M1 CSA **MSNU – Modélisation et simulation numérique** **2014/15**

Feuille de TD 5

Exercice I. *Problème de Dirichlet inhomogène*

1. Dans le carré $\Omega =]\,0,\ 1[\times]\,0,\ 1[\subset \mathbb{R}^2$, résoudre le problème de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega\ ; \qquad u(x,y) = x^2 + y^2 \ \text{ sur } \partial\Omega$$

en utilisant des séries de Fourier dans la base des fonctions

$$(x,y) \mapsto \sin(m\pi x)\sin(n\pi y), \quad m,n \geq 1\,.$$

2. Dans $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, on considère le problème de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega\ ; \qquad u = g \ \text{ sur } \partial\Omega\,.$$

On utilise le fait que toute fonction harmonique dans Ω est partie réelle d'une fonction holomorphe qui peut être représentée par une série entière de rayon de convergence 1 dans la variable $z = x + iy$. On a donc

$$u = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \mathrm{Re}\, a_0 + \tfrac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}_*} a_n e^{in\theta} r^{|n|} \quad \text{avec } a_{-n} = \overline{a_n}\ (n \geq 1)\,.$$

Calculer $\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ et $\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ et comparer avec des normes Sobolev de la fonction 2π -périodique g .

Exercice II. *Discontinuité de trace*

Soit Ω le carré $]\,0,\ 1[\times]\,0,\ 1[\subset \mathbb{R}^2$. Sur le bord $\partial\Omega$, on considère la fonction discontinue g_0 , définie par

$$g_0(x,0) = 1 \quad (0 \leq x \leq 1)\,; \qquad g_0(x,y) = 0 \ \text{ si } y \neq 0\,.$$

Le but est de montrer qu'il n'existe pas de fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que g_0 soit la trace de u sur le bord de Ω .

1. On considère d'abord une fonction $u \in C^1(\overline{\Omega})$.
En coordonnées polaires (r,θ) , définies par $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, soit ∂_θ la dérivée angulaire.
Montrer que

$$\partial_\theta u = -y\partial_x u + x\partial_y u\,, \quad \text{et par conséquent } \int_\Omega \left|\frac{\partial_\theta u}{r}\right|^2 dx\,dy \leq |u|_1^2\,.$$

2. Soit encore $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et soit g sa trace sur le bord de Ω . Montrer que

$$g(0,r) - g(r,0) = \int_0^{\pi/2} \partial_\theta u\, d\theta \qquad (0 < r < 1)\,.$$

En déduire que

$$|g(0,r) - g(r,0)|^2 \leq \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} |\partial_\theta u|^2\, d\theta$$

et finalement

$$\int_0^1 \frac{|g(0,r)-g(r,0)|^2}{r}\,dr \leq \frac{\pi}{2}\,|u|_1^2\,. \tag{1}$$

3. Supposons maintenant que $u \in H^1(\Omega)$ et que u soit approchée par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C^1(\overline{\Omega})$ qui convergent vers u dans $H^1(\Omega)$. Les traces g_n de u_n convergent alors vers la trace g de u dans $L^2(\partial\Omega)$. En utilisant le fait que les g_n et u_n satisfont des inégalités correspondant à (1), montrer que l'inégalité (1) est satisfaite aussi pour g et u.

4. Conclure que pour $u \in H^1(\Omega)$, la fonction g_0 ne peut pas être la trace de u sur $\partial\Omega$.