M1 CSA **MSNU – Modélisation et simulation numérique** **2014/15**

Feuille de TD 3

Exercice. *Quelques propriétés de l'espace de Sobolev* H^1

Soit $\Omega =]0,1[$.

1. Soit $a \in C^1(\overline{\Omega})$ et $u \in H^1(\Omega)$. Montrer que $au \in H^1(\Omega)$ et

$$(au)' = a'u + au' .$$

Est-ce que cela reste vrai si on ne demande que $a \in H^1(\Omega)$?

2. Soit $v \in L^2(\Omega)$. On définit

$$u(x) = \int_0^x v(y)\,dy .$$

Montrer que $u \in C(\overline{\Omega})$, que $v = u'$ au sens des distributions et que donc $u \in H^1(\Omega)$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $w_n(x) = \sin(n\pi x)$.
Calculer $\|w_n\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|w_n\|_{L^2(\Omega)}$, $|w_n|_{1,\Omega}$ et $\|w_n\|_{H^1(\Omega)}$.

4. Selon le lemme de Riemann-Lebesgue pour les séries de Fourier, on a pour $f \in L^1(\Omega)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega w_n(x) f(x)\,dx = 0 .$$

En déduire que $w_n \to 0$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$.

5. Soit $v_n(x) = 1 - nx$ pour $0 < x < 1/n$, $v(x) = 0$ pour $x \geq 1/n$.
Calculer $\|v_n\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|v_n\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|v_n\|_{H^1(\Omega)}$.

6. Montrer que pour les implications suivantes

convergence dans $H^1(\Omega) \Rightarrow$ conv. uniforme $\Rightarrow$ conv. dans $L^2(\Omega) \Rightarrow$ conv. dans $\mathscr{D}'(\Omega)$

aucune implication réciproque n'est vraie.

7. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour $u \in H^1(\Omega)$ et $x \in \Omega$

$$|u(x)|^2 \leq C\,\|u\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{H^1(\Omega)} .$$

8. Soit $u_- \in H^1(\,]-1,0\,[\,)$, $u_+ \in H^1(\,]0,1[\,)$ et $u \in L^2(\,]-1,1\,[\,)$ définie par

$$u = u_- \text{ dans }]-1,0\,[\,, \quad u = u_+ \text{ dans }]0,1[\,.$$

Montrer que $u \in H^1(\,]-1,1[\,)$ si et seulement si

$$u_-(0) = u_+(0)\,.$$

9. On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad -(au')' = 1 \qquad \text{avec } a(x) = x \ (x \in \Omega)\,.$$

Montrer que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la fonction u définie par

$$(2) \qquad u(x) = -x + \alpha \log x + \beta$$

est solution de (1) et que toute distribution $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ satisfaisant (1) au sens des distributions, est une distribution régulière de la forme (2) avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour quels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction u dans (2) appartient-elle à $H^1(\Omega)$, à $H_0^1(\Omega)$?

10. On considère les conditions aux limites $u(0) = 0$, $u(1) = 0$ pour l'équation différentielle (1). Donner la formulation variationnelle de ce problème aux limites dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. Montrer que cette formulation variationnelle n'admet pas de solution.

11. Déterminer les solutions du problème aux limites de la question **10** si on choisit $a(x) = \sqrt{x}$.

12. Même question si $a(x) = 1$ pour $0 < x < 1/2$, $a(x) = 2$ pour $1/2 \leq x < 1$.