M1 CSA **MSNU – Modélisation et simulation numérique** **2014/15**

Feuille de TD 1

Exercice I.

Trouver toutes les solutions du problème aux limites

$$-u''(x) + cu(x) = f \quad (x \in]-1,1[\,)\,; \quad u(-1) = u(1) = g\,,$$

où c, f et g sont des constantes réelles. Distinguer les 3 cas $c < 0$, $c = 0$, $c > 0$, et discuter chaque fois l'existence et l'unicité d'une solution et la validité du principe du maximum.

Exercice II. *Erreurs de troncature ;*

Soit $\Omega =]0,1[$ et pour $N \in \{1,2,\dots\}$ donné, le maillage $(x_j)_{j=0,\dots,N}$ avec $x_j = jh$, $h = \frac{1}{N}$.

1. Montrer qu'il existe $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ tels que
(a) pour toute fonction $u \in C^3(\overline{\Omega})$

$$(1) \qquad \left|u(x_{j+1}) - u(x_{j-1}) - 2hu'(x_j)\right| \leq \gamma_1\, h^3\, \|u^{(3)}\|_{L^\infty(\Omega)}\,,$$

(b) pour toute fonction $u \in C^4(\overline{\Omega})$

$$(2) \qquad \left|u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1}) - h^2 u''(x_j)\right| \leq \gamma_2\, h^4\, \|u^{(4)}\|_{L^\infty(\Omega)}\,,$$

(c) pour toute fonction $u \in C^6(\overline{\Omega})$
(3)

$$\left|u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1}) - \frac{h^2}{12}\big(u''(x_{j-1}) + 10u''(x_j) + u''(x_{j+1})\big)\right| \leq \gamma_3\, h^6\, \|u^{(6)}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On considère maintenant le problème aux limites

$$(4) \qquad -u'' + cu = f \quad \text{dans } \Omega; \qquad u(0) = u_0,\ u(1) = u_1\,,$$

Dans ce cas, le schéma de différences finies d'ordre 2 étudié au cours est le systéme d'équations

$$(5) \qquad -U_{j-1} + (2 + h^2 c_j)U_j - U_{j+1} = h^2\, f_j \qquad (j = 1,\dots,N-1)\,,$$

complété par les conditions aux limites $U_0 = u_0$, $U_N = u_1$.
En divisant par h^2, on écrit ce système sous la forme $(\mathscr{A}_h U)_j = \tilde{f}_j$ $(j = 1,\dots,N-1)$.

2. On définit l'erreur $e_j = U_j - u(x_j)$. Montrer avec (2) que si $u \in C^4(\overline{\Omega})$ et $U \in \mathbb{R}^{N-1}$ sont des solutions de (4) et (5), respectivement, alors l'erreur e satisfait

$$(\mathscr{A}_h e)_j = h^2 \tau_j \quad \text{avec} \max_{1 \leq j \leq N-1} |\tau_j| \leq C\,, \quad C \text{ indépendante de } h.$$

En déduire l'estimation d'erreur

$$\max_{1\le j\le N-1} |e_j| \le C\,h^2\,, \quad C \text{ indépendante de } h.$$

Exercice III. *Schéma d'ordre* 4 *de Numerov*

Dans le schéma de Numerov, on remplace (5) par

$$(6)\quad (-1+\frac{h^2}{12}c_{j-1})\,U_{j-1} + (2+\frac{5h^2}{6}c_j)\,U_j + (-1+\frac{h^2}{12}c_{j+1})\,U_{j+1} = \frac{h^2}{12}\,(f_{j-1}+10f_j+f_{j+1})$$

En divisant par h^2, on écrit ce système sous la forme $(\mathscr{A}_h^1 U^1)_j = \tilde f_j^1 \ \ (j=1,\dots,N-1)$.
Montrer que si la solution u appartient à $C^6(\overline{\Omega})$, alors l'erreur e^1 de ce schéma satisfait

$$(\mathscr{A}_h e^1)_j = h^4\tau_j^1 \quad \text{avec} \max_{1\le j\le N-1} |\tau_j^1| \le C, \quad C \text{ indépendante de } h, \text{ donc}$$

$$\max_{1\le j\le N-1} |e_j| \le C\,h^4\,, \quad C \text{ indépendante de } h.$$

Exercice IV. *Méthode de tir*

On considère le problème aux limites

$$(7)\qquad -(au')' + bu' + cu = f \quad \text{dans } \Omega =]0,1[\,; \qquad u(0)=u_0, u(1)=u_1\,.$$

Dans la méthode de tir, on résout le *problème de Cauchy*

$$(8)\qquad -(au')' + bu' + cu = f \quad \text{dans } \Omega =]0,1[\,; \qquad u(0)=u_0, u'(0)=v\,,$$

et on cherche $v\in\mathbb{R}$ tel que la solution u de (8) vérifie $u(1)=u_1$.

1. Écrire le problème (7) comme système d'ordre 1 et utiliser le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour démontrer que l'application

$$F\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ v\mapsto u(1)$$

est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. On suppose que

$$\forall\, x\in\Omega\,: \quad a(x)\ge \underline{a} > 0\,;\ c(x)\ge 0\,.$$

Montrer que l'application F est strictement monotone.

3. Pour simplifier l'argument, on considère le cas

$$u_0 = 0\,; \quad b\ge 0\,.$$

Soit $v>0$ et $x_0 = \sup\{x\in\Omega \mid u'(x)>0\}$. Montrer que si $x_0<1$, alors

$$a(0)v \le \int_0^{x_0} f(x)\,dx\,.$$

En déduire que $F(v)\to+\infty$ quand $v\to+\infty$. Montrer finalement que $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est surjective, et que la méthode de tir donne donc une démonstration de l'existence d'une solution du problème aux limites.

4. Décrire un algorithme numérique pour la résolution du problème aux limites basé sur la méthode de tir.