Sous-groupes de Borel, 2
(et paraboliques)

30 Sept 2021
Matthieu

$k :=$ un corps

1. Résumé du dernier exposé (revisité)

Dans cet exposé les groupes alg. sont affines (on le répète parfois par sécurité).
La dernière fois nous avons démontré le « th du point fixe de Borel »:

<u>th</u> Soit G lisse, connexe, résoluble. Si G agit sur un k-schéma propre et non vide X, alors X^G est non vide. En particulier $X(\bar{k})^{G(\bar{k})} \neq \emptyset$.

Nous avons donné la dém. du livre de Borel. Celle du livre de Milne est un peu différente; elle s'appuie sur un résultat sur les orbites:

<u>Th 1</u>: Soit G lisse, connexe, résoluble. Pour tout ss-schéma en groupes $H \subset G$, l'espace homogène G/H ne contient de ss-schéma <u>propre</u> de dimension >0.

<u>Dém</u> Milne, th 17.1 $\boxtimes$

La démo. est élémentaire; un résultat bien meilleur peut être obtenu avec (beaucoup) plus de travail, nous le citons pour la culture:

<u>th</u> (Rosenlicht) (★) sous les hypothèses précédentes, après tout changement de base $k \to l$ qui scinde(*) G, on a un isom: $G/_H \simeq \mathbb{A}^m \times (\mathbb{A}^*)^n$ où $\mathbb{A}^m =$ espace affine et $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} =$ droite épointée. $\boxtimes$

(*) G est scindé s'il possède une suite de composition à quotients $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}_m$; on peut prendre $l = \bar{k}$.

Le th. de pt fixe découle du th 1 car une orbite $O \subset X$ de G de dimension minimale est fermée (lemme de l'orbite fermée) donc propre sur k. Or si G est lisse connexe, toute orbite l'est aussi. Par th 1 l'orbite O est de dim 0, connexe, donc ponctuelle. $\boxtimes$

(★) Réf M. Brion, Homogeneous varieties under split solvable algebraic groups, Indagationes Math. 2021

<u>Remarque</u> une « orbite » est ici l'orbite d'un point de l'espace topologique $|X|$, ou pour mieux le dire, un $\bar{k}$-point $x \in X(\bar{k})$. Elle ne devient isomorphe à G/H $(H = G_x)$ qu'après passage au corps résiduel $\kappa(x)$ de x. On peut avoir $X^G(k) = \emptyset$: bêtement, prendre $X = \mathrm{spec}(\ell)$ avec ℓ/k ext. non triviale de k et G agissant trivialement ...

<u>Cor</u> (Lie-Kolchin) Soit G lisse, connexe, résoluble sur $\boxed{k = \bar{k}}$.
Alors G est trigonalisable.

<u>Dém</u> on choisit (Chevalley) une repr. linéaire de dim finie <u>fidèle</u> V. Alors G agit sur la variété des drapeaux complets de V, qui est projective. Par th. de Borel il existe un drapeau fixe ⊠

<u>Remarque</u> les 3 hyp. lisse, connexe, résoluble sont nécessaires :

1. lisse : si $\mathrm{car}(k) = 2$ notons $G = {}_F SL_2$ le noyau de Frobenius. Alors que SL_2 est simple, celui-ci est résoluble (étonnant !) :
(même nilpotent)

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow G \longrightarrow \alpha_2 \times \alpha_2 \longrightarrow 1 .$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (ab, cd)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = d^2 = 1 \\ b^2 = c^2 = 0 \\ ad + bc = 1 \end{array}}$$

vérif. que $\varphi : M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ab$ est un morphisme :

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_1 + d_1d_2 \end{pmatrix} \overset{\varphi}{\longmapsto} (a_1a_2 + b_1c_2)(a_1b_2 + b_1d_2)$$
$$= a_2b_2 + a_1a_2b_1d_2 + a_1b_1b_2c_2$$
$$= a_2b_2 + a_1b_1$$
$$= \varphi(M_1) + \varphi(M_2).$$

Il y a une action de G sur $\mathbb{P}^1$ donnée par

$$G \hookrightarrow SL_2 \longrightarrow PGL_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1).$$

Je dis que cette action est sans point fixe. Notons

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \in \alpha_2 \right\} \quad , \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, c \in \alpha_2 \right\}$$

les sous-groupes de G qui se projettent isomorphiquement sur les deux facteurs α_2 de la suite exacte précédente. (Chacun des α_2 se relève en un sous-groupe de G mais leur produit ne se relève pas.)

Posons $X = \mathbb{P}^1$, comme $X^G \subset X^H \cap X^K$ il suffit de montrer

$$X^H \cap X^K = \emptyset.$$

Il suffit de vérifier ceci sur $\bar{k}$. On utilise le recouvrement de $\mathbb{P}^1$ par les deux cartes standard :

$$U = \mathbb{A}^1_0 = \operatorname{spec} k[t] \quad \text{et} \quad V = \mathbb{A}^1_\infty = \operatorname{spec} k[1/t].$$

<u>$X^H \cap U$</u> contient les x tels que $x + b = x$, $\forall b \in \alpha_2$: aucune solution $\boxed{X^H \cap U = \emptyset}$

détail / reformulation algébrique : on cherche les $\operatorname{spec} k \xrightarrow{x} U$ tels que

$$\begin{tikzcd} H = H \times \operatorname{spec} k \arrow[r, "x"] \arrow[dr] & H \times U \arrow[r, "\text{action}"] & U \\ & \operatorname{spec} k \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

rem : la carte U est H-stable

est commutatif, càd $k[t] \underset{t \mapsto x}{\overset{t \mapsto x+b}{\rightrightarrows}} k[b]/(b^2)$ sont égales : impossible

(ici x vu comme un élément de k et $\operatorname{spec} k \xrightarrow{x} U$ est $\underset{t \mapsto x}{k[t] \to k}$)

<u>$X^H \cap V$</u> la carte V est également H-stable et l'action y est donnée par $y = \frac{1}{x} \mapsto \frac{1}{x+b} = \frac{y}{1+by} = y(1-by) = y - by^2$.

Les points fixes sont solution de $y = y - by^2$ $\forall b \in \alpha_p$

$$by^2 = 0$$

Le sous-schéma de pts fixes est défini par l'équation $y^2=0$:

$$\boxed{X^H \cap V = \mathrm{Spec}\left(\frac{k[y]}{(y^2)}\right) = 2\cdot\infty}$$ (le point ∞ avec multiplicité 2)

Le sous-groupe K est conjugué de H par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2$ qui vue dans PGL_2 est l'homographie $(x \mapsto \frac{1}{x})$ qui échange 0 et ∞. Le calcul de X^K est donc le même en échangeant le rôle de 0 et ∞.

Finalement on trouve $X^H = 2\cdot\infty$, $X^K = 2.0$ et $X^H \cap X^K = \emptyset$.

Voici un deuxième exemple de groupe connexe, résoluble non lisse agissant sans pt fixe sur une var. projective. On prend $X=E$ une courbe elliptique en caractéristique $p>0$. Le sous-schéma de p-torsion $E[p] = \ker(p : E \to E)$ peut présenter deux types de comportement, géométriquement :

$$\begin{cases} E[p]_{\bar{k}} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mu_p & \text{ordinaire} \\ E[p]_{\bar{k}} \ \text{infinitésimal (ie connexe)} & \text{supersingulière} \end{cases}$$

cad après $\otimes_k \bar{k}$

et dans tous les cas $G := E[p]$ n'est pas lisse (NB μ_p non lisse !).

Comme sous-groupe du groupe ambiant $X=E$, le groupe G agit sur X par translation. Cette action est <u>libre</u> donc $X^G = \emptyset$.

(et X est projectif !).

2. connexe : même exemple avec une courbe elliptique ordinaire pour laquelle, si $k=\bar{k}$, on a $E[p] \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mu_p$. On prend $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agissant par translation sur E.

3. résoluble : PGL_{n+1} (réductif) $= \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) \curvearrowright \mathbb{P}^n$ n'a pas de pt fixe.
($PGL_2 \curvearrowright \mathbb{P}^1$)

Déf Supposons $k = \bar{k}$ (pour k quelconque voir plus loin).
Soit G affine lisse connexe. Un (sous-groupe de) Borel de G est un sous-groupe lisse connexe résoluble maximal.

Th On suppose que $k = \bar{k}$. Soit G/k affine lisse connexe et B un Borel.

(1) G/B est une variété projective.

(2) Tout Borel B' est conjugué à B par un élément $g \in G(k)$.

Pour la dém, on réalise B comme stabilisateur d'un drapeau $\mathcal{D}$, et B étant de dim maximale, l'orbite $\mathcal{O}(\mathcal{D}) \simeq G/B \hookrightarrow \mathcal{F}\ell(V)$ est de dim minimale donc fermée donc projective$/k$. projective

Ensuite on fait agir B' sur G/B et le th de point fixe de Borel produit un pt fixe gB d'où $B' = gBg^{-1}$ $\boxtimes$

Cor $k = \bar{k}$ toujours. Les tores maximaux de G coïncident avec les tores maximaux des Borels de G, et sont tous conjugués par un élément de $G(k)$.

Dém Alice et Matilde ont fait un rappel. $\boxtimes$

Il est grand temps d'introduire les sous-groupes paraboliques.

2. Sous-groupes paraboliques

Déf (k quelconque) G affine lisse connexe : on appelle sous-groupe
peut-être pas vital
parabolique un sous-groupe lisse $P \subset G$ tel que G/P est propre.

Remarque (aurait pu être faite plus tôt) : "projective" implique "propre" comme conséquence importante de la théorie de l'élimination.
La réciproque n'est pas vraie, mais propre + quasi proj $\Rightarrow$ projective.
Mais un théorème de Chow (1957) affirme que les espaces homogènes de groupes algébriques affines lisses connexes sont quasi-projectifs ; donc pour eux propre $\Leftrightarrow$ projectif.

Th ($k = \bar{k}$) $P \subset G$ est parabolique ssi il contient un Borel.

Dém Si P contient un Borel B, on a une surjection $G/B \to G/P$ et G/B propre implique alors G/P propre.
Réciproquement soit $B \subset G$ un Borel, qu'on fait agir sur G/P par translations à gauche ($b \cdot gP = bgP$). Par th de point fixe de Borel il existe un point fixe : $BgP = gP$, $g \in G(k)$.
C'est équivalent à $Bg \subset gP$ i.e. $g^{-1}Bg \subset P$ $\boxtimes$

Cor Pour un sous-groupe lisse connexe $H \subset G$, LCSSE :

(a) H est un Borel (ie résoluble maximal)

(b) H est résoluble et G/H est propre

(c) H est un parabolique minimal.

Dém La prochaine fois !