Sous-groupes de Borel

Mathieu le 14.06.2021

<u>Déf</u> un k-groupe (~~[illegible]~~) algébrique G est <u>résoluble</u> s'il possède une suite de composition

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_t = 1$$

telle que chaque G_i/G_{i+1} est <u>commutatif</u>.

Autrement dit, G est construit par extensions successives de groupes commutatifs. Si G est résoluble, on montre que

$$G \triangleright \mathcal{D}(G) \triangleright \mathcal{D}^2(G) \triangleright \cdots \qquad \underline{\text{suite dérivée}}$$

stationne à 1, on peut donc toujours la choisir dans la déf.

<u>Déf</u> Soit G un k-gr. alg affine lisse connexe

On appelle ss. groupe de Borel un sous-groupe alg $B \subset G$ lisse, connexe, résoluble, maximal (pour l'inclusion).

<u>Ex 1</u> $B = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \subset GL$, <u>rem 1</u> : $B = U \rtimes T$

rem 2 : B n'est pas distingué !

<u>Ex 2</u> Groupes unipotents et de type mult. sont résolubles.

<u>Lm</u> (orbite fermée) Soit G un k-groupe algébrique lisse agissant sur un k-schéma de type fini X. Soit $x \in X(k)$. Alors l'évaluation $G \xrightarrow{ev} X$, $g \mapsto g(x)$ induit un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{ev} & X \\ {\scriptstyle \text{fid. plat}} \downarrow & & \uparrow {\scriptstyle \text{fermé réduit}} \\ G/H & \underset{\text{ouvert}}{\hookrightarrow} & \overline{G/H} \end{array}$$

lisse

où $H = G_x = G \times_{X \times X} X$ stab de x et $\overline{G/H}$ = ss. sch. fermé réduit

On appelle $O(x) := G/H$, ss. sch. localement fermé de x, l'orbite de x.

De plus $\partial O := \bar{O} \setminus O$ est une réunion d'orbites de G

En particulier, toute orbite de dim minimale est fermée.

Dém (idées) par th de Chevalley l'image O de $ev : G \to X$ est constructible donc contient un ouvert de son adhérence. Donc elle possède un point intérieur, donc par homogénéité tous les points sont intérieurs, i.e. elle est ouverte dans son adhérence $\bar{O}$.

De plus clairement ~~$\bar{O} \setminus O$ est~~ $\bar{O}$ est G-stable, donc $\bar{O} \setminus O$ aussi, donc est réunion d'orbites de dimension inférieure.

On admet que la factorisation
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[dr] & X \\ & G/H \arrow[u, "\text{mono}"'] \end{tikzcd}$$
rend G/H isomorphe à O comme ouvert de $\bar{O} = \mathrm{imsch}(ev)$ $\boxtimes$

Th (pt fixe de Borel)

Soit G/k (affine) connexe lisse résoluble agissant sur une k-variété propre X. Alors G a un pt fixe.

Dém Récurrence sur $d = \dim G$. Si $d = 0$ rien à dire

Si $d > 0$ notons $N = \mathcal{D}(G)$ lisse, connexe (ss-groupe dérivé) de dim $< d$ donc $F = X^N$ est propre, non vide.

Comme $N \triangleleft G$, F est G-stable.

Soit $x \in F$ point d'orbite $O(x)$ fermée, donc propre.

Comme $N = \mathcal{D}(G) \subset G_x$, on a $G_x \lhd G$.

Il' s'ensuit que l'on a :

$$G/G_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(x)$$

affine $\nearrow$ $\quad$ $\uparrow$ propre

+ lisse, connexe $\Rightarrow$ 1 point

<u>Cor</u> (Lie-Kolchin) Soit $\rho : G \to GL(V)$ une rep. linéaire d'un k-groupe alg affine lisse connexe <u>résoluble</u>.

Si $k = \bar{k}$, G laisse un drapeau invariant

$$W_0 = 0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_n = V$$

i.e. la rep. est trigonalisable.

<u>Dém</u> Soit X la variété des drapeaux : $X = \{ W_\bullet = (\ldots W_i \ldots) \}$ $\mathcal{F}(V)$

on a un morphisme

$$X = \mathcal{F}(V) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}(V)$$

$$0 = W_0 \subset \ldots \subset W_n \longmapsto W_1$$

surjectif, de fibres $\pi^{-1}(W_1) = \{ \text{drapeaux qui complètent } W_1 \}$

$$= \mathcal{F}\ell(V/W_1)$$

Par récurrence ceci montre que $\mathcal{F}\ell(V)$ est propre et on applique le point fixe de Borel ☒

<u>th</u> $k = \bar{k}$ soit G un k-gr. affine lisse connexe

(a) Pour tout Borel $B \subset G$, G/B est propre

(b) $\cancel{\forall B_1, B_2 \subset G}$ Deux Borels quelconques sont conjugués par un élément de $G(k)$ –

$(k = \bar{k})$!

<u>Dém</u> : Soit B un Borel de dim maximale.
(parmi tous les ss groupes de Borel.)

Soit V une rep. de G telle que B est le stabilisateur d'une droite L. D'après Lie-Kolchin B stabilise un drapeau complet de V/L donc un drapeau complet

$$\mathcal{F}_0 : \quad V = V_n \supset \dots \supset V_1 = L$$

de V. De plus $B = \mathrm{Stab}_V L \Rightarrow B = \mathrm{Stab}_{\mathcal{F}(V)} \mathcal{F}_0$ pour l'action de G sur la variété de drapeaux $\mathcal{F}(V)$.
(Si $g \in G$ stabilise $\mathcal{F}_0$ il stabilise V_1 donc $\in B$).

Pour l'action de G sur $\mathcal{F}(V)$, l'orbite d'un drapeau F donné est $O(F) = G/G_F$ où G_F, stabilisateur d'un drapeau, est un ss. groupe résoluble de G.
Comme B est choisi de dim <u>maximale</u>,

$$\dim O(F_0) = G/B$$

est une orbite de dim <u>minimale</u> donc <u>fermée</u> par le lemme de l'orbite fermée. Alors $G/B = O(F_0) \overset{\text{f}}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(V)$ est projective.

~~Enfin soient B, B' deux Borels~~. Soit B' un second Borel, de dim quelconque cette fois. Il agit sur G/B qui est projective, donc a un point fixe : $B'xB \subset xB$ pour un $x \in G(k)$. On déduit que $x^{-1}B'xB \subset B$ puis $x^{-1}Bx \subset R$. Comme B est maximal résoluble, on a égalité. $\boxtimes$

<u>Cor</u> (1) les tores maximaux de G coïncident avec les tores max. des Borels de G, et sont tous conjugués par $G(k)$ (rappel $k=\bar{k}$!)

(2) les ss-gr connexes unipotents maximaux de G sont tous égaux au ss-gr unipotent maximal d'un ss-gr de Borel, et sont tous conjugués par $G(k)$.

<u>Dém</u> : (1) Un tore max est connexe résoluble donc $\subset B$ pour un Borel B. C'est évidemment un tore max de B. Par conjugaison des tores max dans un groupe résoluble, si $T, T' \subset G$ sont tores max on a $T \subset B$, $T' \subset B'$, or $B' = gBg^{-1}$ par le th précédent donc $gTg^{-1} \subset B'$ donc $gTg^{-1} = bT'b^{-1}$ pour un $b \in B(k)$.

(2) Si V est connexe unipotent il est résoluble donc inclus dans un Borel B. Si V est maximal, il est égal au ss-gr. unipotent maximal de B. Le th. précédent implique une fois encore la conjugaison.

<u>Remarque</u> si G résoluble (affine lisse connexe) et $k = \bar{k}$ (parfait suffit)

alors $G \hookrightarrow T_n = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$ par Lie Kolchin

donc il existe $U := G \cap U_n$ unipotent distingué tel que

$$T := G/U \hookrightarrow T_n/U_n = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \text{ est de type mult.}$$

Un $U \triangleleft G$ unip. dist. avec G/U de type mult contient tous les ss-gr unipotents V de G, car

$$V \to G \to G/U \quad \text{est } \underline{\text{trivial}}.$$

En particulier un tel U est unique.

On admet (pour gagner du temps) que si $k = \bar{k}$, l'extension

$$1 \to U \to G \to G/U = T \to 1$$

est scindée, i.e $G \cong U \rtimes T$.

Alors pour tout tore max $T' \subset G$ on a

$$T' \to G \to G/U = T$$

<u>injectif</u> $(T' \cap U = 1)$