Chapitre 2

Eléments pour comprendre un énoncé

Ce chapitre est consacré à la *compréhension* d'un énoncé. Pour *démontrer* un énoncé donné, il faut se reporter au chapitre suivant.
Les tables de vérité données dans ce chapitre sont utiles pour connaitre la valeur d'une proposition (dans quels cas est-elle vraie ou fausse), mais ne servent pas pour démontrer une proposition.

Un énoncé est parfois difficile à comprendre. Il peut contenir des mots utilisés dans un sens différent du sens courant ou des mots spécifiques au langage mathématique. S'il n'est pas écrit avec assez de soin, il peut devenir ambigu. Pour préciser ou mieux comprendre le sens d'un énoncé ou des mots employés, on s'efforce souvent de les écrire en utilisant des symboles mathématiques, des *et*, des *ou*, des $\Longrightarrow$, des $\Longleftrightarrow$, des $\forall$ ou des $\exists$.

Exemples - Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
• L'énoncé "l'application f a un zéro entre -1 et 1" est ambigu : faut-il comprendre "un et un seul zéro" ou "au moins un zéro" ? 1 et -1 sont-ils admis ? Si on écrit $\exists x \in [-1, 1],\ f(x) = 0$, ces ambiguïtés sont levées.
• Dire que "la suite (u_n) converge vers ℓ" peut se traduire par :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

L'intérêt de ce type d'écriture est de préciser la signification d'un énoncé complexe, mais il parait parfois difficile à déchiffrer. Il faut être capable de bien comprendre le sens d'une telle formule, de la traduire en français et inversement de traduire sous cette forme un énoncé exprimé en français. L'objet de ce chapitre est de vous donner quelques éléments pour vous aider à y parvenir.

1. Propositions

Confronté à un énoncé, un mathématicien souhaite pouvoir décider dans quelles conditions il est vrai ou faux. Cet énoncé peut contenir une ou plusieurs variables. Nous appellerons *proposition* un énoncé mathématique dont on peut décider s'il est vrai ou faux lorsque toutes les variables ont été remplacées par des valeurs connues.

Exemples - • "$2 \geqslant 1$" est une proposition vraie.
• "1=2" est une proposition fausse.
• Pour n entier, "$n \leq 6$" est une proposition. Lorsque n est égal à 4, elle est vraie et lorsque n est égal à 7, elle est fausse.
• Si x et y sont des réels, "$x^2 = y$" est une proposition.

A partir de propositions **P** et **Q** données, on peut définir de nouvelles propositions (*non* **P**), (**P** *et* **Q**), (**P** *ou* **Q**), (**P** $\Longrightarrow$ **Q**), (**P** $\Longleftrightarrow$ **Q**), dont on connait la valeur de vérité dès que l'on connait celles de **P** et **Q**.

1.1. Négation

Définition 2.1 – *Soit* **P** *une proposition. La négation de* **P** *est une proposition notée* (*non***P**). *Elle est vraie lorsque* **P** *est fausse et fausse lorsque* **P** *est vraie.*
On obtient la table de vérité suivante (où V est mis pour vraie et F pour fausse) :

P	(*non* **P**)
V	F
F	V

Exemples - • Soit x un réel. La proposition (*non* $(x = 1)$) est notée $(x \neq 1)$.
• Soit n un entier naturel. La proposition (*non* $(n \leq 2)$) prend les mêmes valeurs de vérité que la proposition $(n > 2)$.

Exercice - Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient la proposition (non $(0 \leq x < 2)$).

1.2. Conjonction et disjonction

Définition 2.2 – *Soient* **P** *et* **Q** *deux propositions.*

1) *La conjonction des deux propositions* **P** *et* **Q** *est une proposition notée* (**P** *et* **Q**). *Elle est vraie lorsque les deux propositions* **P** *et* **Q** *sont vraies, et elle est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions est fausse.*
2) *La disjonction des deux propositions* **P** *et* **Q** *est une proposition notée* (**P** *ou* **Q**). *Elle est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions* **P** *ou* **Q** *est vraie et elle est fausse lorsque les deux propositions* **P** *et* **Q** *sont fausses.*

On peut résumer ce qui précède dans la table suivante :

P	**Q**	(**P** *et* **Q**)	(**P** *ou* **Q**)
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Exemples - • Soient n un entier naturel, **P** la proposition "n est pair", **Q** la proposition "n est divisible par 3". Alors lorsque n est égal à 6, (**P** *et* **Q**) est vraie. Lorsque n est égal à 2, 3 ou 6, (**P** *ou* **Q**) est vraie.
• Soient x un réel, **P** la proposition $(x > 1)$, **Q** la proposition $(x \leq 2)$. Alors, pour $x = 3/2$ la proposition (**P** *et* **Q**) est vraie, pour $x = 0$ elle est fausse et quelque soit la valeur de x, la proposition (**P** *ou* **Q**) est vraie.

⚠ Dans le langage courant, le mot "ou" peut prendre deux sens différents : le sens inclusif qui est celui donné plus haut et le sens exclusif, qu'on précise parfois par "*ou bien*" : (P *ou bien* Q) est vraie si l'une des deux propositions est vraie et l'autre est fausse. Lorsque **P** et **Q** sont simultanément vraies, la proposition (**P** *ou* **Q**) est vraie, mais (**P** *ou bien* **Q**) est fausse. Nous n'utiliserons "ou" que dans le 1er sens.

Exercice - Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant la proposition :
$((x^2 > 1$ *et* $x < 2)$ *ou* $(x^2 \leq 9$ *et* $x < 0))$.

1.3. Implication

Définition 2.3 – *Soient* **P** *et* **Q** *deux propositions. Alors* (**P** $\Longrightarrow$ **Q**) *est une proposition. Elle est fausse lorsque* **P** *est vraie et* **Q** *est fausse. Elle est vraie dans tous les autres cas. On l'énonce "***P** *implique* **Q***" ou "si* **P***, alors* **Q***".*
Elle s'énonce aussi "**P** *entraine* **Q**" , "*pour que* **P**, *il faut que* **Q**", "*pour que* **Q**, *il suffit que* **P**", "*une condition nécessaire pour que* **P** *est que* **Q**" ou "*une condition suffisante pour que* **Q** *est que* **P**".

⚠ Dans le langage courant, on emploie souvent " il faut " à la place de " il suffit ". Par exemple, on dit " pour traverser la rivière, il faut prendre le bateau ", alors que c'est en fait suffisant, mais pas nécessaire. On peut le faire à la nage.

Proposition 2.4 – *La proposition* (**P** $\Longrightarrow$ **Q**) *a la même table de vérité que la proposition* ((*non* **P**) *ou* **Q**).

Exercice - Prouver cette proposition.

Exemples - • Soit x un réel. Considérons la proposition $(x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4)$. Si $x \neq 2$, elle est vraie, parce qu'alors la proposition $(x = 2)$ est fausse et si $x = 2$ elle est vraie, parce qu'alors la proposition $(x^2 = 4)$ est vraie. Cette proposition est donc toujours vraie. On l'énonce aussi "si x est égal à 2, alors x^2 est égal à 4".
• La proposition $(x = 2 \Longrightarrow 1 = 1)$ est vraie pour tout réel x, parce que $(1 = 1)$ est vraie, mais il faut bien dire qu'elle n'a pas beaucoup d'intérêt.
• Il en est de même pour la proposition $(1 = 0 \Longrightarrow 2 = 3)$ qui est vraie, parce que la proposition $(1 = 0)$ est fausse.

⚠ L'affirmation précédente choque le sens courant. Cependant, on admet facilement que la proposition $(x + 1 = y \Longrightarrow x + 3 = y + 2)$ est vraie pour tous les réels x et y ; et il suffit de prendre $x = y = 0$ pour obtenir $(1 = 0 \Longrightarrow 2 = 3)$.

En fait, dans le langage courant, l'expression "**P** implique **Q**" a souvent un autre sens : elle sous-entend que **P** est vraie et permet d'affirmer que **Q** l'est aussi. Elle correspond donc en fait à (**P** *et* (**P** $\Longrightarrow$ **Q**)). Il faut de même se méfier de l'utilisation courante de "si" : la phrase "s'il fait beau, j'irai me promener" ou "j'irai me promener, s'il fait beau" sous-entend généralement "s'il ne fait pas beau, je n'irai pas me promener" (et correspond donc à une équivalence ((**P** $\Longrightarrow$ **Q**) *et* (**Q** $\Longrightarrow$ **P**)).

Exercice - Ecrire les implications suivantes en utilisant les symboles $\Longrightarrow, \geqslant, >, \neq$ *et dire si elles sont vraies pour tous les réels x.*
1°) Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit strictement supérieur à 2.
2°) Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il suffit que x soit strictement supérieur à 2.
3°) Une condition nécessaire pour que x soit supérieur ou égal à 1, est que x soit différent de 1.
4°) Si x est dans l'intervalle $[0, 1]$, alors $x^2 - 4x + 3$ est positif.

1.4. Equivalence

Définition 2.5 – *Soient* **P** *et* **Q** *deux propositions. Alors,* $(\mathbf{P} \Longleftrightarrow \mathbf{Q})$ *est une proposition. Elle est vraie lorsque les propositions* **P** *et* **Q** *sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. Elle est fausse dans les autres cas. On l'énonce "***P** *est équivalente à* **Q***" ou "***P** *et* **Q** *sont équivalentes".*
Cette proposition s'énonce aussi "**P** *si et seulement si* **Q**", "*pour que* **P**, *il faut et il suffit que* **Q**", "*une condition nécessaire et suffisante pour que* **Q** *est que* **P**".
Dire que **P** et **Q** sont équivalentes, c'est dire que ces propositions ont mêmes valeurs de vérité, c'est-à-dire qu'elles signifient la même chose.

Proposition 2.6 – *Soient* **P** *et* **Q** *deux propositions. Alors, les deux propositions* $(\mathbf{P} \Longleftrightarrow \mathbf{Q})$ *et* $((\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q})$ *et* $(\mathbf{Q} \Longrightarrow \mathbf{P}))$ *ont mêmes valeurs de vérité.*
Pour le voir, on peut écrire la table de vérité suivante :

P	**Q**	$(\mathbf{P}\Longrightarrow\mathbf{Q})$	$(\mathbf{Q}\Longrightarrow\mathbf{P})$	$(\mathbf{P}\Longleftrightarrow\mathbf{Q})$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Exemples - • Soit x un réel. La proposition $(x \geqslant 2 \Longleftrightarrow x^2 \geqslant 4)$ est vraie pour tout $x \geqslant 0$, elle n'est pas toujours vraie lorsque $x < 0$ (par exemple, elle est fausse pour $x = -3$, vraie pour $x = -1$). Mais la proposition $(x \geqslant 2 \Longleftrightarrow (x^2 \geqslant 4 \textit{ et } x \geqslant 0))$ est vraie quelque soit x.
• Soit n un entier naturel. On a vu que la proposition $(n > 2)$ est équivalente à la proposition $(\textit{non}(n \leq 2))$.
• Si **P** et **Q** sont deux propositions, on a vu que $(\mathbf{P}\Longrightarrow\mathbf{Q})$ est équivalente à $((\textit{non}\,\mathbf{P})\ \textit{ou}\ \mathbf{Q})$.

Exercice - 1°) Soit x un réel. L'équivalence $(x^2 + |x| - 6 \leq 0 \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 2)$ est-elle vraie ?
2°) Soit E l'ensemble des entiers naturels pairs. Peut-on caractériser les éléments de E par l'une des propositions suivantes ?
1) $x \in \mathbb{R}$ et $x/2 \in \mathbb{N}$.
2) $x \in \mathbb{R}$ et $2x \in \mathbb{N}$.
3) $x \in \mathbb{R}$ et x^2 est un entier pair.

---

2. Propositions avec des quantificateurs

Pour désigner une proposition qui contient une variable x, on adopte souvent une notation de la forme $\mathbf{P}(x)$ pour en faciliter la lecture et la compréhension.

Exemples - • Pour n entier naturel, la proposition "n est pair" pourra être notée $\mathbf{P}(n)$.
• Si x et y sont des réels, "$x \geqslant y$" pourra être notée $\mathbf{Q}(x, y)$.

Soit $\mathbf{P}(x)$ une proposition qui contient une variable x, où x désigne un élément de E. La valeur de vérité de $\mathbf{P}(x)$ peut dépendre de x et il est souvent important de savoir si elle est vraie pour tous les éléments x de E, pour au moins un, pour un et un seul... Les définitions suivantes précisent ceci.

Définition 2.7 – *Soient E un ensemble et $\mathbf{P}(x)$ une proposition qui contient une variable x, où x désigne un élément de E.*

1) *La proposition $(\forall x \in E,\ \mathbf{P}(x))$ est vraie si la proposition $\mathbf{P}(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E ; elle est fausse sinon. Elle se lit "quelque soit x de E, on a $\mathbf{P}(x)$", ou "pour tout x de E, on a $\mathbf{P}(x)$".*
2) *La proposition $(\exists x \in E,\ \mathbf{P}(x))$ est vraie s'il existe au moins un élément x de E tel que $\mathbf{P}(x)$ soit vraie ; elle est fausse sinon. Elle se lit "il existe au moins un x de E tel que $\mathbf{P}(x)$".*
3) *La proposition $(\exists! x \in E,\ \mathbf{P}(x))$ est vraie s'il existe un élément x de E et un seul tel que $\mathbf{P}(x)$ soit vraie ; elle est fausse sinon. Elle se lit "il existe un et un seul x de E tel que $\mathbf{P}(x)$".*

Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur universel et $\exists$ est appelé quantificateur existentiel.

Exemples -
- $(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0)$ est vraie.
- $(\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1))$ est fausse.
- $(\exists x \in \mathbb{R},\ x^3 = 2)$ est vraie.
- $(\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2)$ est fausse.

Remarque - On peut rapprocher les quantificateurs et connecteurs logiques *non*, *et*, *ou*, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ des opérations ensemblistes : soient en effet A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On a alors :

1) $\forall x \in E,\ (x \in \complement_E A \Longleftrightarrow (\mathit{non}\,(x \in A))$
2) $\forall x \in E,\ (x \in A \cap B \Longleftrightarrow (x \in A\ \mathit{et}\ x \in B))$
3) $\forall x \in E,\ (x \in A \cup B \Longleftrightarrow (x \in A\ \mathit{ou}\ x \in B))$
4) $A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ (x \in A \Longrightarrow x \in B)$
5) $A = B \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$

Proposition 2.8 – *Soient E un ensemble, F un sous-ensemble de E et $\mathbf{P}(x)$ une proposition qui contient une variable x, où x désigne un élément de E.*

1) *La proposition $(\forall x \in E,\ (x \in F \Longrightarrow \mathbf{P}(x)))$ est équivalente à la proposition $(\forall x \in F,\ \mathbf{P}(x))$.*
2) *La proposition $(\exists x \in E,\ (x \in F\ \mathit{et}\ \mathbf{P}(x)))$ est équivalente à la proposition $(\exists x \in F,\ \mathbf{P}(x))$.*

Exemples - Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même.
• La proposition $(\exists n \in \mathbb{N},\ (n \neq 0\ et\ f(n) > 2))$ est équivalente à la proposition $(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) > 2)$.
• De même, il est équivalent de dire $(\forall n \in \mathbb{N},\ (n \neq 0 \Longrightarrow f(n) > 2))$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) > 2)$.

⚠ ⚠ 1) L'expression "il existe un x tel que..." dans le langage courant est ambiguë, car elle signifie parfois "il existe exactement un x tel que...", (ce qui correspond au symbole $\exists!$). C'est pourquoi, on préfère préciser "il existe au moins un x tel que..." (c'est-à-dire un ou plusieurs) ou "il existe un et un seul x tel que..." (c'est-à-dire exactement un). On rencontre aussi l'expression "il existe au plus un x tel que ..." qui veut dire "il n'existe pas de x tel que... ou il en existe exactement un".
2) Lorsqu'une proposition contient des quantificateurs $\forall$ et $\exists$, leur ordre est essentiel.
Par exemple, la proposition $(\forall x \in \mathbb{R},\ (\exists y \in \mathbb{R},\ y = x^2))$ est vraie, mais la proposition $(\exists y \in \mathbb{R},\ (\forall x \in \mathbb{R},\ y = x^2))$ est fausse.
3) Les propositions $(\forall x \in E,\ \mathbf{P}(x))$ et $(\exists x \in E,\ \mathbf{P}(x))$ ne traduisent pas des propriétés de x, mais de l'ensemble E ; on dit que x est une variable muette. On obtient une proposition équivalente en remplaçant partout x par une autre lettre. Mais il est plus prudent de choisir une lettre qui n'a pas déjà été utilisée.

Exercice - 1°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Traduire avec des quantificateurs la propriété "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée".
2°) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire par une phrase la proposition suivante $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > A$.
3°) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner une proposition équivalente à la proposition $(\forall x \in \mathbb{R},\ ((x \geqslant 0\ et\ x \leq 1) \Longrightarrow f(x) = 1))$ et qui ne contienne plus le signe $\Longrightarrow$.

---

3. Négation d'une proposition

Proposition 2.9 – *Soient $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ des propositions. Les équivalences suivantes sont toujours vraies :*

1) $(non\,(non\,\mathbf{P})) \Longleftrightarrow \mathbf{P}$.
2) $(non\,(\mathbf{P}\ et\ \mathbf{Q})) \Longleftrightarrow ((non\,\mathbf{P})\ ou\ (non\,\mathbf{Q}))$.
3) $(non\,(\mathbf{P}\ ou\ \mathbf{Q})) \Longleftrightarrow ((non\,\mathbf{P})\ et\ (non\,\mathbf{Q}))$.
4) $(non\,(\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q})) \Longleftrightarrow (\mathbf{P}\ et\ (non\,\mathbf{Q}))$.
5) $(\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}) \Longleftrightarrow ((non\,\mathbf{Q}) \Longrightarrow (non\,\mathbf{P}))$.

Exercice - Vérifier la proposition précédente en écrivant une table de vérité.

Proposition 2.10 – *Soient E un ensemble et $\mathbf{P}(x)$ une proposition qui contient une variable x, x désignant un élément de E. On a les équivalences suivantes :*

1) $(non\,(\forall x \in E,\ \mathbf{P}(x))) \Longleftrightarrow \exists x \in E,\ (non\,\mathbf{P}(x))$
2) $(non\,(\exists x \in E,\ \mathbf{P}(x))) \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ (non\,\mathbf{P}(x))$

Exemple - Les règles précédentes peuvent se combiner. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Par définition, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si l'on a :

$$\exists l \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

La négation de cette proposition est :

$$\forall l \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N\ et\ |u_n - l| \geqslant \varepsilon).$$

Exercice - 1°) Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Exprimer les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs et donner leur négation.

1) L'application f n'est pas de signe constant sur I.
2) L'application f est majorée sur I.
3) L'intervalle I est inclus dans $]1, 2[$.

2°) Ecrire la négation de la proposition
$((x^2 \geqslant 1$ et $x^3 < 2)$ ou $(x^2 \leq 9$ et $x < 0))$.

4. Quelques conseils pratiques

Lorsque l'on écrit une proposition en utilisant le langage formalisé que nous venons de décrire, il faut être sûr que ce que l'on écrit a bien le sens voulu. Donnons quelques indications en ce sens.

1) On n'est pas obligé de tout formaliser. Souvent, une formalisation partielle est plus lisible et permet de mieux contrôler le sens. Par exemple, la proposition “le carré de tout nombre entier naturel impair est impair” peut être partiellement formalisée par :

$$(\forall x \in \mathbb{N},\ (x \text{ est impair } \Longrightarrow x^2 \text{ est impair }))$$

ce qui est préférable à la formalisation complète :

$$(\forall x \in \mathbb{N},\ ((\forall y \in \mathbb{N},\ x \neq 2y) \Longrightarrow (\forall z \in \mathbb{N},\ x^2 \neq 2z))).$$

2) Cependant, une des principales difficultés pour formaliser correctement une proposition est que les quantificateurs sont trop souvent implicites en français. Pensez à les restituer. Par exemple, si l'on donne le système $\begin{cases} x - y + 2z = a \\ 3x + 5y + z = b \end{cases}$ et si on pose la question “ce système a-t-il des solutions réelles pour tous les réels a et b ?”, il faut étudier si la proposition $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x - y + 2z = a \\ 3x + 5y + z = b \end{cases}$ est vraie. Or on trouve souvent “il faut regarder si $\begin{cases} x - y + 2z = a \\ 3x + 5y + z = b \end{cases}$”, ce qui est voué à l'échec : qui sont les données ? Qui sont les inconnues ?
3) Une définition résume par un mot ou une expression une proposition qui peut être assez complexe. Pour comprendre un énoncé, il est indispensable de savoir traduire les définitions utilisées. Par exemple, si l'énoncé contient la phrase “soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E et $B = E \setminus A$”, on traduira : $B = \{x \in E \,|\, x \notin A\}$.
4) La formalisation ayant pour objectif de clarifier la signification des propositions en les précisant, il est évidemment inefficace et dangereux d'écrire des propositions de façon approximative. En particulier, l'oubli des parenthèses crée de graves ambiguïtés. Par exemple, que veut dire $(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = y \Longrightarrow y < 0)$? Faut-il comprendre $(\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 = y \Longrightarrow y < 0))$ ou $((\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = y) \Longrightarrow y < 0)$?
5) On a vu que l'ordre dans lequel apparaissent les symboles $\forall$ et $\exists$ est important. Laissez-les à leur place. Par exemple, écrire “$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$”, donnera la négation “$f(x) \leq 0, \exists x \in \mathbb{R}$”, qui ne veut plus rien dire.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice n°1

Ecrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes
1) Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
2) Si tout élément x d'un ensemble E est un élément de l'ensemble F, E est inclus dans F.

Exercice n°2

Soient x et y deux réels, écrire la négation des propositions suivantes :
1) $0 < x \leq 1$
2) $xy = 0$
3) $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

Exercice n°3

Soient E un ensemble et $\mathbf{P}(x)$ une proposition qui contient une variable x, x désignant un élément de E. Ecrire avec des quantificateurs une proposition qui signifie "il y a au plus un x tel que $\mathbf{P}(x)$" et une proposition qui signifie "il y a exactement deux x tels que $\mathbf{P}(x)$".

Exercice n°4

La proposition suivante est-elle vraie ? Ecrire sa négation.

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ \exists z \in \mathbb{Z},\ \exists u \in \mathbb{Z},\ \exists v \in \mathbb{Z},\ (x = zu \ et \ y = zv)$$

Exercice n°5

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?
1) $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0) \Longleftrightarrow \big[(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0) \ ou \ (\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)\big]$.
2) $(\forall x \in \mathbb{R},\ f^2(x) + g^2(x) = 0) \Longleftrightarrow \big[(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0) \ et \ (\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)\big]$.

Exercice n°6

1) Indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie lorsque $E = \mathbb{N}$.
  a) $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ y < x$
  b) $\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ y < x$
  c) $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ y + x = 0$
2) Même question si $E = \mathbb{Z}$.

Exercice n°7

Pour tous réels x et y, on note $P(x, y)$ la proposition $x + y^2 = 0$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?
1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x, y)$
2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x, y)$
3) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x, y)$
4) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ P(x, y)$
5) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x, y)$.

INDICATIONS ET SOLUTIONS SOMMAIRES

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 1}$

1) $\forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A)$
2) $(\forall x \in E, x \in F) \Longrightarrow (E \subset F)$

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 2}$

1) $x \leq 0$ ou $x > 1$
2) $x \neq 0$ et $y \neq 0$
3) $x^2 = 1$ et $x \neq 1$

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 3}$

$\big[((\exists x \in E, \mathbf{P}(x))\ et\ (\forall y \in E, (\mathbf{P}(y) \Longrightarrow x = y)))\big]\ ou\ \big(\forall x \in E, non\, P(x)\big).$
$(\exists (x, y) \in E \times E, (x \neq y\ et\ \mathbf{P}(x)\ et\ \mathbf{P}(y)\ et\ (\forall z \in E, (\mathbf{P}(z) \Longrightarrow (z = x\ ou\ z = y)))))$

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 4}$

La proposition est vraie. Elle signifie que deux entiers quelconques ont toujours un diviseur commun (par exemple 1).
Sa négation est

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}, \forall u \in \mathbb{Z}, \forall v \in \mathbb{Z}, (x \neq zu\ ou\ y \neq zv)$$

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 5}$

1) Faux. Un contre-exemple est donné par :
$f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geqslant 0$
$g(x) = 0$ si $x \geqslant 0$ et $g(x) = 1$ si $x < 0$
2) Vrai.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 6}$

1-a) Faux	b) Faux	c) Faux
2-a) Vrai	b) Faux	c) Vrai

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 7}$

1) Faux : $x = y = 1$
2) Faux : $x = 1$
3) Faux
4) Vrai
5) Vrai : $x = y = 0$