G(R[\varepsilon]),\ x = 1 \bmod \varepsilon,\ tx = x\ \forall t\} \\ &= \{x \in G(R[\varepsilon]),\ tx = x\ \forall t,\ x = 1 \bmod \varepsilon\} \\ &= \{x \in Lie(G^T)(R)\}. \end{aligned}$$

donc $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} = \mathfrak{t}$ = une ss.-alg de Cartan ou torale max.

Lm $W(G,T) = N_G(T)/T \curvearrowright X(T)$ stabilise $\Phi(G,T)$.

Dém • $s = \bar{n}$ agit par $s.\chi : t \mapsto \chi(n^{-1}tn)$. ~~Si $\alpha \in \Phi(G,T)$~~
~~et $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, i.e. $tx = \alpha(t)x$, alors je dis que s~~

~~Dém • $s = \bar{n}$ agit~~

• W permute les $\mathfrak{g}_\alpha$: comme les $\mathfrak{g}_\alpha$ sont T-stables
ISM N permute les $\mathfrak{g}_\alpha$. Soit $n \in N(k)$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ ie $(x \neq 0)$
$tx = \alpha(t)x$, alors

action adj.

$$\begin{aligned} t.(nx) &= n.(\underbrace{n^{-1}tn}_{\in T} \cdot x) = n.(\alpha(n^{-1}tn) \cdot x) \quad \text{car } x \in \mathfrak{g}_\alpha \\ &= \alpha(n^{-1}tn).\, nx \quad \text{car } n \text{ est linéaire} \\ &= (s\alpha)(t)(nx). \end{aligned}$$

On voit que $nx \in \mathfrak{g}_{s\alpha}$ avec $nx \neq 0$, $s\alpha \neq 0$

Ceci mq $\mathfrak{g}_{s\alpha} \neq 0$ donc est l'un des espaces propres, i.e. $s\alpha \in \Phi(G,T)$.

Ceci dit ⚠ Milne écrit sx ce qui n'a pas de sens car T n'agit pas triv. sur $\mathfrak{g}_\alpha$ donc W n'agit pas. ☒

Ex $\boxed{(G,T) = (GL_2, T)}$ $\quad X(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}\chi_1 \oplus \mathbb{Z}\chi_2$

où $m_1\chi_1 + m_2\chi_2 : \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \mapsto t_1^{m_1} t_2^{m_2}$.

$\mathfrak{gl}_2 = M_2(k)$ avec crochet.

$$\mathrm{Ad} : \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1^{-1} & 0 \\ 0 & t_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{t_1}{t_2} b \\ \frac{t_2}{t_1} c & d \end{pmatrix} \quad (*)$$

on voit que T est trivial sur $kE_{11} \oplus kE_{22}$

$\alpha := \chi_1\chi_2^{-1}$ sur $E_{12} = \mathfrak{g}_\alpha$ $\qquad \Phi(G,T) = \{\alpha, -\alpha\}$

$-\alpha := \chi_2\chi_1^{-1}$ sur $E_{21} = \mathfrak{g}_{-\alpha}$

$\boxed{G = SL_2}$ $\quad T = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ agit sur $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} a & t^2 b \\ t^{-2}c & d \end{pmatrix}$

$\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$ avec $\alpha : \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mapsto t^2$

$\boxed{G = PGL_2}$ $\quad T = \left\{\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\right\}/Z \qquad 0 \to Z \to \tilde{T} \to T \to 0.$

$$0 \to X(T) \to X(\tilde{T}) \to X(Z) \to 0.$$

$X(T) = \{\chi \in X(\tilde{T}),\ m_1 + m_2 = 0\}$

$X(T) = \mathbb{Z}\chi.$ $\quad \chi : \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \mapsto t_1/t_2.$

$\mathfrak{z}$ = centre au sens algèbre de Lie

$$\mathfrak{pgl}_2 = \mathfrak{gl}_2 / \{\text{matrices scalaires}\} = \mathfrak{gl}_2/\mathfrak{z}$$

Rem pour un plongement linéaire de $PGL_2 = PGL(V)$ $\quad V = k^2$

on peut considérer
$$\underset{GL(V)}{GL_2} \to GL(\mathrm{End}(V))$$
$$g \mapsto c_g : f \mapsto gfg^{-1}$$

qui induit $PGl_2 \hookrightarrow GL_4$ puis $pgl_2 \hookrightarrow gl_4 = M_4$ ☒ ③

T agit par conjugaison et les scalaires agissent triv.

$\boxed{G = Gl_n}$ $X(T) = \mathbb{Z}\chi_1 \oplus .. \oplus \mathbb{Z}\chi_n$, $\chi_i : \mathrm{diag}(t_1 .. t_n) \mapsto t_i$

$gl_n = M_n$ et $\begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix} \cdot \left(a_{ij} \right) = \left(\frac{t_i}{t_j} a_{ij} \right)$ $\alpha_{ij} := \chi_i - \chi_j$ sont les racines

$g_{\alpha_{ij}} = k E_{ij}$ de dim 1, $\Phi(G,T) = \{ \alpha_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n, i \neq j \}$ en nb $n^2 - n$

<u>Q</u> : dans § 21.6 pourquoi utiliser $X^*(T) = \mathrm{Hom}(T_{k_s}, \mathbb{G}_{m,k_s})$ plutôt que $X(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ sachant que G est scindé et que donc tous les groupes de caractères qui apparaissent ~~[illegible]~~ ont $X = X^*$?

•———•