M1 CSA **MSNU – Modélisation et simulation numérique** **2014/15**

Feuille de TD 2

Exercice I. *Exemples de distributions*

Soit $\Omega =]-1,1[$.

1. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on définit $f_{\alpha,\beta}(x) = |x|^\alpha (1-x)^\beta$. Pour quelles valeurs de α, β , la fonction $f_{\alpha,\beta}$ appartient-elle à $C(\Omega)$, $C(\overline{\Omega})$, $C^1(\Omega)$, $C^1(\overline{\Omega})$, $C^\infty(\Omega)$, $C^\infty(\overline{\Omega})$, $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $L^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $H^1(\Omega)$?

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, $x_0 \in \Omega$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = nf(n(x-x_0))$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ vers la masse de Dirac δ_{x_0} .

3. Soit $u(x) = \log|x|$ et $v = u'$ sa dérivée au sens des distributions. Montrer que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \quad \langle v, \varphi \rangle = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \Big(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(x)}{x} dx \Big) .$$

C'est donc une intégrale au sens de la valeur principale de Cauchy, et par conséquent on utilise le nom

$$\mathrm{vp}\frac{1}{x} \qquad \text{(ou } \mathrm{pv}\frac{1}{x} \text{ dans la littérature anglophile)}$$

pour cette distribution v . Est-ce que c'est une distribution régulière ?

4. Montrer que pour la convergence au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} = \mathrm{vp}\frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \pi\delta_0 .$$

On peut donc écrire

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{1}{x+i\varepsilon} = \mathrm{vp}\frac{1}{x} - i\pi\delta_0 .$$

5. Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cos(e^{\frac{1}{x}})$ et $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
Montrer qu'il existe une distribution $f_0 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que

$$f_0 = f \quad \text{dans } \Omega \setminus \{0\} ,$$

mais qu'il n'existe pas de distribution $g_0 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que

$$g_0 = g \quad \text{dans } \Omega \setminus \{0\} .$$

Exercice II.

Soit $\Omega =]0,1[$, $V = L^2(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $W_k = \mathbb{P}_k(\Omega)$ le sous-espace de V de polynômes de degré $\leq k$, et finalement $W_k^\perp$ le complément orthogonal de W_k dans V .

1. Soit $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ satisfaisant $u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(k)}(0) = 0$.
Montrer que $u(1) = u'(1) = \cdots = u^{(k)}(1) = 0$ si et seulement si $u^{(k+1)} \in W_k^\perp$.

2. Soit $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Montrer qu'il existe $u \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $v = u^{(k+1)}$ si et seulement si $v \in W_k^\perp$.

3. On fixe $k = 0$ et on choisit une fonction $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_0 \notin W_0^\perp$ (En donner un exemple). Montrer que pour $v \in C_0^\infty(\Omega)$ il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v - c\varphi_0 \in W_0^\perp$. En déduire le résultat suivant :

Si $f : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, v \mapsto \langle f, v \rangle$ est une forme linéaire satisfaisant

$$\forall\, u \in C_0^\infty(\Omega) : \quad \langle f, u' \rangle = 0\,,$$

alors il existe une constante $c_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, u \in C_0^\infty(\Omega) : \quad \langle f, u \rangle = c_0 \int_\Omega u(x)\, dx\,.$$

4. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$:
Si $f : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, v \mapsto \langle f, v \rangle$ est une forme linéaire satisfaisant

$$\forall\, u \in C_0^\infty(\Omega) : \quad \langle f, u^{(k+1)} \rangle = 0\,,$$

alors il existe un polynôme $p \in \mathbb{P}_k$ tel que

$$\forall\, u \in C_0^\infty(\Omega) : \quad \langle f, u \rangle = \int_\Omega p(x) u(x)\, dx\,.$$

On aura donc montré : Toute distribution dont la dérivée d'ordre $k+1$ est zéro est un polynôme de degré au plus k .