M1 CSA **MSNU – Modélisation et simulation numérique** **2014/15**

Feuille de TP 2

Exercice *Vibrations transverses harmoniques d'une corde élastique*

On cherche les fréquences propres et les vibrations propres d'une corde élastique tendue avec tension 1 et avec densité de masse ρ. On cherche donc $(\omega, u) \in \mathbb{R}_+ \times C^2([0,1])$, où u est solution non triviale du problème aux limites homogène

$$(1) \qquad -u'' = \omega^2 \rho\, u \quad \text{dans } [0,1]; \qquad u(0) = 0, u(1) = 0\ .$$

On discrétise (1) par le schéma de différences finies standard à 3 points.

1. *Corde vibrante avec densité de masse continue*
Calculer une approximation des 4 premières fréquences propres, et dessiner dans un graphe les 4 vibrations propres correspondantes, pour les deux cas :

$$\rho(x) = \rho_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \rho(x) = \rho_+(x) = e^{-(20x-5)^2}\ .$$

Est-ce que vous pouvez voir l'ordre de converge des fréquences propres numériques quand $h \to 0$? (Divisez les ω par π).
Pour voir comment on peut calculer les 4 plus petites valeurs propres généralisées λ d'un problème $(A_1 - \lambda A_2)U = 0$, lire `help eigs`.

2. *Corde vibrante avec densité de masse discontinue*
Répéter le calcul des 4 premières fréquences propres et vibrations propres avec les 2 exemples de densités de masse données par

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{3} \\ 100 & \text{si } \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ 1 & \text{si } \frac{2}{3} < x \end{cases} \ ; \quad \rho_2(x) = \begin{cases} 100 & \text{si } x < \frac{1}{3} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ 100 & \text{si } \frac{2}{3} < x\ . \end{cases}$$

3. *Animation*
Pour visualiser le mouvement de la corde vibrante, on crée un graphe animé en utilisant la fonction `movie`. Dans l'aide sur `movie`, on trouve des morceaux de code de la forme suivante

```
axis([0,1,-Ymax,Ymax])
set(gca,'nextplot','replacechildren');
for m = 1:M
    ...
    plot(X,W); F(m)=getframe;
end
movie(F)
```

Ici, les 2 premières lignes servent à stabiliser l'affichage, `Ymax` désigne la valeur maximale des fonctions à afficher, et W est une matrice dont les colonnes contiennent les valeurs des fonctions à tracer au moment t indiqué par l'indice m.

On veut visualiser 4 vibrations propres simultanément, correspondant aux 4 fonctions propres calculées précédemment, chacune oscillante avec sa propre fréquence. Rappelons que la relation entre valeur propre généralisée et pulsation est $\lambda = \omega^2$. Si donc u est une fonction propre généralisée associée à la valeur propre généralisée λ et t est le temps correspondant à l'indice m, alors la fonction w à afficher sera

$$w(x) = u(x)\,\sin(\sqrt{\lambda}\,t)\,. \tag{1}$$

Si on dispose des 4 vecteurs propres généralisées dans une matrice U de type $(N, 4)$, alors on peut représenter la construction (1) pour les colonnes de la matrice W par un simple produit matriciel $W = UP$ avec une matrice diagonale P de rang 4. Le code remplacé par les points de suspension ci-dessus peut donc être écrit en 3 lignes ou moins, la matrice U étant construite auparavant.

Créez ainsi 4 graphes animés, chacun correspondant à un choix de densité de masse ρ décrit dans les questions **1** et **2** précédentes. Dans chaque graphe animé, montrez les 4 premières vibrations propres de la corde correspondante.