Feuille de TP 6

Exercice I. *Séries de Fourier sinus*

1. Écrire une fonction `FS` qui prend comme variables d'entrée un vecteur `x` d'abscisses et un vecteur `a` de coefficients de Fourier et qui calcule un vecteur `u=FS(x,a)` du même format que `x` représentant la fonction

$$u_N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sin(k\pi x)\,. \tag{1}$$

2. On veut visualiser la convergence de la série (1) vers la fonction constante $u(x) = 1$ dans l'intervalle $[0, 1]$. Calculer (à la main) les coefficients de Fourier sinus de la fonction u, de sorte que la série (1) convergera vers u dans $L^2([0, 1])$ lorsque $N \to \infty$.

3. Comme la série (1) est périodique de période 2, on visualisera son comportement sur l'intervalle $[0, 2]$. On choisit donc `x` comme discrétisation de cet intervalle. On définit le vecteur `a` de longueur `N` comme calculé dans la question **2**. Le graphe de la fonction u_N est alors obtenu par la commande `plot(x,FS(x,a))`. Dessinez les graphes pour $N = 10, 20, 40, 100, 400, 2000$. Pour bien voir le graphe correspondant à $N = 2000$, il est nécessaire que la discrétisation `x` de $[0, 2]$ soit suffisamment fine. Comparez les résultats obtenus avec
`x=linspace(0,2,1000)`, `x=linspace(0,2,2000)` et `x=linspace(0,2,5000)`
(effet dit d' ≪ aliasing ≫. Piège assez commun : voir sur le web la Figure 1 dans l'article
`http://faculty.olin.edu/bstorey/Notes/Fourier.pdf`).

Exercice II. *Transformation de Fourier rapide (FFT)*

Matlab fournit la fonction `fft` pour calculer les coefficients de Fourier. Cette fonction implémente la *transformation de Fourier discrète*, donné par les formules complémentaires

$$F_k = \sum_{n=1}^{N} f_n\, e^{-2\pi i(k-1)(n-1)/N}\,, \qquad 1 \le k \le N\,, \tag{2}$$

$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F_k\, e^{2\pi i(k-1)(n-1)/N}\,, \qquad 1 \le n \le N\,. \tag{3}$$

La formule (2) est implémentée par la fonction `fft` et la formule (3) par `ifft`.
Pour appliquer ces formules au calcul des coefficients de Fourier d'une fonction f qui est 1-périodique, donc définie sur l'intervalle $[0, 1[$, on suppose que $f_n = f((n-1)/N)$ et la formule (2) est donc une formule d'intégration numérique pour l'intégrale

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x}\, dx\,,$$

tandis que la formule de synthèse (3) correspond à la série de Fourier

$$f(x) = \sum_{-N/2<k\le N/2} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Les coefficients F_k sont N -périodiques, donc la correspondance entre les suites $(F_k)_{k=1,\dots N}$ et $(\hat{f}(k))_{-N/2<k\le N/2}$ est (pour N pair) que $F_1,\dots,F_N$ correspondent, après division par N , à $\hat{f}(0),\dots,\hat{f}(N/2),\hat{f}(-N/2+1),\dots\hat{f}(-1)$.

<u>1.</u> Pour $N = 4, 8, 16$, on définit `t=[0:N-1]'/N` et `f=sin(2*pi*t)`. Essayez de comprendre le résultat de la commande `fft(f)`. Même question pour `f=cos(2*pi*t)`.

<u>2.</u> Pour nos séries de Fourier sinus sur l'intervalle $[0,1]$, nous devons d'abord réduire la période 2 à la période 1 , donc

$$f(t)=u(2t),\quad 0\le t<1,\qquad \text{où } u \text{ est } 2\text{-périodique et impaire, ou encore}$$

$$f(t)=u(2t),\quad 0\le t<1/2;\qquad f(t)=-u(2-2t)\quad 1/2\le t<1\,.$$

Ensuite, avec `F=fft(f)` , on peut lire les coefficients a_k , $k = 1,\dots,N/2$ de (1) comme partie imaginaire de F_k multiplié par $-2/N$. Ecrire une fonction `SF(u,N)` qui calcule ainsi les N premiers coefficients Fourier sinus d'une fonction `u`. Tester pour $u1(x)=\sin(\pi x)$ et $u2(x)=\sin(2\pi x)$. Ensuite, pour $u3(x) = 1/2-|x-1/2|$, $x\in[0,1]$, insérer les coefficients Fourier sinus ainsi calculés dans la fonction `FS` de l'exercice I. Comparer avec la fonction $u3$ pour plusieurs valeurs de N .

Exercice III. *Résolution du problème de Dirichlet par FFT*

On veut résoudre le problème de Dirichlet dans le carré $\Omega =]\,0,\,1[\times]\,0,\,1[\subset\mathbb{R}^2$ (comparer avec TP4)

$$-\Delta u=f \ \text{ dans } \Omega\,;\qquad u=0 \ \text{ sur } \Gamma=\partial\Omega\,. \tag{4}$$

L'idée est de développer f dans la base des fonctions propres du laplacien

$$f(x,y)=\sum_{m,n=1}^{N}\hat{f}_{m,n}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)\,, \tag{5}$$

similairement pour u , et de calculer $\hat{u}_{m,n}$ à partir de la relation

$$\hat{u}_{m,n}=\frac{\hat{f}_{m,n}}{\pi^2(m^2+n^2)}\,. \tag{6}$$

<u>1.</u> Ecrire une fonction `SF2` qui calcule les coefficients de Fourier sinus $\hat{f}_{m,n}$ d'une fonction f donnée sur Ω . Matlab fournit la fonction `fft2` qui produit la transformation de Fourier discrète en 2 variables.

<u>2.</u> Ecrire une fonction `Dir2` qui, pour une fonction `f` donnée, calcule ses coefficients de Fourier sinus, les transforme selon (6) en coefficients de Fourier sinus de `u`, et calcule la fonction `u` comme série de Fourier sinus.

<u>3.</u> Résoudre ainsi le problème (4) pour les exemples de fonctions `f` rencontrés dans TP4 :
- $f(x,y)=5\pi^2\,\sin(\pi x)\,\sin(2\pi y)\,+\,2\pi^2\,\sin(5\pi x)\,\sin(\pi y)$
- $f(x,y)=1$
- $f(x,y)=(x-x^2)\sin^2(\pi y)$.