M1 CSA **MSNU – Modélisation et simulation numérique** **2014/15**

Feuille de TP 5

On continue à étudier le problème de Dirichlet pour le laplacien en dimension 2 par la méthode de différences finies et le schéma « à 5 points ». On réutilisera les notations de la feuille TP 4.

Exercice I. *Le problème aux valeurs propres*

On considère la discrétisation du problème aux valeurs propres pour le problème de Dirichlet dans le carré $\Omega =]\,0,\,1[\times]\,0,\,1[\subset \mathbb{R}^2$

$$-\Delta u = \lambda u \;\text{ dans } \Omega\,; \qquad u = 0 \;\text{ sur } \Gamma.$$

Pour calculer les valeurs propres avec la fonction `eigs` de Matlab, on est obligé de *construire la matrice* qui correspond au laplacien discret Δ_h, c'est-à-dire la matrice du système linéaire (2) de TP4, alors que dans les schémas de Gauss-Seidel et SOR on avait pu éviter cette construction. La difficulté principale n'est pas le calcul des éléments de la matrice – ils consistent des nombres $\{0, -1, 4\}$ - mais de leurs positions dans la matrice. Dans TP4 on pouvait indexer les lignes et les colonnes du système linéaire chacune par *deux* indices j et k, et on doit maintenant le faire par *un* indice ℓ, comparer les notations des équations (4) et (5) de TP4.

1. Écrire une fonction `matlap2` qui prend comme seule variable d'entrée le nombre M d'intervalles de subdivision de chaque direction x et y et qui sort la matrice A du système linéaire (2) de TP4. Le rang de cette matrice est $(M-1)^2$.

Pour une construction claire de la matrice A, il convient d'écrire une fonction `[ell]=num(M)` qui décrit la numérotation globale des nœuds. Son paramètre de sortie est une matrice $(M+1)\times(M+1)$ telle que `ell(j,k)` soit le numéro ℓ du nœud d'indice `(j,k)` pour un nœud intérieur et `0` pour un nœud du bord.

À l'aide de la fonction `num`, il est facile de construire la matrice A : On commence par `A=4*eye(N)`, où `N=(M-1)^2`. Ensuite on parcourt les nœuds, et dans la ligne de A correspondant au numéro du nœud, on met la valeur -1 aux 4 colonnes qui correspondent aux numéros des 4 «voisins». Si le numéro est `0`, on ne fait rien.

Pour des raisons de normalisation des valeurs propres, il convient de multiplier la matrice ainsi construite par $(M/\pi)^2$.

Vérifier la construction de la matrice A pour $M = 2, 3, 4$.

2. Pour calculer les 10 premières valeurs propres de A, on pose
```
opts.disp=0
```
pour supprimer des messages internes au calcul, et on utilise ensuite la commande
```
eigs(matlap2(M),10,0,opts)
```

Observer le comportement de ce calcul en fonction de M :
Pour $M = 10, 20, 40, 80$, noter précision, temps de calcul, mémoire utilisée. Par extrapolation, estimer le M maximal qui serait possible à traiter sur votre machine.

Notes : Les valeurs propres exactes sont des entiers, sommes de deux carrés non nuls. Pour observer la mémoire utilisée, on peut faire tourner la commande
```
top -u $USER
```
dans une autre fenêtre.

3. Matlab prévoit un format plus économique pour le stockage de matrices $\ll$creuses$\gg$. Ce sont des matrices dont beaucoup d'éléments sont nuls, comme c'est le cas pour notre matrice A. Le mot clé est "*sparse*".

Écrire une variante $\ll$ creuse $\gg$ `spmatlap2` de la fonction `matlap2` qui sort la matrice A en format "sparse". Pour ceci, il peut suffir de changer une seule ligne dans la fonction `matlap2`, en remplaçant la fonction `eye` par `speye`.

Avec cette variante, répéter les observations de la question **2.** On voit qu'on peut aller beaucoup plus loin en augmentant M. Quel serait le M maximal possible maintenant ?

4. Dessiner les 4 premières fonctions propres du problème de Dirichlet dans le carré Ω. Choisir une valeur $\ll$ raisonnable $\gg$ pour le nombre M dans la discrétisation.

Exercice II. *Le problème aux valeurs propres dans un* L

Le but est de résoudre numériquement, par la méthode des différences finies, le problème aux valeurs propres pour le problème de Dirichlet dans le domaine $\ll$ L-forme $\gg$

$$\Omega_L = \,]-1,\,1[^{\,2} \setminus \,]0,1[^2.$$

C'est donc un domaine composé de 3 carrés.

1. Écrire une fonction `A=spmatlap2L(M)` qui calcule la matrice du problème de Dirichlet dans Ω_L discrétisé par la méthode de différences finies $\ll$ à 5 points $\gg$. Pour ceci, il suffit de rédiger une nouvelle version de la fonction de numérotation des nœuds, `numL`. On peut discrétiser le carré $]-1,\,1[^{\,2}$ entier, en mettant `numL(j,k)=0` pour les nœuds n'appartenant pas à Ω_L.

2. Calculer une approximation des 4 premières valeurs propres du domaine Ω_L et dessiner les 4 fonctions propres correspondantes.

3. Exécuter la commande `modes`. Voir aussi les mots-clé `logo` et `membrane`.

4. Essayer de trouver le taux de convergence (exprimé en puissance de M) de l'approximation de la première valeur propre.