M1 CSA **MSNU – Modélisation et simulation numérique** **2014/15**

Feuille de TD 4

Le laplacien en dimension $\mathrm{d} \geq 2$

Exercice I. *Valeurs propres dans un rectangle*

Soit $\Omega =]0, a[\times]0, b[\subset \mathbb{R}^2$. On construit des valeurs propres et des fonctions propres du laplacien par la méthode de séparation de variables. On cherche donc des fonctions u dans Ω sous la forme

$$u(x, y) = X(x)\, Y(y)\,,$$

solutions du problème aux valeurs propres avec conditions aux limites de

1. Dirichlet :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \qquad && \text{dans } \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

2. Neumann :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \qquad && \text{dans } \Omega \\ \partial_n u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Exercice II. *Formule de la moyenne*

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :
Lemme. Soit u harmonique dans l'ouvert Ω , $x_0 \in \Omega$, B une boule centrée en x_0 et telle que $\overline{B} \subset \Omega$. Alors

$$u(x_0) = \frac{1}{|B|} \int_B u(x)\, dx = \frac{1}{|\partial B|} \int_{\partial B} u(x)\, ds(x).$$

Ici $|B|$ et $|\partial B|$ sont le volume et la surface de la boule.

1. En partant de la formule d'intégration par parties de GAUSS

$$\int_D \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial D} F(x) \cdot n(x)\, ds(x) \qquad \text{pour toute fonction dérivable } F : \overline{D} \to \mathbb{R}^d$$

avec $n(x)$ le vecteur normal extérieur au bord ∂D , montrer les formules de GREEN

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g\, dx &= -\int_D f \Delta g\, dx + \int_{\partial D} f\, \partial_n g\, ds \\ \int_D \big(f\, \Delta g - g\, \Delta f\big)\, dx &= \int_{\partial D} \big(f\, \partial_n g - g\, \partial_n f\big)\, ds \end{aligned}$$

pour des fonctions $f, g : \overline{D} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 . Ici, $\partial_n f$ désigne la dérivée normale extérieure :

$$\partial_n f(x) = n(x) \cdot \operatorname{grad} f(x)\,, \quad x \in \partial D\,.$$

2. Montrer que pour toute fonction u harmonique dans Ω et tout sous-domaine borné D avec $\overline{D} \subset \Omega$, on a

$$\int_{\partial D} \partial_n u\, ds = 0\,.$$

3. A partir de maintenant, on suppose que l'origine se trouve en x_0 , et on écrit r pour $|x|$. On utilise la formule de Green entre u et la fonction g qui est définie comme

$$g(x) = r^{2-d} \quad \text{si } d \geq 3 \; ; \qquad g(x) = \log r \quad \text{si } d = 2 \, .$$

Le domaine D est situé entre les sphères de rayon ε et R avec $0 < \varepsilon < R$: $D = B(0,R) \setminus \overline{B}(0,\varepsilon)$. Montrer

$$R^{1-d} \int_{r=R} u \, ds = \varepsilon^{1-d} \int_{r=\varepsilon} u \, ds \, .$$

4. Montrer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-d} \int_{r=\varepsilon} u \, ds = |\partial B(0,1)| \, u(0) \, ,$$

5. En déduire la première formule de la moyenne

$$u(0) = \frac{1}{|\partial B(0,R)|} \int_{r=R} u \, ds$$

6. En intégrant sur R , déduire la deuxième formule de la moyenne

$$u(0) = \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} u \, dx \, .$$

Exercice III. *Principe du maximum*

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ une fonction satisfaisant $\Delta u \geq 0$. Montrer que

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x) \, .$$

Pour la démonstration, on considère un point $x_0 \in \Omega$ dans lequel u atteint un maximum local. Si $u(x_0) > \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$, alors la même inégalité est vraie pour la fonction u_ϵ définie par $u_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon|x|^2$, si ϵ est suffisamment petit. Si u_ϵ atteint son maximum en x_1 , alors $x_1 \in \Omega$ et $\Delta u_\epsilon(x_1) \leq 0$, ce qui est impossible.

2. Montrer que le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson

$$\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \; ; \qquad u = g \quad \text{sur } \partial\Omega$$

admet, pour f et g données, au plus une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

3. Montrer qu'il existe C ne dépendant que de Ω tel que pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \, .$$