# Feuille de TP 3

**Exercice** *Méthode de tir*

On continue à étudier le problème aux limites

(1) $$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad (x \in ]0,1[\,)\,; \quad u(0) = u_0, u(1) = u_1\,.$$

Dans la *méthode de tir*, on résout à la place de (1) un problème de Cauchy

(2) $$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad (x \in ]0,1[\,)\,; \quad u(0) = u_0,\ u'(0) = v\,,$$

avec une inconnue supplémentaire $v \in \mathbb{R}$. Le but est de choisir le paramètre $v$ de façon à ce que l'autre condition aux limites $u(1) = u_1$ soit satisfaite. En notant $F$ l'application qui à $v$ associe la valeur $u(1)$ de la solution de (2), on cherche donc une solution $v$ de l'équation

(3) $$F(v) - u_1 = 0.$$

Dans la suite, on écrira une fonction Matlab `FF` qui réalise (une approximation de) la fonction $F$, et on résoudra l'équation (3) par la méthode de dichotomie (bissection).

**<u>1.</u>** Pour la solution du problème de Cauchy (2), on utilisera la fonction `ode23` de Matlab. Cette fonction calcule des solutions approchées d'un problème de Cauchy pour un système d'ordre 1. On doit donc d'abord réécrire (2) sous la forme

(4) $$y_1' = f_1(t,y)\,; \quad y_2' = f_2(t,y)\,; \quad y_1(0) = u_0\,, y_2(0) = v\,,$$

où le vecteur $y$ a les 2 composantes $y_1 = u$, $y_2 = u'$. Suivant la notation de Matlab (voir “help ode23”), on utilise aussi $t$ à la place de $x$ pour la variable indépendante. En l'occurrence, on a donc

$$f_1(t,y) = y_2\,, \quad f_2(t,y) = c(t)y_1 - f(t)\,.$$

Écrire une fonction `f12(t,y)` (sauvegarder dans un fichier `f12.m`) qui pour un scalaire $t$ et un vecteur $y \in \mathbb{R}^2$ calcule le vecteur des 2 composantes $f_1$, $f_2$. Pour un premier test, on prendra l'exemple des fonctions $c$ et $f$ définies dans l'Exercice I.1 de la feuille TP1. La commande

```
ode23(@f12,[0,1],[1,0])
```

affiche alors un graphe des 2 composantes de la fonction $y(t)$ dans l'intervalle $[0,1]$, pour les valeurs initiales $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$. A comparer avec la solution exacte $u$ donnée dans l'Exercice I.4 de la feuille TP1.

**2.** A partir de maintenant, on va considérer comme exemple le problème aux limites (1) avec

$$(5) \qquad c(x) = 1\,; \quad f(x) = \big(\pi^2 + 1\big)\cos(\pi x)\,; \quad u_0 = 1\,; \quad u_1 = 0\,.$$

Modifier la fonction `f12` pour prendre en compte ces nouvelles fonctions $c$ et $f$. La commande
`[T,Y]=ode23(@f12,[0,1],[1,v]); plot(T,Y(:,1))`
affiche un graphe de la solution $u$ calculée, que l'on peut comparer avec la solution exacte qui est de la forme

$$u(x) = \cos(\pi x) + \gamma \sinh(x)$$

avec une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ convenable. Essayez plusieurs valeurs de $v$, entre autres $v = 0$ et $v = 1$.

**3.** Écrire maintenant une fonction `FF(v)` qui utilise `f12` et `ode23` pour calculer une approximation de la valeur au bord $u(1)$.

**4.** Programmer une méthode de dichotomie `dicho(@F,a,b,tol)` qui, à partir d'un intervalle initial $[a, b]$, détermine une racine de la fonction $F$ avec une erreur bornée par `tol`. Tester avec `r=dicho(@cos,0,3,1e-7)`, ce qui devrait donner un résultat $r$ satisfaisant $|\cos r| < 10^{-7}$.

**5.** Utiliser `v=dicho(@FF,0,1,1e-5)` pour calculer la pente initiale $v = u'(0)$ correspondant à la solution du problème aux limites (1) avec les données (5). Calculer cette solution $U$ en utilisant `ode23` et dessiner le graphe de $U$ avec la solution exacte $u_{ex}$. En regardant le graphe de $U - u_{ex}$, noter une estimation visuelle de l'erreur maximale.

**6.** Adaptez la fonction `errmax` de la feuille TP1 à la situation actuelle et calculez ainsi une solution du problème aux limites (1) avec les données (5) par la méthode des différences finies qui aura la même erreur maximale que celle trouvée avec la méthode de tir dans la question précédente. Vous avez besoin de quel nombre de nœuds $N$ ? Comparez aussi avec la méthode de Numerov (TP1/III).

**7.** En utilisant la fonction `odeset` avec les propriétés `'RelTol'` et `'AbsTol'` et l'argument `options` de la fonction `ode23`, essayez de calculer une approximation de la solution du problème aux limites avec une erreur inférieure à $10^{-9}$. Comparez encore avec les méthodes de différences finies. Connaissant le comportement asymptotique de l'erreur des schémas de différences finies, vous pouvez extrapoler à partir d'un calcul avec une petite valeur de $N$ et vous n'avez ainsi pas besoin d'effectuer des calculs très gros et longs. En comparant les temps de calcul, quelle méthode vous paraît la plus efficace pour obtenir cette précision ?