Sous-groupes de Borel, 3

(et paraboliques)

7 oct 2021

Matthieu

On continue avec G affine, lisse, connexe. Nous étions restés à :

Cor: $k=\bar{k}$. Pour un sous-groupe $H \subset G$ lisse et connexe, LCSSE :

(a) H est un Borel (ie résoluble maximal),

(b) H est résoluble et G/H est propre,

(c) H est un parabolique minimal.

Dém (a) $\Rightarrow$ (b) OK

(b) $\Rightarrow$ (c) il suffit de mq H est minimal. Or si $H \supset P$ parabolique, par le th. précédent P contient un Borel B, et l'inclusion $H \supset B$ avec H résoluble force $H=B$ donc $H=P$

(c) $\Rightarrow$ (a) Par le th H contient un Borel B. Comme B est parabolique et H minimal, on a $H=B$ qui est donc Borel ⊠

Nous donnons un dernier résultat important sur les paraboliques avant de les quitter provisoirement : on pourra y revenir plus tard pour les décrire en termes de racines dans un groupe réductif, mais leur utilisation n'est pas nécessaire pour obtenir le th. de structure des groupes réductifs déployés.

Il s'agit du « théorème du normalisateur » de Chevalley :

<u>Th</u> (Chevalley) Soit k quelconque et G affine lisse connexe. Alors tout parabolique P est <u>connexe</u> et <u>égal à son normalisateur</u> :

$$N_G(P) = P.$$

<u>Dém</u> La démonstration est assez difficile et pas vraiment utile pour nous. On l'omet et on renvoie à Milne, 17.48, 17.49 ⊠

<u>Commentaire final</u> de comparaison entre ss-gr résolubles et paraboliques

Dans un groupe affine lisse connexe G, nous avons étudié deux familles de sous-groupes qui sont sympathiques pour des raisons très différentes :

- les ss-groupes résolubles : leur structure algébrique est relativement simple (dévissage en groupes abéliens ; extension $1 \to U \to G \to T \to 1$ sur un corps parfait, scindée sur un corps alg. clos), leurs actions sur des var. propres sont contraintes (th de point fixe de Borel), leurs orbites sont "simples" (th. de Rosenlicht).
  $\mathbb{A}^m \times (\mathbb{A}^*)^n$

- les ss-groupes paraboliques P : la propreté (= compacité = "petitesse") les contraint à être "gros", leur structure algébrique est contrainte par le th. du normalisateur. Et surtout, la projectivité de la variété G/P est la source d'une profusion de représentations de G de dim finie (propreté ⇒ th. de finitude)

$$H^i(G/P, \mathcal{F}).$$

un G-faisceau cohérent
(faisceau avec G-action)

Avec certains fibrés en droites (= cohérents loc. libres de rang 1) particuliers, on fabriquera ainsi des représentations irréductibles de G (en fait, toutes) de la forme $H^0(G/P, \mathcal{L})$.

Compte tenu des propriétés des groupes de ces deux familles, la position (et l'existence même) des Borels est remarquable : ils sont à la fois résolubles maximaux et paraboliques minimaux.
Ils jouissent simultanément de toutes les propriétés de ces ss-groupes.

3. Sur un corps quelconque : remarques et exemples

Sur k quelconque,

<u>Déf</u> un <u>Borel</u> de G est un ss-gr lisse, connexe, résoluble B tel que G/B est propre.

C'est équivalent à dire que $B_{\bar{k}}$ est un Borel de $G_{\bar{k}}$, mais ce n'est <u>pas</u> équivalent à la propriété de maximalité donnée plus haut lorsque $k=\bar{k}$. En fait, je crois (?) que les ss-groupes connexes résolubles maximaux n'ont même pas la même dimension en général (et G/B n'est pas propre).

Un problème est qu'il peut ne pas exister de Borel :

<u>Exemple</u> (à faire) sur $k=\mathbb{R}$, $G=\mathbb{H}^\times = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[a,b,c,d,(a^2+b^2+c^2+d^2)^{-1}]$ le groupe des quaternions inversibles $q=a+bi+cj+dk$.
Je dis que celui-ci n'a pas de Borel. S'il en avait un $B\subset G$, alors $B_{\mathbb{C}}$ serait un Borel de $G_{\mathbb{C}} \simeq GL_{2,\mathbb{C}}$. Il suffit d'écrire un iso explicite $G_{\mathbb{C}} \simeq GL_{2,\mathbb{C}}$ et de vérifier qu'aucun Borel ne descend à $\mathbb{R}$ i.e. n'est $\operatorname{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-invariant. À faire ! ...

Pour les tores max la situation est très différente, par un théorème de Grothendieck très difficile :

<u>Th</u> Si G est affine lisse sur k quelconque : [SGA3, Exp $\overline{\underline{XIV}}$]

(1) il existe un tore $T \subset G$ tel que $T_{\bar{k}} \subset G_{\bar{k}}$ est maximal ;

(2) mieux, tout tore k-maximal est $\left\{\begin{array}{l}\bar{k}\text{-maximal.} \\ \text{géométriquement maximal}\end{array}\right.$

En particulier, $\dim(T)$ est indépendant du choix de T car les tores max deviennent conjugués sur $\bar{k}$. Cependant ils ne le sont pas sur k en général :

<u>Exemple</u> $G = GL_{2,\mathbb{R}}$ contient des tores max scindés comme $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$

n'a pas de droite stable dans $\mathbb{R}^2$

et des non scindés comme $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Il y a en fait exactement 2 classes de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de tores max.

Ceci mène aux définitions suivantes :

<u>Déf</u> Soit G affine (?) lisse connexe sur k quelconque

- G est <u>scindé</u> s'il possède un tore max scindé ie $T \simeq \mathbb{G}_{m,k}^n$ (ou déployé)
- G est <u>quasi-scindé</u> (ou quasi-déployé) s'il possède un Borel.

<u>Rem</u> il est vrai que déployé $\Rightarrow$ quasi-déployé mais ce n'est pas évident ; le lien suivant sera plus facile à lire dans quelques exposés :

https://math.stackexchange.com/questions/3046718/why-is-split-algebraic-group-quasi-split

En l'absence de sous-groupe de Borel, le meilleur substitut est fourni par les paraboliques minimaux. Si G est réductif, ceux-ci sont tous $G(k)$-conjugués (Milne, Th 25.8). (k quelconque !)

Un groupe algébrique non quasi-déployé

Soit $k=\mathbb{R}$ et $G=\mathbb{H}^\times$ le groupe des quaternions réels inversibles :

$$G = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{R}[a,b,c,d,(a^2+b^2+c^2+d^2)^{-1}]\right)$$

avec le produit des quaternions. On sait que $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-forme de M_2 et voici comment en témoigner précisément :

$$\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M_{2,\mathbb{C}}$$
$$I \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$
$$J \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$K=IJ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \text{ (= le produit des 2 précédentes)}$$

L'algèbre $\mathbb{H}$ vue dans $\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ s'identifie aux $a+bI+cJ+dK$ (a,b,c,d réels) i.e. aux matrices $\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}$. Voyons comment l'isomorphisme précédent transforme la conjugaison complexe, pour comprendre ensuite la descente galoisienne. Une matrice $M=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ s'écrit

$$M = \frac{r+u}{2} + \frac{r-u}{2i} I + \frac{t-s}{2} J - \frac{t+s}{2i} K$$

$$\text{donc } \bar{M} = \frac{\bar{r}+\bar{u}}{2} - \frac{\bar{r}-\bar{u}}{2i} I + \frac{\bar{t}-\bar{s}}{2} J + \frac{\bar{t}+\bar{s}}{2i} K \quad \left(\text{conjugué dans } \mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right)$$

Finalement la conjugaison $\sigma\in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ vue dans $M_2(\mathbb{C})$ est

$$\sigma : \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{u} & -\bar{t} \\ -\bar{s} & \bar{r} \end{pmatrix}.$$

Les points fixes $M_2(\mathbb{C})^\sigma$ sont les matrices tq. $t=-\bar{s}$ et $u=\bar{r}$, ce qui donne bien les matrices $\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}$ vues plus haut.

Le tore max $T_{\mathbb{C}} \subset M_{2,\mathbb{C}}$ d'équations $\{s=t=0\}$ (diagonal) est σ-stable donc descend en un tore max $T \subset G$ d'éq. $\{s=t=0, u=\bar{r}\}$ qui est $T = \{c=d=0\} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{R}[a,b,(a^2+b^2)^{-1}]\right)$ tore non scindé.

On voudrait voir qu'aucun Borel de $GL_{2,\mathbb{C}}$ n'est σ-stable.

Tous les Borels sont conjugués (au sens des automorphismes intérieurs et non pas de la conjugaison complexe!) de $B := \left\{\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & u\end{pmatrix}\right\} = \{t=0\}$.

Un tel conjugué est un $B' = gBg^{-1}$ où l'on peut supposer $g \in SL_2(\mathbb{C})$:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \qquad \sigma g = \begin{pmatrix} \bar{\delta} & -\bar{\gamma} \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \sigma g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix}.$$

On veut donc voir que $\sigma g\, \sigma B\, \sigma g^{-1} \neq g B g^{-1}$

$$\text{càd } g^{-1}\sigma(g).\sigma(B).(g^{-1}\sigma(g))^{-1} \neq B.$$

Or $g^{-1}\sigma(g) = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\delta} & -\bar{\gamma} \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\bar{\delta} + \beta\bar{\beta} & -\delta\bar{\gamma} - \beta\bar{\alpha} \\ -\gamma\bar{\delta} - \alpha\bar{\beta} & \gamma\bar{\gamma} + \alpha\bar{\alpha} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f & e \\ \bar{e} & g \end{pmatrix}$ $\quad f,g \in \mathbb{R}_{>0}$, $e \in \mathbb{C}$

$\underline{\text{NB}}$ $\varphi := g^{-1}\sigma(g)$ vérifie $\varphi^{-1} = \sigma(g^{-1})g = \sigma(\varphi)$, donc $\varphi.\sigma B.\varphi^{-1} = \varphi.\sigma B.\sigma(\varphi)$ dont les éléments sont de la forme

$$\begin{pmatrix} f & e \\ \bar{e} & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{u} & 0 \\ -\bar{s} & \bar{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & -e \\ -\bar{e} & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fg\bar{u} - eg\bar{s} - e\bar{e}\bar{r} & -ef\bar{u} + e^2\bar{s} + ef\bar{r} \\ \bar{e}g\bar{u} - g^2\bar{s} - \bar{e}g\bar{r} & -e\bar{e}\bar{u} + eg\bar{s} + fg\bar{r} \end{pmatrix}.$$

Dire que ceci appartient à B c'est dire $\bar{e}g\bar{u} - g^2\bar{s} - \bar{e}g\bar{r} = 0$ $\quad \forall r,s,u$

ou encore $\boxed{e(u-r) = gs}$ $\quad \forall r,s,u$ (des variables)

Or il n'existe aucun triplet $(e,f,g) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2_{>0}$ tel que cette relation ait lieu dans le Borel B, cqfd.