M1 CSA **MSNU – Modélisation et simulation numérique** **2014/15**

Feuille de TP 7

Exercice. *Un problème parabolique nonlinéaire*

On considère le problème de Cauchy-Dirichlet pour une équation de la chaleur non linéaire en une dimension d'espace

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x^2 u &= f(u) && \text{dans }]0,1[\times[0,T]\,, \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0\,, && \text{pour } t \in [0,T]\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && \text{pour } x \in]\,0.1[\,. \end{aligned}$$

Pour la discrétisation de ce problème, on choisit une méthode de différences finis en espace et un schéma à un pas en temps, tous les deux basés sur des maillages équidistants de pas h en espace et de k en temps. On a donc, avec le nombre M de sous-intervalles de $[0,1]$ et le nombre N de pas de temps :

$$h = \frac{1}{M}\,; \qquad k = \frac{T}{N}\,.$$

La discrétisation en espace utilisera le schéma à 3 points pour le Laplacien unidimensionnel qui correspond pour les nœuds intérieurs à la formule

$$(\Delta_h U)_j = (U_{j-1} + U_{j+1} - 2U_j)/h^2\,,$$

dont la matrice tridiagonale a été étudiée en TP1. Ici, U_j correspond à la valeur au nœud $x_j = jh$.
Pour la discrétisation en temps, on utilise la notation $U^{(n)}$ pour les valeurs $(U_j^{(n)})_{j=0,M+1}$ correspondant au pas de temps $t_n = nk$. Le schéma utilisé fait intervenir un paramètre $\theta \in [0,1]$ et s'écrit de la manière suivante

$$\text{(1)} \qquad \frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{k} = \theta \Delta_h U^{(n+1)} + (1-\theta)\Delta_h U^{(n)} + f(U^{(n)})\,.$$

Si $\theta = 0$, il s'agit d'un schéma explicite, du *schéma d'Euler*.
Si $\theta > 0$, il s'agit d'un schéma implicite [1], pour $\theta = 1$ du *schéma d'Euler implicite* ou *rétrograde*, pour $\theta = 1/2$, du *schéma de Crank-Nicolson*.
Le schéma explicite exprime $U^{(n+1)}$ directement en fonction de $U^{(n)}$; dans le schéma implicite, $U^{(n+1)}$ est obtenu en résolvant un système linéaire

$$\text{(2)} \qquad U^{(n+1)} - k\theta\Delta_h U^{(n+1)} = U^{(n)} + k(1-\theta)\Delta_h U^{(n)} + kf(U^{(n)})\,.$$

1. Ecrire un programme Matlab qui, après avoir fixé les paramètres T, M, N et θ, réalise le schéma (2) pour $n = 0, \ldots, N-1$ en utilisant des fonctions f et u_0, définies dans des fichiers `f.m` et `u0.m`.

Pour analyser les résultats des calculs, on utilisera la visualisation en un graphe animé par la fonction `movie`, voir TP2. Rappel : Le code pour utiliser `movie` contiendra des lignes de la forme suivante

1. plus correctement *semi-implicite*, car on traite la non-linéarité toujours de manière *explicite*. Ainsi on évite la résolution d'un système non-linéaire.

```
axis([0,1,-1,3])
set(gca,'nextplot','replacechildren');
for n=...
    ...
    plot(x,U); F(n)=getframe;
end
```

Avec la commande `movie(F)` vous pouvez revoir le film, `movie(F(1:8))` montre les 8 premières prises du film, et `movie(F(1:8),5,4)` montre la même séquence 5 fois, en ralenti.

2. Pour un premier test, prenez $T = 1$, $N = 20$, $M = 40$, $f = 0$, $u_0(x) = \sin(\pi x)$. Avec la méthode d'Euler explicite $(\theta = 0)$, on observe une instabilité numérique. Elle apparaît après combien de pas de temps ?

3. Avec $\theta = 0.1$, voyez-vous toujours l'instabilité numérique ? Après combien de pas de temps ? Et avec Crank-Nicolson $(\theta = 0.5)$? Pour $N = 100$, $M = 40$, déterminer le plus petit $\theta \in [0.3, 0.5]$ pour lequel vous ne voyez pas d'instabilité numérique. Pourquoi on ne fixe pas $\theta = 1$ une fois pour toutes ?

4. Pour la suite, on gardera les paramètres $T = 1$, $N = 100$, $M = 40$, et on choisit

$$u_0(x) = 2\sin^4(\pi x) + 2\sin(2\pi x) - \sin(4\pi x) .$$

Pour quelle valeur maximale de θ voyez-vous encore l'instabilité numérique ?

5. En regardant les 12 premières prises du film en ralenti, quel phénomène observez-vous ?

6. On considère maintenant $f(y) = \alpha y^3$ avec un paramètre α que l'on met d'abord à 0 pour retrouver les résultats obtenus précédemment. Ensuite vous augmentez α jusqu'à ce que vous voyez le phénomène d'explosion en temps fini discuté en TD7.

7. Le but est maintenant de déterminer plus précisément la plus petite valeur α_0 du paramètre α pour laquelle on observe le phénomène d'explosion en temps fini. Pour pour les deux valeurs $\theta = 0.45$ et $\theta = 0.55$, effectuer une série de calculs en faisant varier α . Chaque fois, observer le graphe animé pour déterminer si l'explosion a lieu. Pour chacune des 2 valeurs de θ , donner une inclusion de α_0 dans un intervalle de longueur 10^{-2} .

8. Avec un α pour lequel il y a explosion, en regardant le film au ralenti, observez la différence entre cette explosion et l'instabilité numérique vue précédemment.

9. Observez en fonction des paramètres de discrétisation M et N :

a. le temps d'explosion pour $\alpha = 3$,   **b.** le paramètre critique α_0 .