1

CSP CC1

Solutions

Exercice 1 Soit $\gamma(t) = \left(1+\sqrt{2}\sin t,\ 1-2\cos t,\ 3-\sqrt{2}\sin t\right)$

a) $\gamma'(t) = \left(\sqrt{2}\cos t,\ 2\sin t,\ -\sqrt{2}\cos t\right) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = 2$

Donc la longueur d'arc de γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(\pi)$ est :

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\pi} 2\, dt = \boxed{2\pi}$$

b) $\|\gamma'(t)\| = 2$ d'où $s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du = 2t$

Donc $t = \frac{s}{2}$ et $\underline{\gamma(s) = \left(1+\sqrt{2}\sin\frac{s}{2},\ 1-2\cos\frac{s}{2},\ 3-\sqrt{2}\sin\frac{s}{2}\right)}$

c) $\underline{T(s)} = \gamma'(s) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{s}{2},\ \sin\frac{s}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{s}{2}\right)}$

$$\gamma''(s) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}\cos\frac{s}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\sin\frac{s}{2}\right)$$

$\Rightarrow \underline{K(s)} = \|\gamma''(s)\| = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\underline{N(s)} = \frac{\gamma''(s)}{K(s)} = \boxed{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{s}{2},\ \cos\frac{s}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{s}{2}\right)}$

$\underline{B(s)} = T(s)\wedge N(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$B'(s) = (0,0,0) = -\tau(s)N(s) \Rightarrow \boxed{\tau(s) = 0}$

d) $\gamma(s)$ est une courbe plane car $\tau(s) = 0 \quad \forall s$

Elle est contenue dans le plan P orthogonal à $B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

et contenant le point $\gamma(0) = (1,-1,3)$ (par exemple)

Donc $P = \left\{(x,y,z) \mid (x-1, y+1, z-3)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0\right\}$

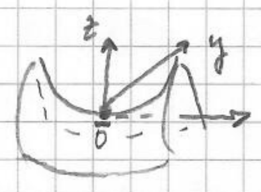
$$= \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} z = 2\sqrt{2} \right\}$$

$$= \underline{\left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x + z = 4 \right\}}$$

e) $\underline{\gamma \text{ est un (arc de) cercle de rayon } 2}$ car $\kappa(s) = \frac{1}{2}$ et $\tau(s) = 0$.

Exercice 2 : Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée par $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$

a) Il s'agit d'une "selle à cheval" (paraboloïde hyperbolique)



b) φ est clairement $\mathcal{C}^\infty$. Elle est régulière car $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \neq 0$ pour tout (u,v). En effet,

$$\left.\begin{aligned} \varphi_u &= (1, 0, 2u) \\ \varphi_v &= (0, 1, -2v) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_u \wedge \varphi_v = (-2u, 2v, 1)$$

d'où $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = (1 + 4u^2 + 4v^2)^{1/2} \neq 0$

c) $T_p S = \mathrm{Im}\,(D\varphi(2,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3)$ $\qquad p = (2,1,3)$

D'abord $\varphi(2,1) = (2,1,3)$ d'où

$$D\varphi(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc $T_{(2,1,3)} S = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Autrement,

$$N_\varphi(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{(2,1,3)} S = \{ (x,y,z) \mid (x,y,z) \cdot N_\varphi(2,1,3) = 0 \}$$

$$= \underline{\{ (x,y,z) \mid -4x + 2y + z = 0 \}}$$

d) La PFF :

$$\left.\begin{array}{l} E = \varphi_u \cdot \varphi_u = 1 + 4u^2 \\ F = \varphi_u \cdot \varphi_v = -4uv \\ G = \varphi_v \cdot \varphi_v = 1 + 4v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\mathcal{F}_I(\varphi) = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}}$$

ou bien : $\underline{(1+4u^2)\, u'^2 - 8uv\, u'v' + (1+4v^2)\, v'^2}$

e) $\gamma(t) = \varphi(\alpha(t))$, $\alpha(t) = (t, -t)$. Donc $u(t) = t$, $v(t) = -t$
$u' = 1$; $v' = -1$

et la longueur de γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(\pi)$ est donnée par :

$$\int_0^\pi \left[(1+4t^2) - 8t^2 + (1+4t^2) \right]^{1/2} dt = \int_0^\pi \sqrt{2}\, dt = \boxed{\sqrt{2}\, \pi}$$