Panorama sur les groupes algébriques

Matthieu Romagny, lundi 8 mars 2021

∴

Prérequis : la définition d'un groupe ; la définition d'un schéma ; le lemme de Yoneda.

On fixe un corps k. On appelle *k-groupe algébrique* un k-schéma de type fini G muni de morphismes $m : G \times_k G \to G$, $i : G \to G$ et $e : \mathrm{Spec}(k) \to G$ vérifiant les axiomes habituels pour un groupe, sa multiplication, son inversion, et son élément neutre. On rencontrera occasionnellement des k-groupes *localement* algébriques pour lesquels $G \to \mathrm{Spec}(k)$ est seulement localement de type fini.

Dans cet exposé on présente trois familles d'exemples : les groupes d'automorphismes, les groupes de Picard et les groupes d'unités.

1 Groupes d'automorphismes

Soit X un k-schéma. Pour tout changement de base $S \to \mathrm{Spec}(k)$, on note $X_S = X \times_k S$.

Théorème (Grothendieck 1961, Matsumura et Oort 1967)
Si X est un k-schéma propre, le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_{X/k} : \mathrm{Sch}/k \to \mathrm{Grp}$ défini par $\underline{\mathrm{Aut}}_{X/k}(S) = \mathrm{Aut}_S(X_S)$ est représentable par un k-groupe localement algébrique $\mathbf{Aut}_{X/k}$.

Ceci signifie qu'il existe un isomorphisme $\mathrm{Aut}_S(X_S) = \mathrm{Hom}_k(S, \mathbf{Aut}_{X/k})$ fonctoriel en S. Ce théorème est initialement dû à Grothendieck, pour les schémas projectifs X sur un schéma de base S quelconque, puis Matsumura et Oort ont étendu le résultat au cas où X est seulement supposé propre, lorsque $S = \mathrm{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps.

Soit $\mathbf{Aut}^0_{X/k} \subset \mathbf{Aut}_{X/k}$ la composante connexe de l'identité ; c'est un k-groupe algébrique. Peu de choses sont connues sur le groupe des composantes $\mathbf{Aut}_{X/k}/\mathbf{Aut}^0_{X/k}$.

Dans les exemples qui suivent, on note $\mathbf{Aut}(X)$ au lieu de $\mathbf{Aut}_{X/k}$.

1. $\mathbf{Aut}(\mathbb{P}^n_k) = \mathrm{PGL}_{n+1}$.

Une *variété abélienne* est un k-schéma en groupes A propre, lisse, géométriquement connexe ; par exemple une courbe elliptique est une variété abélienne de dimension 1.

2. $\mathbf{Aut}(A) = A \rtimes \mathbf{Aut}_{\mathrm{Grp}}(A)$ pour toute variété abélienne A. Le facteur distingué A est le sous-groupe des translations, et $\mathbf{Aut}_{\mathrm{Grp}}(A)$, le groupe des automorphismes de groupe de A, est un k-groupe étale.

La structure de produit semi-direct s'explique par le *théorème de rigidité* qui affirme qu'un endomorphisme de k-schémas $f : A \to A$ tel que $f(1) = 1$ est un morphisme de groupes algébriques. En prenant $f(x) = x^{-1}$ on en déduit que la structure de groupe de A est commutative ; on note alors $+$ la loi et 0 son neutre. Si A est une courbe elliptique générale, on a $\mathbf{Aut}_{\mathrm{Grp}}(A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendré par le morphisme d'inversion $x \mapsto -x$. Nous n'étudierons pas les variétés abéliennes dans ce groupe de travail.

3. $\mathbf{Aut}_{\mathrm{Grp}}(A)$ contient le groupe discret $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ agissant « comme on pense », si $A = E^n$ est une variété abélienne puissance d'une courbe elliptique E.
4. $\mathbf{Aut}(C) = 1$ si C est une courbe algébrique projective lisse connexe de genre $g \geqslant 2$ *générale* (le genre est $g := \dim H^0(C, \Omega^1_C)$).

5. $\mathbf{Aut}(G/H)$ contient le groupe G/H' où $H' = \cap_{g\in G} gHg^{-1}$ est le plus grand sous-groupe distingué inclus dans H, pour $H \subset G$ groupes algébriques fixés. La variété $X = G/H$ est un *espace homogène*, c'est-à-dire que son groupe d'autorphismes agit transitivement. (On prendra garde au fait que sans hypothèse supplémentaire, le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_{X/k}$ n'est ici pas toujours représentable. Par exemple il ne l'est pas lorsque $G = \mathbb{G}_a$ et $H = 0$, en caractéristique $p > 0$.)

On peut aussi considérer les automorphismes pour d'autres types de structure que des variétés.

6. $\mathbf{Aut}_{\mathrm{Fib}}(\underline{k^n}) = \mathrm{GL}_n$ où $\underline{k^n}$ est le fibré vectoriel canonique de rang n sur $\mathrm{Spec}(k)$.
7. $\mathbf{Aut}_{\mathrm{Grp}}(\mathrm{GL}_n) = \mathrm{PGL}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\mathrm{PGL}_n = \mathrm{Int}(\mathrm{GL}_n)$ est le sous-groupe des automorphismes intérieurs et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par le morphisme $M \mapsto {}^tM^{-1}$ d'inversion-transposition. Plus généralement, pour tout groupe réductif G le groupe algébrique $\mathbf{Aut}_{\mathrm{Grp}}(G)$ est extension du k-groupe étale fini des automorphismes du diagramme de Dynkin de G, par $\mathrm{Int}(G)$.
8. $\mathbf{Aut}_{\mathrm{Alg}}(k[x]/(x^2)) = \alpha_2 \rtimes \mathbb{G}_m$, lorsque k est de caractéristique 2, n'est pas réduit.

2 Groupes de Picard

On rappelle que $\mathrm{Pic}(X)$ est le groupe des classes d'isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang 1 (ou faisceaux inversibles), avec comme multiplication le produit tensoriel. Le fait que c'est un groupe provient du fait que si l'on pose $L^{-1} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(L, \mathcal{O}_X)$ alors le morphisme d'évaluation $L \otimes L^{-1} \to \mathcal{O}_X$ est un isomorphisme.

Au paragraphe précédent, on n'a considéré dans la définition de $\underline{\mathrm{Aut}}_{X/k}(S)$ que les automorphismes de X_S qui préservent S. De même, pour obtenir une bonne définition du foncteur de Picard, on s'affranchit des faisceaux inversibles provenant de S en quotientant par ceux-ci.

Théorème (Grothendieck 1962, Murre 1964)
Si X est un k-schéma propre possédant un point rationnel, le foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} : \mathrm{Sch}/k \to \mathrm{Grp}$ défini par $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}(S) = \mathrm{Pic}(X_S)/\mathrm{Pic}(S)$ est représentable par un k-groupe commutatif localement algébrique $\mathbf{Pic}_k(X)$.

Ici encore le théorème initial est dû à Grothendieck, lorsque $X \to S$ est projectif, plat, à fibres géométriques intègres. Lorsque $S = \mathrm{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps, Murre a étendu le résultat au cas où X est seulement supposé propre.

Soit $\mathrm{NS}(X) := \mathbf{Pic}^0_{X/k} \subset \mathbf{Pic}_{X/k}$ la composante connexe de l'identité ; c'est un k-groupe algébrique et le théorème de Severi et Néron affirme que lorsque k est algébriquement clos, le groupe abélien $\mathrm{NS}(X)$ est de type fini. Dans les exemples qui suivent, on note $\mathbf{Pic}(X)$ au lieu de $\mathbf{Pic}_{X/k}$.

1. $\mathbf{Pic}(\mathbb{P}^n_k) = \underline{\mathbb{Z}}$.
2. $\mathbf{Pic}^0(A)$, pour une variété abélienne A, est une variété abélienne de même dimension que A appelée la *variété abélienne duale*.
3. $\mathbf{Pic}^0(C)$, pour une courbe projective lisse de genre $g \geqslant 2$, est une variété abélienne de dimension g appelée la *Jacobienne* de C. Si C n'est pas lisse $\mathbf{Pic}^0(C)$ est un groupe algébrique commutatif lisse dont on peut analyser la structure en termes des singularités de C. Dans tous les cas $\mathrm{NS}(C) = \mathbb{Z}$.
4. $\mathbf{Pic}(X)$ n'est pas lisse en général, en caractéristique p.
5. $\mathbf{Pic}(G)$ est un groupe fini si G est un groupe réductif (en fait c'est le dual de Cartier du groupe fondamental de G). Voir la Prop. 4.8 dans Cristian González-Avilés, *The units-Picard complex of a reductive group scheme*, J. Ramanujan Math. Soc. 34 (2019), no. 2, 191-230.

3 Groupes d'unités

Soit A une k-algèbre associative unitaire de dimension finie n. Notons $G = A^\times$ le groupe de ses unités. De manière intuitive, le fait que les formules de la multiplication dans A sont « de nature algébrique » montre que G est un groupe algébrique. Nous allons préciser ceci en donnant une incarnation « schématique » de A, c'est-à-dire en voyant A comme l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$ muni d'une structure d'algèbre.

On introduit deux foncteurs $\underline{A} : \mathrm{Sch}/k \to \mathrm{Alg}$ et $\underline{G} : \mathrm{Sch}/k \to \mathrm{Grp}$. Pour simplifier, on les définit sur les k-schémas affines $S = \mathrm{Spec}(R)$, c'est-à-dire sur les k-algèbres :

$$\underline{A}(R) = A \otimes_k R \quad \text{et} \quad \underline{G}(R) = (A \otimes_k R)^\times.$$

(On devrait écrire $\underline{A}(\mathrm{Spec}\, R) = \dots$ et $\underline{G}(\mathrm{Spec}\, R) = \dots$) Pour voir que $\underline{A}$ est représentable, on choisit une k-base $e_1, \dots, e_n$ de A. On voit alors que se donner un point $a \in A \otimes_k R = Re_1 \oplus \dots \oplus Re_n$ est la même que se donner ses coordonnées $a_i = e_i^*(a)$, si bien que notant t_i des indéterminées, on a :

$$\underline{A}(\mathrm{Spec}(R)) = A \otimes_k R = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(R[t_1, \dots, t_n])).$$

(En fait, les indéterminées canoniques sont $t_i = e_i^*$.) Ceci montre que le schéma $\mathbf{A} = \mathrm{Spec}(R[e_1^*, \dots, e_n^*])$ représente $\underline{A}$. C'est un espace affine, et les formules de l'addition et la multiplication de A se transportent en des formules qui font de $\mathbf{A}$ un schéma en algèbres. Plutôt que d'entrer dans les détails abstraits, donnons des exemples.

1. si $A = \mathrm{Mat}_n(k)$, on a $\mathbf{A} = \mathrm{Spec}(R[x_{i,j}])$ et la multiplication $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ est donnée par... les formules du produit matriciel, sur les points.
2. si $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avec $k = \mathbb{Q}$, le produit de deux R-points $a = r + \sqrt{2}s$ est $a' = r' + \sqrt{2}s'$ est $aa' = (rr' + 2ss') + \sqrt{2}(rs' + r's)$. Il en découle que $\mathbf{A} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$ avec produit donné par $(r, s) \cdot (r', s') = (rr' + 2ss', rs' + r's)$.
3. si $A = k[x]/(x^2)$ alors un point de $A \otimes_k R$ s'écrit $a = r + sx$, et le produit est donné par $aa' = (r + sx)(r' + s'x) = rr' + (sr' + rs')x$.

Je dis que $\underline{G}$ est représentable par un ouvert affine principal explicite $\mathbf{G} \subset \mathbf{A}$. En effet, la représentation régulière gauche et le déterminant fournissent des morphismes multiplicatifs :

$$A \otimes_k R \xrightarrow{L} \mathrm{End}_k(A \otimes_k R) \xrightarrow{\det} R.$$

Notons $\delta = \det \circ L$ la composée. Le point clé est que le groupe des unités $\underline{G}(R) = (A \otimes_k R)^\times$ n'est autre que la préimage du groupe d'inversibles $R^\times$ par δ. En effet $\underline{G}(R) \subset \delta^{-1}(R^\times)$ car si $a \in A \otimes_k R$ est inversible, alors son image encore notée $a \in \mathrm{End}_k(A \otimes_k R)$ est inversible, donc $\delta(a)$ est inversible. Réciproquement, si $\delta(a) \in R^\times$ alors dans $\mathrm{End}_k(A \otimes_k R)$ on a $a \in \mathrm{GL}(A \otimes_k R)$ et le théorème de Cayley-Hamilton montre que a^{-1} est un polynôme en a, donc il appartient en fait à $A \otimes_k R$. Le résultat est que

$$\mathbf{G} = D(\delta) \subset \mathbf{A}.$$

C'est un groupe algébrique affine, lisse de dimension n. Voyons quelques exemples.

1. si $A = \mathrm{Mat}_n(k)$, on a $\mathbf{A} = \mathrm{Spec}(R[x_{i,j}])$ et $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_{n,k} = \mathrm{Spec}(R[x_{i,j}, 1/\det(x_{i,j})])$.
2. si $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, pour $a = r + \sqrt{2}s$ on a $L(a) = \left(\begin{smallmatrix} r & 2s \\ s & r \end{smallmatrix}\right)$ puis $\delta(a) = r^2 - 2s^2$. Finalement $\mathbf{G} = \mathrm{Spec}(R[r, s, (r^2 - 2s^2)^{-1}])$ avec multiplication $(r, s) \cdot (r', s') = (rr' + 2ss', rs' + r's)$.
3. si $A = k[x]/(x^2)$, pour $a = r + sx$ on a $L(a) = \left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ s & r \end{smallmatrix}\right)$ puis $\delta(a) = r^2$. Finalement $\mathbf{G} = \mathrm{Spec}(R[r, s, 1/r^2])$ avec multiplication $(r, s) \cdot (r', s') = (rr', sr' + rs')$.

On peut définir aussi un groupe unimodulaire SL_A, qui est de dimension $\dim(A) - 1$.