M1 CSA **MSNU – Modélisation et simulation numérique** **2014/15**

Devoir

Solution à rendre le jeudi 26 mars 2015.
Une rédaction détaillée et complète des arguments est demandée.

Exercice I. *Coefficient discontinu*

1. Soit Ω le rectangle $]-1,\,1[\times]\,0,\,1[\subset\mathbb{R}^2$. On pose

$$\Omega_- = \{(x,y)\in\Omega \mid x<0\}\ ;\quad \Omega_+ = \{(x,y)\in\Omega \mid x>0\}\quad \text{et}\quad a(x,y)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ 2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

Avec $f\in L^2(\Omega)$, on considère le problème variationnel pour $u\in H^1_0(\Omega)$:

$$(1)\qquad \int_\Omega a(x,y)\,\mathrm{grad}\,u(x,y)\cdot\mathrm{grad}\,v(x,y)\,dx\,dy = \int_\Omega f(x,y)\,v(x,y)\,dx\,dy \qquad \forall\, v\in H^1_0(\Omega)\,.$$

Montrer que le problème (1) admet une solution unique.

3. Soit $u_-\in C^2(\overline{\Omega_-})$, $u_+\in C^2(\overline{\Omega_+})$, et soit $u\in L^2(\Omega)$ définie par $u=u_-$ dans Ω_- , $u=u_+$ dans Ω_+ . Montrer que u est solution du problème variationnel (1) si et seulement si u satisfait les équations aux dérivées partielles, conditions aux limites et conditions de transmission suivantes :

$$-\Delta u_- = f \ \text{ dans } \Omega_-\ ;\quad -2\Delta u_+ = f \ \text{ dans } \Omega_+\ ;$$

$$u=0 \ \text{ sur } \partial\Omega\ ;$$

$$u_-(0,y)=u_+(0,y)\ ;\quad \partial_x u_-(0,y) = 2\partial_x u_+(0,y)\quad (y\in[0,1])\,.$$

Exercice II. *Analyse modale d'un problème de guide d'onde*

Soit $\omega\subset\mathbb{R}^{d-1}$ un domaine borné régulier. On suppose qu'on connaît la suite des valeurs propres

$$\lambda_0<\lambda_1\leq\ldots$$

du laplacien dans ω avec conditions aux limites de Dirichlet, et les fonctions propres $\phi_0,\phi_1,\ldots$ correspondantes, normalisées de manière à ce que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une base orthonormée de l'espace de Hilbert $L^2(\omega)$.

Le domaine $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ sera le cylindre semi-infini $\Omega=\omega\times\mathbb{R}_+$.

On cherche des solutions u de l'équation de Helmholtz

$$(2)\qquad \Delta u + k^2 u = 0$$

dans Ω satisfaisant des conditions aux limites de Dirichlet

(3) $$u = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \times \mathbb{R}_+ \,; \qquad u(x', 0) = g(x') \quad \text{pour } x' \in \omega \,.$$

Ici, le nombre d'onde $k > 0$ et la fonction $g \in H^1(\omega)$ sont donnés.

<u>**1.**</u> On cherche d'abord des solutions de (2) de la forme

$$u(x', x_d) = y_n(x_d)\, \phi_n(x') \,.$$

Montrer que u satisfait (2) si et seulement si y_n satisfait l'équation différentielle

(4) $$y'' + (k^2 - \lambda_n) y = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \,.$$

<u>**2.**</u> Montrer que pour toute solution y de (4) , la fonction $J_y = \frac{1}{2i}(y'\bar{y} - \bar{y}'y)$ satisfait ${J_y}' = 0$. ($\bar{y}$ désigne la fonction complexe conjuguée). $J_y(x_d)$, qui correspond à un flux d'énergie à travers la surface $\omega \times \{x_d\}$, est donc indépendant de x_d .

<u>**3.**</u> En fonction des paramètres k et n , décrire une base de solutions de (4) en forme d'exponentielles de la variable x_d . Montrer que pour chaque k et chaque n , il y a parmi ces solutions exponentielles de (4) une seule y_n qui vérifie la condition suivante :

(5) $$y_n \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+ \text{ et satisfait } J_{y_n}(0) \geq 0 \,.$$

Cette condition est de type *condition de rayonnement* et indique que l'onde se propage vers l'infini.

<u>**4.**</u> En décomposant g dans la base des ϕ_n , montrer qu'il existe une unique solution u du problème (2) - (3) de la forme

$$u(x', x_d) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{u}_n y_n(x_d)\, \phi_n(x'),$$

où chaque terme dans la somme satisfait la condition de rayonnement (5) .