Université de Rennes 1 DEUG1 MIAS - MASS
UFR Mathématiques UE 3 - MA2
Feuille de TD n°5 Année 2002-2003

Exercice n°1

Etudier l'associativité, la commutativité, l'existence d'élément neutre, d'éléments inversibles pour les lois définies sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\begin{aligned}(a,b) &\longrightarrow a-b\\ (a,b) &\longrightarrow ab\\ (a,b) &\longrightarrow a^2+b^2\end{aligned}$$

Exercice n°2

Dans $\mathbb{R}$, on définit deux lois internes $\star$ et $\mathcal{T}$ par :

$$\begin{aligned}a \star b &= \sup(a,b)\\ a\mathcal{T}b &= \inf(a,b)\end{aligned}$$

1) Montrer que ces deux lois sont commutatives et associatives.

2) Montrer que $\mathcal{T}$ est distributive par rapport à $\star$.

3) Ces lois ont-elles un élément neutre ?

4) Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On considère les restrictions de $\star$ et $\mathcal{T}$ à E. A quelle condition portant sur E, ces restrictions peuvent-elles avoir un élément neutre ?

Exercice n°3

Soit n un entier strictement positif. On définit sur $\mathbb{R}$ la loi interne $\star$ par

$$a \star b = \frac{a^n+b^n}{a^2+b^2} \text{ si } a^2+b^2 \neq 0 \text{ et } 0 \star 0 = 0.$$

Pour quelles valeurs de n,

1) $\star$ est-elle associative ? On pourra calculer $(0 \star 1) \star 2$ et $(1 \star 1) \star 2$.

2) la multiplication usuelle sur $\mathbb{R}$ est-elle distributive par rapport à $\star$?

3) $\star$ admet-elle un élément neutre ? Quel est cet élément ? Quand il y a existence d'un élément neutre, quels sont les éléments inversibles ? Préciser l'inverse.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$

On définit sur $]-1,1[$ la loi $x \star y = (x+y)/(1+xy)$.
Montrer que $(]-1,1[,\star)$ est un groupe.

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$

Soit $\mu_n = \{z \in \mathbb{C}\,;\, z^n = 1\}$.
Montrer que μ_n muni du produit usuel dans $\mathbb{C}$ est un groupe.
Donner un autre exemple de sous-ensemble de $\mathbb{C}$ qui soit un groupe pour le produit.

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$

On considère les quatre fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longrightarrow x, \quad f_2 : x \longrightarrow -x, \quad f_3 : x \longrightarrow \frac{1}{x}, \quad f_4 : x \longrightarrow -\frac{1}{x}$$

Montrer que ces fonctions forment un groupe pour la loi $\circ$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°7}}$

1) Soit la loi $\star$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \star y = x + y - xy$. $\mathbb{R}$ est-il un groupe pour cette loi ? Trouver un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui soit un groupe pour cette loi.

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour que $\mathbb{R}$, muni de la loi $\star$ définie par $x \star y = a(x+y) + bxy + c$, soit un groupe.

$\boxed{\textbf{Exercice n°8}}$

1) On considère les lois $+$ et $*$ définies sur $\mathbb{Z}^2$ par :

$$\begin{aligned}(a,b) + (a',b') &= (a+a', b+b')\\ (a,b) * (a',b') &= (aa', bb' + ab' + a'b)\end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}^2, +, *)$ est-il un anneau commutatif ?
Identifier, s'il existe, l'élément neutre de $*$.

2) Mêmes questions en remplaçant la seconde loi par $(a,b)*(a',b') = (aa', 0)$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°9}}$

Soit X l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que X muni de la somme et du produit est un anneau. Préciser les éléments neutres de $+$ et $*$.
$(X, +, *)$ est-il un corps ? Trouver un sous-ensemble de X qui en soit un.

Exercice n°10

Montrer que $K = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ muni de l'addition et la multiplication est un corps.

Exercice n°11

On définit dans $\mathbb{R}$ les lois $\star$ et $\mathcal{T}$ par

$$\begin{aligned} x \star y &= x + y - 1 \\ x \mathcal{T} y &= x + y - xy \end{aligned}$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \star, \mathcal{T})$ est un corps commutatif.

Exercice n°12

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + i\,b\,;\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

1) Vérifier que $\mathbb{Z}[i]$ est un groupe commutatif pour l'addition.

2) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour la multiplication.
On précisera son élément neutre.

3) $\mathbb{Z}[i]$ est-il un corps ?

Exercice n°13

Combien de relations d'ordre peut-on mettre sur un ensemble ayant deux éléments ?

Exercice n°14

Soient E un ensemble ordonné et n un entier naturel non nul. Sur l'ensemble E^n, on définit la relation $\mathcal{R}$ suivante : $(x_1, \ldots, x_n)\,\mathcal{R}\,(y_1, \ldots, y_n)$ si

$$\begin{cases} \text{ou bien} \quad \exists h \in \{1, \ldots, n\}, \big(\forall i\,(i < h \Rightarrow x_i = y_i)\big) \text{ et } x_h < y_h \\ \text{ou bien} \quad \big(\forall i\,(i < n \Rightarrow x_i = y_i)\big) \text{ et } x_n \leq y_n. \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E^n.

Exercice n°15

Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui prolonge celle de $\mathbb{R}$ et qui ait les mêmes propriétés.

$\boxed{\textbf{Exercice n}^\circ\textbf{16}}$

On définit sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ suivante

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \text{ si } |x - x'| \leq y' - y.$$

Montrer que c'est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; représenter l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, (x, y)\,\mathcal{R}\,(x, b)\}$.
L'ensemble $\{(a, b), (c, d)\}$ a-t-il des bornes supérieure et inférieure ?

$\boxed{\textbf{Exercice n}^\circ\textbf{17}}$

Montrer que la relation $\mathcal{T}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(x, y)\,\mathcal{T}\,(x', y') \text{ si } xy = x'y'$$

est une relation d'équivalence. Préciser les classes d'équivalence.

$\boxed{\textbf{Exercice n}^\circ\textbf{18}}$

Soient E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$; on définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$X\,\mathcal{R}\,Y \text{ si } X \cap A = Y \cap A.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence. Trouver une bijection de $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(A)$.

$\boxed{\textbf{Exercice n}^\circ\textbf{19}}$

Soit $E = \{n \in \mathbb{N}\,;\, 1 \leq n \leq 8\}$. On définit sur l'ensemble produit $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$(p, q)\mathcal{R}(p', q') \text{ si } p - p' \text{ est pair et } q - q' \text{ est divisible par } 3.$$

1) Donner card$(E \times E)$.

2) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

On désigne par $\overline{(p, q)}$ la classe d'équivalence de (p, q).

3) Combien y a-t-il de classes d'équivalence différentes ? Donner leur liste.

4-a) Calculer le nombre d'éléments des classes d'équivalence suivantes : $\overline{(1, 1)}$, $\overline{(1, 2)}$, $\overline{(1, 3)}$.

b) Montrer que, pour tout $q \in E$, l'application f de $\overline{(1, q)}$ dans $\overline{(2, q)}$ définie par $f(x, y) = (x + 1, y)$ est une bijection.

5) Déterminer le cardinal de chaque classe d'équivalence. Le résultat trouvé est-il compatible avec celui de la question 1) ?