M1 CSA **MSNU – Modélisation et simulation numérique** **2014/15**

Feuille de TP 1

Exercice I. *Différences finies pour un problème aux limites unidimensionnel*

On étudie le problème aux limites

$$(1) \qquad -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad (x \in]0,1[\,)\,; \quad u(0) = u_0, u(1) = u_1\,.$$

1. Pour $N \in \{1, 2, \dots\}$ donné, on définit les nœuds $x_j = jh$ avec $h = \frac{1}{N}$ et les vecteurs $X = (x_0, \dots, x_N)$, F et C aux composants

$$f_j = f(x_j), \quad c_j = c(x_j) \quad (j = 0, \dots, N)\,.$$

Supposant que les fonctions f et c sont définies dans des fichiers `f.m` et `c.m`, écrire un script, sauvegardé dans le fichier `diff1.m`, qui affiche X, F et C. Tester avec

$$f(x) = (\pi^2 + x)\cos(\pi x), \quad c(x) = x, \quad N = 5.$$

2. On considère la discrétisation de (1) par le schéma de différences finies

$$(1_h) \quad -\tfrac{1}{h^2}\big(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\big) + c_j U_j = f_j \quad (j = 1, \dots, N-1)\,; \quad U_0 = u_0, U_N = u_1\,.$$

Ici, U_j est considéré comme approximation de $u(x_j)$ ($j = 0, \dots, N$).

Pour les valeurs inconnues $U_1, \dots, U_{N-1}$, on obtient donc un système linéaire de taille $(N-1) \times (N-1)$ de la forme

$$(2) \qquad -U_{j-1} + (2 + h^2 c_j)U_j - U_{j+1} = h^2 f_j \qquad (j = 1, \dots, N-1)\,.$$

Construire les 2 matrices $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{(N-1,N-1)}$ telles que $A = A_1 + h^2 A_2$ soit la matrice du système (2). Sauvegarder dans un fichier `diff2.m` et vérifier pour $N = 4, 5, 6$.

3. Pour $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et f et c comme avant, construire le second membre $B \in \mathbb{R}^{N-1}$ tel que le système (2) s'écrive sous la forme $AU = B$. Vérifier en particulier que les première et dernière équations sont représentées correctement. Calculer la solution $U \in \mathbb{R}^{N-1}$. Dessiner la solution approchée pour $N = 3, 5, 20$. Sauvegarder sous `diff3.m`.

4. Étudier l'erreur en fonction de N : Écrire une fonction `errmax` (fichier `errmax.m`) qui, pour N donné, calcule

$$e_N := \max_{1 \le j \le N-1} |U_j - u(x_j)|\,.$$

Afficher un tableau d'erreurs pour $N \in \{4, 8, 16, 32\}$. Dessiner e_N en fonction de N dans un graphe à l'échelle doublement logarithmique, comparer avec $N \mapsto N^{-2}$ et déduire le comportement asymptotique de l'erreur

$$e_N \sim \gamma\, h^{\beta}\,.$$

Sauvegarder dans `diff4.m`. (La solution exacte dans notre exemple est $u(x) = \cos(\pi x)$.)

Exercice II. *Solution moins régulière*

On continue à étudier le problème aux limites (1) avec $c(x) = x$ et $u_0 = 1$, $u_1 = -1$.

1. Définir les 2 fonctions $u2$ (fichier `u2.m`) et $f2$ (fichier `f2.m`) selon :

$$u2(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 3 - 8x + 4x^2 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad ; \quad f2(x) = \begin{cases} 8 + x - 4x^3 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ -8 + 3x - 8x^2 + 4x^3 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad ;$$

On peut utiliser des opérations logiques de Matlab : Si `X` est un vecteur, alors `X<1/2` est un vecteur de la même taille que `X`, avec des coefficients 1 (=vrai) et 0 (=faux) indiquant si l'inégalité est satisfaite pour le coefficient correspondant de `X`. Essayez :

```
t=linspace(0,1,1e4);
v = 2*t.*(t<1/2) + 2*(1-t).*(t>=1/2);
plot(t,v)
```

2. Comparer graphiquement la fonction $u2$ avec la fonction $u(x) = \cos(\pi x)$ de l'exercice I.4. Combien de fois $u2$ est-elle continûment dérivable ?

3. Résoudre le problème aux limites (1) avec second membre $f2$. La solution exacte est $u2$. Répéter l'étude de convergence de l'exercice I.4 pour cet exemple. Quel ordre de convergence observez-vous ?

Exercice III. *Schéma de Numerov*

Implémenter le schéma de Numerov (voir TD1) qui correspond au système d'équations

$$(-1 + \frac{h^2}{12} c_{j-1})\, U_{j-1} + (2 + \frac{5h^2}{6} c_j)\, U_j + (-1 + \frac{h^2}{12} c_{j+1})\, U_{j+1} = \frac{h^2}{12}\, (f_{j-1} + 10 f_j + f_{j+1})$$

1. Considérer le problème aux limites (1) et étudier la convergence de la méthode pour l'exemple étudié dans l'exercice I . Quel ordre de convergence observez-vous ?

2. Si vous prenez l'exemple considéré dans l'exercice II ci-dessus, quel ordre de convergence observez-vous ?