Feuille de TP 4

Exercice I.

Le but est de résoudre numériquement le problème de Dirichlet

$$-\Delta u = f \ \text{ dans } \Omega\,; \qquad u = g \ \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega \tag{1}$$

dans le carré $\Omega =]\,0,\,1[\times]\,0,\,1[\subset \mathbb{R}^2$. On utilise une méthode de différences finies qui est l'analogue de la méthode étudiée en dimension 1 dans TP1. Comme discrétisation du laplacien Δ avec $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$, on utilise $\partial_x\overline{\partial}_x + \partial_y\overline{\partial}_y$ avec

$$(\partial_x\overline{\partial}_x + \partial_y\overline{\partial}_y)u(x,y) = \tfrac{u(x+\delta x,y)+u(x-\delta x,y)-2u(x,y)}{(\delta x)^2} + \tfrac{u(x,y+\delta y)+u(x,y-\delta y)-2u(x,y)}{(\delta y)^2}\,,$$

où δx et δy sont les pas de discrétisation en direction x et y . Nous considérons ici le cas isotrope $\delta x = \delta y = h$ avec $h = 1/M$, $M \in \mathbb{N}$. Si on définit

$$x_{j,k} = (jh, kh) \quad (j,k) \in \mathbb{Z}^2\,; \qquad U_{j,k} = u(x_{j,k})\,,$$

on obtient ainsi la formule à 5 points pour le laplacien discret

$$\Delta_h U_{j,k} = \big(U_{j-1,k} + U_{j+1,k} + U_{j,k-1} + U_{j,k+1} - 4U_{j,k}\big)/h^2\,.$$

Le modèle numérique correspondant au problème de Dirichlet (1) est alors

$$-\Delta_h U_{j,k} = F_{j,k} \ \text{ si } x_{j,k} \in \Omega\,; \quad U_{j,k} = G_{j,k} \ \text{ si } x_{j,k} \in \Gamma\,. \tag{2}$$

Les équations aux points intérieurs forment un système linéaire $(M-1)^2 \times (M-1)^2$ dont la matrice contient des éléments $0, -1, 4$. Comme il n'est pas facile de déterminer où placer ces nombres dans la matrice, nous allons ici utiliser une méthode de résolution qui ne demande pas la construction de la matrice. Dans le TP suivant on va construire la matrice.

Pour la résolution du système (2), on va utiliser la méthode itérative de *Gauss-Seidel*. En voici le principe : Pour un système $AU = B$ de la forme

$$\sum_{m=1}^{N} a_{\ell,m} u_m = b_\ell\,, \tag{3}$$

une itération de la méthode de Gauss-Seidel consiste à résoudre successivement la ℓ-ième équation pour x_ℓ , $\ell = 1, \ldots, N$. C'est-à-dire, le passage de $U^{(n)}$ à $U^{(n+1)}$ dans l'itération est décrit par

$$u_\ell^{(n+1)} = \frac{1}{a_{\ell,\ell}}\Big(-\sum_{m=1}^{\ell-1} a_{\ell,m} u_m^{(n+1)} - \sum_{m=\ell+1}^{N} a_{\ell,m} u_m^{(n)} + b_\ell\Big)\,. \tag{4}$$

Attention : Un indice simple ℓ dans (3) et (4) correspond au double indice j,k dans (2), et $N = (M-1)^2$.

La méthode G-S est particulièrement adaptée à notre système (2), pour deux raisons : D'abord, elle permet d'éviter de construire la matrice $(M-1)^2 \times (M-1)^2$ du système. Il suffit d'écrire l'équation correspondant à un point intérieur :

$$U_{j,k} = \big(U_{j-1,k} + U_{j+1,k} + U_{j,k-1} + U_{j,k+1} + h^2 F_{j,k}\big)/4\,. \tag{5}$$

Et puis, elle permet de garder la notation avec 2 indices pour le vecteur de la solution $(U_{j,k})_{j,k=1,\dots,M-1}$.

Travail à faire :

1. Apprendre à utiliser les fonctions `meshgrid` et `surf` pour le dessin de graphes de fonctions de 2 variables. Utilisation typique :

```
M=10; h=1/M;
[X,Y] = meshgrid((0:M)*h, (0:M)*h);
Z = sin(pi*X) .* sin(pi*Y);
surf(X,Y,Z)
```

Ici, `X` et `Y` (et, par conséquent, `Z`) sont des matrices $(M+1)\times(M+1)$, où `X` a des colonnes constantes et `Y` des lignes constantes.

2. Ecrire des fichiers `f.m` et `uex.m` définissant des fonctions

$$f(x,y) = 5\pi^2\,\sin(\pi x)\,\sin(2\pi y)\;+\;2\pi^2\,\sin(5\pi x)\,\sin(\pi y)\;;$$
$$u_{ex}(x,y) = \sin(\pi x)\,\sin(2\pi y)\;+\;\sin(5\pi x)\,\sin(\pi y)\,/\,13\,.$$

Utiliser le format matriciel rencontré dans la question précédente pour les paramètres x et y . Dessiner le graphe des 2 fonctions.

3. Programmer la méthode de Gauss-Seidel pour le système (2) avec la fonction f de la question précedente et la condition aux limites $u=0$ sur Γ .
On initialise U comme `zeros(M+1,M+1)`. Ensuite on applique la formule (4) sur tous les nœuds intérieurs (2 boucles sur j et k). Attention à la translation des indices $0,\dots,M$ $\to$ `1:M+1`. On répète jusqu'à ce qu'un nombre maximal $N_{\max}$ d'itérations soit atteint ou que la différence entre U à l'étape n et à l'étape $n+1$ soit inférieure à un seuil s . On peut choisir $N_{\max}=1000$ et $s=10^{-7}$.

4. Effectuer une série de calculs de l'algorithme de la question 3, en faisant varier M . Chaque fois, afficher le graphe de la solution calculée et le graphe de l'erreur entre la solution calculée et la solution exacte. La solution exacte de ce problème est la fonction u_{ex} . Observer :
- le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le seuil s en fonction de M .
- l'erreur maximale entre U et u_{ex} , lue dans le graphe de cette fonction (on peut utiliser la commande `colorbar` ou le bouton de la même fonction dans la fenêtre graphique pour afficher l'echelle des z). A noter que le *seuil* s , qui ne concerne que la solution approchée du système (2), n'a rien à voir avec l'*erreur*, qui concerne l'approximation de la solution exacte par la solution de (2).

5. Faire des calculs pour différents exemples de fonctions f :
- $f(x,y)=1$
- $f(x,y)=(x-x^2)\sin^2(\pi y)$.

Pour diminuer le nombre d'itérations nécessaires, on peut utiliser la méthode de *sur-relaxation* ("SOR"). Elle consiste à remplacer l'équation (4) par

$$(4_t)\qquad u_\ell^{(n+1)} = (1-t)\,u_\ell^{(n)} + t\,\frac{1}{a_{\ell,\ell}}\Big(-\sum_{m=1}^{\ell-1} a_{\ell,m}u_m^{(n+1)} - \sum_{m=\ell+1}^{N} a_{\ell,m}u_m^{(n)} + b_\ell\Big)\,.$$

avec un paramètre réel t . Si $t\neq 0$, cette méthode produit la méme limite quand $n\to\infty$ que (4). Pour $t=1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel (4), et la méthode de sur-relaxation correspond à choisir $1<t<2$. Observer le nombre d'itérations nécessaires en fonction de t . Essayer de trouver la valeur optimale de t .