Lundi 8 septembre 2008
Nombres complexes

Corrigé ex. 1 Posons $z = 1 + e^{i\theta}$, on a

$$z = 1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta) = 2\cos^2(\theta/2) + 2i\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2} .$$

Il ne faut pas avoir l'impression d'avoir fini, car d'une part, si $z = 0$ l'argument n'est pas défini, et d'autre part $\cos(\theta/2)$ peut être négatif. Il faut donc discuter en fonction de son signe.

On a $\cos(\theta/2) > 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi/2 + 2k\pi < \theta/2 < \pi/2 + 2k\pi$, si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi + 4k\pi < \theta < \pi + 4k\pi$. De même, $\cos(\theta/2) < 0$ ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi + 4k\pi < \theta < 3\pi + 4k\pi$. On peut maintenant conclure la discussion :

- si $\theta = \pi + 2k\pi$, alors $z = 0$ donc $|z| = 0$ et l'argument n'est pas défini.

- si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi + 4k\pi; \pi + 4k\pi[$, alors $\cos(\theta/2) > 0$ donc la forme module-argument est

$$z = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2} .$$

- si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 4k\pi; 3\pi + 4k\pi[$, alors $\cos(\theta/2) < 0$. Dans ce cas

$$\cos(\theta/2) = -|\cos(\theta/2)| = |\cos(\theta/2)|e^{i\pi}$$

donc la forme module-argument est $z = 2|\cos(\theta/2)|e^{i(\pi+\theta/2)}$.

Remarque. En pratique, c'est souvent la formule $1 + e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$ qui est utile.

Corrigé ex. 2 Noter que comme on exclut le cas $\Delta = 0$, on doit trouver deux racines distinctes pour δ.
(1) L'équation $\delta^2 = \Delta$ est équivalente à $\sigma^2 e^{2i\varphi} = \rho e^{i\theta}$, ou encore au système :

$$\sigma^2 = \rho \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \theta\ (2\pi) .$$

Comme ρ et σ sont strictement positifs, la première équation donne $\sigma = \sqrt{\rho}$. Quant à la deuxième, $2\varphi \equiv \theta\ (2\pi)$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\varphi = \theta + 2k\pi$, donc $\varphi = \theta/2 + k\pi$. Dans le cas pair $k = 2\ell$ on trouve $\varphi = \theta/2 + 2\ell\pi$ donc $\varphi \equiv \theta/2\ (2\pi)$. Dans le cas impair $k = 2\ell + 1$, on trouve $\varphi = \theta/2 + \pi + 2\ell\pi$ donc $\varphi \equiv \theta/2 + \pi\ (2\pi)$.

Les solutions sont donc $\delta_1 = \sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2}$ et $\delta_2 = -\delta_1 = \sqrt{\rho}\, e^{i(\theta/2+\pi)}$.

D'une autre manière, on peut proposer la racine évidente $\delta_1 = \sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2}$ puis faire observer que l'autre racine est son opposée $\delta_2 = -\delta_1 = -\rho\, e^{i\theta/2} = \sqrt{\rho}\, e^{i(\theta/2+\pi)}$.
(2) On commence par démontrer l'équivalence proposée, et pour cela on commence par le sens direct. Supposons donc que $\delta^2 = \Delta$. Alors en particulier,

- δ^2 et Δ ont même module, donc $x^2 + y^2 = \sqrt{f^2 + g^2}$,

- ils ont même partie réelle, donc $x^2 - y^2 = f$,
- leurs parties réelles sont de même signe.

On a obtenu les trois conditions de l'accolade.

Réciproquement, supposons les conditions de l'accolade vérifiées. De la première condition puis de la deuxième, on tire

$$g^2 = (x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2 = 4x^2y^2 \qquad \text{donc} \qquad g = \pm 2xy \ .$$

Comme xy et g sont de même signe, on trouve $g = 2xy$. Donc $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = f + ig = \Delta$.

On en déduit la résolution pratique de l'équation $\delta^2 = \Delta$ en cartésiennes. Il s'agit de calculer x et y. Or les deux premières équations du système permettent d'exprimer

$$x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{f^2+g^2} + f) \qquad \text{et} \qquad y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{f^2+g^2} - f) \ .$$

Comme $\sqrt{f^2+g^2} \geq |f|$, le membre de gauche de ces équations est positif ou nul donc on tire

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{f^2+g^2} + f)} \qquad \text{et} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{f^2+g^2} - f)} \ .$$

Si $g = 0$, l'une de ces deux expressions est nulle. Par exemple, si $f < 0$, c'est la première. On trouve alors $x = 0$ et pour y deux valeurs possibles, d'où les deux solutions pour δ. Le cas $f > 0$ est analogue, c'est alors la deuxième expression qui est nulle.

Si $g \neq 0$, aucune des deux expressions n'est nulle. On a exactement deux possibilités pour x, deux pour y, donc au total quatre possibilités pour δ. Mais la condition que xy est du signe de g en élimine deux, et il reste deux solutions pour δ.

(3) D'abord un mot sur la résolution de l'équation du second degré $az^2 + bz + c$ avec a, b, c complexes (et $a \neq 0$). C'est sensiblement la même chose que lorsque a, b, c sont réels. Notons $\Delta := b^2 - 4ac$ le discriminant. Les solutions sont à rechercher dans $\mathbb{C}$, comme d'ailleurs dans le cas réel avec $\Delta < 0$. La différence principale est que pour les nombres complexes, il n'existe pas de racine carrée privilégiée donc le symbole $\sqrt{\Delta}$ n'a pas de sens. Ceci dit, si l'on note δ l'une des racines carrées de Δ, l'autre est bien sûr $-\delta$. Le calcul habituel

$$az^2 + bz + c = a\big((z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\big)$$

montre que les solutions de l'équation sont $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$. La difficulté est donc essentiellement de calculer les racines carrées de Δ. Pour cela on utilise la méthode de la question (2), que l'on détaillera à chaque fois (les formules ne sont pas à connaître par cœur).

Passons à l'exemple $z^2 + (1-2i) - 7i$. On trouve $\Delta = -3 + 24i$. Soit $\delta = x + iy$ une racine carrée, alors $x^2 + y^2 = \sqrt{9+576} = \sqrt{585} = 3\sqrt{65}$ et $x^2 - y^2 = -3$. Ainsi $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(3\sqrt{65} - 3)} = \pm\sqrt{3/2}\sqrt{\sqrt{65} - 1}$ et $y = \pm\sqrt{3/2}\sqrt{\sqrt{65}+1}$. Comme la partie imaginaire de δ^2, égale à $2xy$, doit être du signe de celle de Δ, on obtient finalement les racines carrées de Δ :

$$\delta = \sqrt{3/2}\left(\sqrt{\sqrt{65}-1} + i\sqrt{\sqrt{65}+1}\right) \qquad \text{et} \qquad -\delta \ .$$

Finalement les solutions de $z^2 + (1-2i) - 7i = 0$ sont

$$z_1 = \frac{-1 + 2i + \sqrt{3/2}(\sqrt{\sqrt{65}-1} + i\sqrt{\sqrt{65}+1})}{2}$$

et

$$z_2 = \frac{-1+2i-\sqrt{3/2}(\sqrt{\sqrt{65}-1}+i\sqrt{\sqrt{65}+1})}{2} \ .$$

Corrigé ex. 3 (1) Notons $z=a+bi$, alors $Re(z)\leq |z|$ car $a\leq \sqrt{a^2+b^2}$. On a $Re(z)=|z|$ ssi ($b=0$ et $a\geq 0$), c'est-à-dire $z\in\mathbb{R}^+$.
(2) Regardons le cas $n=2$. Clairement $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ ssi $|z_1+z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2$, or

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\overline{z}_2)$$

et

$$(|z_1|+|z_2|)^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| \ .$$

On trouve donc $Re(z_1\overline{z}_2)=|z_1||z_2|=|z_1||\overline{z}_2|=|z_1\overline{z}_2|$. D'après le point (1) on a $z_1\overline{z}_2\in\mathbb{R}^+$. Comme $z_2\neq 0$, en divisant par $|z_2|^2$ on trouve $z_1/z_2\in\mathbb{R}^+$, ou encore $\mathrm{Arg}(z_1)=\mathrm{Arg}(z_2)$.

Ceci suggère que $|z_1+\cdots+z_n|=|z_1|+\cdots+|z_n|$ ssi $\mathrm{Arg}(z_1)=\cdots=\mathrm{Arg}(z_n)$. Un sens est évident, car si $\mathrm{Arg}(z_1)=\cdots=\mathrm{Arg}(z_n)=:\theta$ alors pour tout k on a $z_k=\rho_k e^{i\theta}$ et donc

$$|z_1+\cdots+z_n|=|(\rho_1+\cdots+\rho_n)e^{i\theta}|=\rho_1+\cdots+\rho_n=|z_1|+\cdots+|z_n| \ .$$

Démontrons par récurrence sur $n\geq 2$ l'implication récriproque :

$$P(n): \quad |z_1+\cdots+z_n|=|z_1|+\cdots+|z_n| \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Arg}(z_1)=\cdots=\mathrm{Arg}(z_n) \ .$$

On a déjà démontré $P(2)$. Vérifions que $P(n)\Rightarrow P(n+1)$. On se donne $n+1$ complexes non nuls tels que $|z_1|+\cdots+|z_{n+1}|=|z_1+\cdots+z_{n+1}|$. Par l'inégalité du triangle, on a

$$|z_1|+\cdots+|z_{n+1}|\overset{hyp}{=}|z_1+\cdots+z_{n+1}|\leq|z_1+\cdots+z_n|+|z_{n+1}|\leq|z_1|+\cdots+|z_n|+|z_{n+1}| \ .$$

Donc les inégalités intermédiaires sont des égalités, en particulier $|z_1+\cdots+z_n|=|z_1|+\cdots+|z_n|$. Par l'hypothèse de récurrence $P(n)$, $\mathrm{Arg}(z_1)=\cdots=\mathrm{Arg}(z_n)=:\theta$. Le même raisonnement en faisant jouer à z_1 le rôle de z_{n+1} donne $\mathrm{Arg}(z_2)=\cdots=\mathrm{Arg}(z_{n+1})=\theta$ et on a fini.

Passons à une démonstration directe de l'implication

$$|z_1+\cdots+z_n|=|z_1|+\cdots+|z_n| \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Arg}(z_1)=\cdots=\mathrm{Arg}(z_n) \ .$$

En posant $\theta:=\mathrm{Arg}(z_1+\cdots+z_n)$ et $y_k=e^{-i\theta}z_k$ comme suggéré par l'énoncé, on a

$$y_1+\cdots+y_n=e^{-i\theta}(z_1+\cdots+z_n)\in\mathbb{R}^+ \ .$$

Par conséquent $|y_1+\cdots+y_n|=y_1+\cdots+y_n$. Ainsi,

$$y_1+\cdots+y_n=|y_1+\cdots+y_n|=|z_1+\cdots+z_n|=|z_1|+\cdots+|z_n|=|y_1|+\cdots+|y_n| \ .$$

On en déduit $(|y_1|-y_1)+\cdots+(|y_n|-y_n)=0$. En particulier $Re(|y_1|-y_1)+\cdots+Re(|y_n|-y_n)=0$. Comme pour chaque k on a $Re(|y_k|-y_k)\geq 0$ (cf première question), ceci impose $Re(|y_1|-y_1)=\cdots=Re(|y_n|-y_n)=0$. D'après le cas d'égalité (première question encore) on trouve $y_k\in\mathbb{R}^+$ pour tout k. Ainsi $\mathrm{Arg}(y_k)=0$ donc $\mathrm{Arg}(z_k)=\theta$ pour tout $k=1,\ldots,n$.

Corrigé ex. 4 Comme suggéré, notons $\int_a^b f(t)\,dt = \rho e^{i\theta}$ la forme polaire de l'intégrale en question, et $g(t) = e^{-i\theta} f(t)$. On a, par l'hypothèse faite sur f,

$$\int_a^b g(t)\,dt \overset{\substack{\text{déf}\\ \text{de } g\\ \downarrow}}{=} e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,dt \overset{\substack{\text{déf}\\ \text{de } \rho\\ \downarrow}}{=} \rho = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \overset{\substack{\text{hyp}\\ \text{sur } f\\ \downarrow}}{=} \int_a^b |f(t)|\,dt \overset{\substack{\text{déf}\\ \text{de } g\\ \downarrow}}{=} \int_a^b |g(t)|\,dt\ .$$

Il s'ensuit que $\int_a^b |g(t)| - g(t)\,dt = 0$ et en particulier $\int_a^b Re\,(|g(t)| - g(t))\,dt = 0$. Comme la fonction qui à t associe $Re\,(|g(t)| - g(t))$ est continue, positive (première question de l'exercice précédent) et que l'intégrale d'une fonction continue positive n'est nulle que si cette fonction est nulle, on trouve

$$Re\,(|g(t)| - g(t)) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [a;b]\ .$$

Il en découle que $g(t) \in \mathbb{R}^+$, ou encore $\mathrm{Arg}(g(t)) = 0$ (*cf* première question de l'exercice précédent, cas d'égalité). Alors $\mathrm{Arg}(f(t)) = \theta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé ex. 5 L'astuce classique est de remarquer que $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ est la partie imaginaire de $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$ et cette dernière somme est une série géométrique, facilement calculable :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\ .$$

On peut utiliser la formule

$$1 - e^{i\theta} = 1 + e^{i(\theta+\pi)} = 2\cos(\theta/2 + \pi/2)e^{i\frac{\theta+\pi}{2}} = -2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}$$

d'où

$$\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{-2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}} = \frac{i}{2\sin(\theta/2)}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i(n+1/2)\theta)}\right)\ .$$

On doit en calculer la partie imaginaire ; comme, de manière générale, la partie imaginaire de iz est égale à la partie réelle de z, on cherche la partie réelle de la parenthèse. On trouve

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{1}{2\sin(\theta/2)}\big(\cos(\theta/2) - \cos((n+1/2)\theta)\big)\ .$$

Corrigé ex. 6 Supposons qu'aucun des vecteurs $\overrightarrow{OM}_1$ et $\overrightarrow{OM}_2$ n'est nul.

Notons $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$. Alors ils sont orthogonaux ssi $\theta_2 \equiv \theta_1 + \pi/2\ (2\pi)$ ou $\theta_2 \equiv \theta_1 - \pi/2\ (2\pi)$. Il est équivalent de dire :

que $z_1/z_2 \in i\mathbb{R}$,

ou encore que $z_1\overline{z}_2 \in i\mathbb{R}$ (en multipliant par $z_2\overline{z}_2 = |z_2|^2 \in \mathbb{R}$),

ou encore que $Re(z_1\overline{z}_2) = \frac{1}{2}(z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1) = 0$.

Si l'un des deux vecteurs est nul, on voit que les trois conditions sont automatiquement remplies, donc encore équivalentes dans ce cas.

On notera que $\langle z_1, z_2\rangle = \frac{1}{2}(z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1)$ est l'expression du produit hermitien standard sur $\mathbb{C}$, donc on n'est pas surpris que son annulation corresponde à l'orthogonalité des vecteurs.