M1 CSA **MSNU – Modélisation et simulation numérique** **2014/15**

Feuille de TD 6

Exercice I. *Equation de la chaleur,* $d = 1$

1. Résoudre le problème de Cauchy-Dirichlet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \partial_x^2 u(x,t) &= 0 \quad \text{dans }]0,1[\times\mathbb{R}_+ \,; \\ u(x,t) &= 0 \quad (x \in \{0,1\} \,; \\ u(x,0) &= 1 \quad (x \in]0,1[) \,. \end{aligned}$$

2. Soit

$$u(x,t) = x\, t^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Montrer que u satisfait

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

et

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Qu'est-ce que cet exemple montre sur l'unicité de la solution ?

Exercice II. *Blow up*

Le but est d'étudier le comportement de solutions du problème de Cauchy-Dirichlet parabolique *non linéaire*

$$(1) \qquad \begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f(u) && \text{dans } \Omega \times [0,T[\,, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ borné} \\ u(x,t) &= 0 && \text{dans } \partial\Omega \times [0,T[\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{pour } x \in \Omega \,. \end{aligned}$$

1. Pour $m > 0$, déterminer toutes les solutions y du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}_+$

$$y' = y^m \,; \quad y(0) = y_0 \,.$$

Montrer que pour $m > 1$ et $y_0 > 0$, il existe $T_* \in]0,+\infty[$ tel que $y(t) \to \infty$ quand $t \to T_*$.

2. Plus généralement, montrer qu'un tel temps d'explosion ("blow up") $T_* < \infty$ existe pour les solutions de l'inégalité différentielle

$$y' \geq f(y)$$

pourvu que

$$f > 0 \quad \text{et} \quad \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{f(y)} < \infty \,.$$

Instruction : Observer que $t \mapsto y(t)$ est strictement monotone et utiliser cette application comme changement de variables dans l'intégrale

$$T = \int_0^T dt.$$

3. Soit φ_0 la première fonction propre du problème de Dirichlet pour le laplacien dans Ω, λ_0 la valeur propre correspondante, et w_0 un multiple de φ_0 tel que $w_0 \geq 0$ dans Ω et $\int_\Omega w_0\, dx = 1$. Soit u solution de (1) et $y(t) = \int_\Omega u(x,t) w_0(x)\, dx$. Montrer que

$$y'(t) + \lambda_0 y(t) \;=\; \int_\Omega f(u(x,t)) w_0(x)\, dx\ . \tag{2}$$

4. Pour la suite, on utilise *l'inégalité de Jensen* (démonstration ?) :
Pour $w : \Omega \to [0,\infty[$, $\int_\Omega w\, dx = 1$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe [1] et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ bornée, on a

$$\int_\Omega f(u(x))\, w(x)\, dx \;\geq\; f\Big(\int_\Omega u(x)\, w(x)\, dx\Big)\ .$$

En déduire que pour f convexe, y dans (2) satisfait

$$y' \;\geq\; f(y) - \lambda_0 y\ .$$

Soient maintenant f et y_0 tels que $f(y) > \lambda_0 y$ pour $y \geq y_0$ et $\int_{y_0}^\infty \frac{dy}{f(y)-\lambda_0 y} \;<\; \infty$.
Montrer qu'il existe $T_* \;<\; \infty$ tel que pour toute solution $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T\,[\,)$ de (1) avec $\int_\Omega u_0 w_0 = y_0$, on ait $T \leq T_*$.

5. On choisit maintenant $f(y) = \alpha y^3 + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\Omega = \,]0,1[\, \subset \mathbb{R}$. Construire des conditions initiales u_0 et des valeurs α, β pour lesquels on aura explosion en temps fini pour la solution de (1).

1. Définition : $\forall x,y \in \mathbb{R}, t \in [0,1] : f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$, condition suffisante : $f'' \geq 0$